Theoretische Festkörperphysik

Prof. F. Wegner, Universität Heidelberg, WS 05/06

11. Lösungsblatt
Abgabe Mittwoch, 1.2.06 zu Beginn der Vorlesung

21) Berechne Sie die Energie-Absenkung des supraleitenden gegenüber dem normalen Zustand aus den Gleichungen (19.16) - (19.18) des Skriptums für $\Delta \ll \hbar\omega_{\rm D}$. (4 P.)

Lösung: Ausgehend von (19.16) und unter der Annahme, dass die Zustandsdichte durch die an der Fermikante ersetzt werden kann, erhalten wir

$$\Delta E = V_{\rm P} \frac{D(\epsilon_F)}{2} \int {\rm d}\epsilon((\epsilon-\mu)(2v^2 - 2\theta(\mu-\epsilon)) - \Delta uv)$$

Dabei steht $D/2$, da in (19.16) keine Summe über die Spineinstellungen mehr steht. Mit $x = \epsilon - \mu$ ist der Integrand gerade in x. Wir erhalten dann

$$\Delta E = V_{\rm P} D(\epsilon_F) \int_0^\infty {\rm d}x \left(x - \frac{x^2 + \Delta^2/2}{\sqrt{x^2+\Delta^2}} \right) = V_{\rm P} D(\epsilon_F) \left. \frac{x^2 - x\sqrt{\Delta^2+x^2}}{2} \right|_0^\infty .$$

An der unteren Grenze ergibt das unbestimmte Integral 0, an der oberen Grenze verwendet man

$$\sqrt{\Delta^2 + x^2} = x\sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{x^2}} = x + \frac{\Delta^2}{2x}.$$

Damit folgt schließlich

$$\Delta E = -V_{\rm P} D(\epsilon_F) \frac{\Delta^2}{4}$$

Im Skriptum fehlte demnach im Ausdruck für ΔE nach (19.19) der Faktor Volumen $V_{\rm P}$.

22) Neben den Erwartungswerten

$$\langle c^\dagger_{\mathbf{k},s} c_{\mathbf{k}',s'} \rangle = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{s,s'} n_{\mathbf{k}}$$

sei auch

$$\langle c_{\mathbf{k},s} c_{\mathbf{k}',s'} \rangle = \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} s \delta_{s,-s'} m_{\mathbf{k}}, \quad s = \pm 1$$

von Null verschieden.

a) Was folgt für den Erwartungswert $\langle c^\dagger_{\mathbf{k},s} c^\dagger_{\mathbf{k}',s'} \rangle$? (1 P.)

Lösung:

$$\langle c^\dagger_{\mathbf{k},s} c^\dagger_{\mathbf{k}',s'} \rangle = \langle c_{\mathbf{k}',s'} c_{\mathbf{k},s} \rangle^* = \delta_{\mathbf{k}',-\mathbf{k}} s' \delta_{s',-s} m^*_{\mathbf{k}'}.$$

b) Man bringe den Hamilton-Operator

$$H = \sum_{\mathbf{k},s} c^\dagger_{\mathbf{k},s} c_{\mathbf{k},s} + \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q},s,s'} c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q},s} c^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},s'} c_{\mathbf{k}',s'} c_{\mathbf{k},s}$$

in normal-geordnete Form. (5 P.)

Es hätte besser heißen sollen: Man bringe den Hamilton-Operator

$$H = \sum_{\mathbf{k},s} \epsilon_{\mathbf{k}} c^\dagger_{\mathbf{k},s} c_{\mathbf{k},s} + \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q},s,s'} V(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q}) c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q},s} c^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},s'} c_{\mathbf{k}',s'} c_{\mathbf{k},s}$$

in normal-geordnete Form. Auch ohne die Faktoren ϵ und V gibt es die volle Punktzahl.

Lösung: Zusätzlich zu den Termen in Aufgabe 20 erhält man (blau gekennzeichnet)

