Theoretische Festkörperphysik

Prof. F. Wegner, Universität Heidelberg, WS 05/06

10. Lösungsblatt
Abgabe Mittwoch, 25.1.06

19) Berechne den Kommutator $[T, V]$ der Operatoren

$$T = \sum_{\mathbf{k},s} \epsilon_{\mathbf{k}} c^\dagger_{\mathbf{k},s} c_{\mathbf{k},s}, \quad V = \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q},s,s'} V(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q}) c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q},s} c^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},s'} c_{\mathbf{k}',s'} c_{\mathbf{k},s}$$

mit den Fermion-Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren $c^\dagger$ und c. (5 P.)

Lösung: Beim Durchkommutieren von T durch $c^\dagger$ und c erhält man

$$[T, c^\dagger_{\mathbf{k},s}] = \epsilon_{\mathbf{k}} c^\dagger_{\mathbf{k},s}, \quad [T, c_{\mathbf{k},s}] = -\epsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},s},$$

sodass

$$[T, V] = \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q},s,s'} (\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \epsilon_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}'} - \epsilon_{\mathbf{k}}) V(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q}) c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q},s} c^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},s'} c_{\mathbf{k}',s'} c_{\mathbf{k},s}$$

folgt.

20) Man gebe obigen Operator V in normalgeordneter Form mit

$$\langle c^\dagger_{\mathbf{k},s} c_{\mathbf{k}',s'} \rangle = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{s,s'} n_{\mathbf{k}}$$

an. (5 P.)

Lösung:

$$\begin{aligned}
c_{\mathbf{k}',s'} c_{\mathbf{k},s} &= \; : c_{\mathbf{k}',s'} c_{\mathbf{k},s} :, \\
c^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},s'} : c_{\mathbf{k}',s'} c_{\mathbf{k},s} : &= \; : c^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},s'} c_{\mathbf{k}',s'} c_{\mathbf{k},s} : + n_{\mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{q},\mathbf{0}} c_{\mathbf{k},s} - n_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},\mathbf{k}} \delta_{s',s} c_{\mathbf{k}',s'}, \\
c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q},s} c^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},s'} c_{\mathbf{k}',s'} c_{\mathbf{k},s} &= \; : c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q},s} c^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},s'} c_{\mathbf{k}',s'} c_{\mathbf{k},s} : \\
&- \; n_{\mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}'} \delta_{s,s'} : c^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},s'} c_{\mathbf{k},s} : + n_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{q},\mathbf{0}} : c^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},s'} c_{\mathbf{k}',s'} : \\
&+ \; n_{\mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{q},\mathbf{0}} (: c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q},s} c_{\mathbf{k},s} : + \delta_{\mathbf{q},\mathbf{0}} n_{\mathbf{k}}) \\
&- \; n_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},\mathbf{k}} \delta_{s',s} (: c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q},s} c_{\mathbf{k}',s'} : + \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}'} \delta_{s,s'})
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
V &= \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q},s,s'} V(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q}) : c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q},s} c^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},s'} c_{\mathbf{k}',s'} c_{\mathbf{k},s} : \\
&- \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',s} V(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{k}'-\mathbf{k}) n_{\mathbf{k}'} : c^\dagger_{\mathbf{k},s} c_{\mathbf{k},s} : + 2 \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',s'} V(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{0}) n_{\mathbf{k}} : c^\dagger_{\mathbf{k}',s'} c_{\mathbf{k}',s'} : \\
&+ 2 \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',s} V(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{0}) n_{\mathbf{k}'} : c^\dagger_{\mathbf{k},s} c_{\mathbf{k},s} : - \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',s} V(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{k}'-\mathbf{k}) n_{\mathbf{k}} : c^\dagger_{\mathbf{k}',s'} c_{\mathbf{k}',s'} : \\
&+ 4 \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} V(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{0}) n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'} - 2 \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} V(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{k}'-\mathbf{k}) n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'}.
\end{aligned}$$

Der dritte und der vierte Beitrag sind die Hartree-Beiträge zur Einteilchen-Energie, der zweite und der fünfte die Fock-Beiträge. Sie lassen sich zusammenfassen. Der sechste und der siebte Beitrag sind Hartree- und Fock-Beitrag zur Grundzustands-Energie oder zum Energie-Anteil der freien Energie.