$$\begin{aligned}
c_{\mathbf{k}',s'} c_{\mathbf{k},s} &= \,: c_{\mathbf{k}',s'} c_{\mathbf{k},s} : - \delta_{k,-k'} s \delta_{s,-s'} m_k, \\
c^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},s'} : c_{\mathbf{k}',s'} c_{\mathbf{k},s} : &= \,: c^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},s'} c_{\mathbf{k}',s'} c_{\mathbf{k},s} : + n_{\mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{q},\mathbf{0}} c_{\mathbf{k},s} - n_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},\mathbf{k}} \delta_{s',s} c_{\mathbf{k}',s'} \\
&- \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} s \delta_{s,-s'} m_k c^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},s'}, \\
c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q},s} c^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},s'} c_{\mathbf{k}',s'} c_{\mathbf{k},s} &= \,: c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q},s} c^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},s'} c_{\mathbf{k}',s'} c_{\mathbf{k},s} : + \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{q},-\mathbf{k}'+\mathbf{q}} \delta_{s',-s} s' m^*_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} : c_{\mathbf{k}',s'} c_{\mathbf{k},\mathbf{s}} : \\
&- n_{\mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}'} \delta_{s,s'} : c^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},s'} c_{\mathbf{k},s} : + n_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{q},\mathbf{0}} : c^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},s'} c_{\mathbf{k}',s'} : \\
&+ n_{\mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{q},\mathbf{0}} (: c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q},s} c_{\mathbf{k},s} : + \delta_{\mathbf{q},\mathbf{0}} n_{\mathbf{k}}) \\
&- n_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},\mathbf{k}} \delta_{s',s} (: c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q},s} c_{\mathbf{k}',s'} : + n_{\mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}'} \delta_{s,s'}) \\
&- \delta_{k,-k'} s \delta_{s,-s'} m_k (c^\dagger_{\mathbf{k}+q,s} c^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},s'} + \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{q},-\mathbf{k}'+\mathbf{q}} \delta_{s',-s} s' m^*_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}).
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
H &= T + V, \\
T &= \sum_{\mathbf{k},s} \epsilon_{\mathbf{k}} : c^\dagger_{\mathbf{k},s} c_{\mathbf{k},s} : + 2 \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}, \\
V &= \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q},s,s'} V(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q}) : c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q},s} c^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},s'} c_{\mathbf{k}',s'} c_{\mathbf{k},s} : \\
&- \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',s} V(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{k}'-\mathbf{k}) n_{\mathbf{k}'} : c^\dagger_{\mathbf{k},s} c_{\mathbf{k},s} : + 2 \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',s'} V(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{0}) n_{\mathbf{k}} : c^\dagger_{\mathbf{k}',s'} c_{\mathbf{k}',s'} : \\
&+ 2 \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',s} V(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{0}) n_{\mathbf{k}'} : c^\dagger_{\mathbf{k},s} c_{\mathbf{k},s} : - \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',s'} V(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{k}'-\mathbf{k}) n_{\mathbf{k}} : c^\dagger_{\mathbf{k}',s'} c_{\mathbf{k}',s'} : \\
&- \sum_{\mathbf{k},\mathbf{q},s} V(\mathbf{k},-\mathbf{k},\mathbf{q}) s (m^*_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} : c_{-\mathbf{k},-s} c_{\mathbf{k},s} : + m_{\mathbf{k}} : c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q},s} c^\dagger_{-\mathbf{k}-\mathbf{q},-s} :) \\
&+ 4 \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} V(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{0}) n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'} - 2 \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} V(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{k}'-\mathbf{k}) n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'} \\
&+ 2 \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} V(\mathbf{k},-\mathbf{k},\mathbf{k}'-\mathbf{k}) m_{\mathbf{k}} m^*_{\mathbf{k}'}.
\end{aligned}$$

c) Zusatzfrage: Welcher Ungleichung müssen n und m genügen? Man überlege sich zuerst: Warum gilt $0 \leq n \leq 1$ für $m = 0$ und verallgemeinere dann.

(5 Extrapunkte)

Lösung: Aus

$$\langle c_k^\dagger c_k \rangle = n_k, \quad \langle c_{-k} c_{-k}^\dagger \rangle = 1 - n_{-k}, \quad \langle c_k^\dagger c_{-k}^\dagger \rangle = -m_k^*, \quad \langle c_{-k} c_k \rangle = -m_k$$

folgt für den Erwartungswert

$$E = \langle (c_k^\dagger + a^* c_{-k})(c_k + a c_{-k}^\dagger) \rangle = n_k - a m_k^* - a^* m_k + a a^* (1 - n_{-k}) \geq 0,$$

da der Operator, dessen Erwartungswert gebildet wird (semi)positiv definit ist, denn er ist von der Form $A^\dagger A$. Man kann nun a geeignet wählen. Dazu kann man E nach a^* ableiten und diese Ableitung $-m_k + a(1 - n_{-k}$ gleich Null setzen, was $a = m_k/(1 - n_{-k})$ ergibt. Setzt man dies in E ein, so erhält man

$$E = \frac{n_k(1 - n_{-k}) - m_k m_k^*}{1 - n_{-k}} \geq 0.$$

Mit $1 - n_{-k} > 0$ folgt dann

$$m_k m_k^* \leq n_k(1 - n_{-k})$$

Ebenso gilt durch Vertauschen von k und $-k$

$$m_k m_k^* \leq n_{-k}(1 - n_k)$$

(Für $n_{-k} = 1$ ist E nach unten unbeschränkt, wenn $m \neq 0$. Dann muss also $m = 0$ gelten und somit gelten die Ungleichungen ebenfalls.)
Speziell für $n_{-k} = n_k$ folgt

$$(n_k - \frac{1}{2})^2 + m_k m_k^* \leq \frac{1}{4}.$$