Theoretische Festkörperphysik

Prof. F. Wegner, Universität Heidelberg, WS 05/06

12. Lösungsblatt
Abgabe Mittwoch, 8.2.06 zu Beginn der Vorlesung

23) Zu fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren $c^\dagger_{k\uparrow}$, $c^\dagger_{-k\downarrow}$ und $c_{k\uparrow}$, $c_{-k\downarrow}$ führt man neue Operatoren $\alpha^\dagger$ und α

$$\begin{aligned}\alpha^\dagger_{k\uparrow} &= w_1 c^\dagger_{k\uparrow} + w_2 c_{-k\downarrow}, \\ \alpha^\dagger_{-k\downarrow} &= w_3 c^\dagger_{-k\downarrow} + w_4 c_{k\uparrow}\end{aligned}$$

ein, die ebenfalls fermionische Operatoren sein sollen, das heißt den Antikommutator-Relationen

$$\begin{gathered}\{\alpha^\dagger_{k\uparrow}, \alpha^\dagger_{-k\downarrow}\} = \{\alpha_{k\uparrow}, \alpha_{-k\downarrow}\} = 0, \\ \{\alpha^\dagger_{k\uparrow}, \alpha_{k\uparrow}\} = \{\alpha^\dagger_{-k\downarrow}, \alpha_{-k\downarrow}\} = 1, \\ \{\alpha^\dagger_{k\uparrow}, \alpha_{-k\downarrow}\} = \{\alpha^\dagger_{-k\downarrow}, \alpha_{k\uparrow}\} = 0\end{gathered}$$

genügen sollen. Welche Bedingungen müssen die Konstanten w_i erfüllen? (5 P.)

Lösung: Aus den obigen Gleichungen folgt

$$\begin{gathered}\{\alpha^\dagger_{k\uparrow}, \alpha^\dagger_{-k\downarrow}\} = w_1 w_4 + w_2 w_3 = 0, \\ \{\alpha^\dagger_{k\uparrow}, \alpha_{k\uparrow}\} = w_1 w_1^* + w_2 w_2^* = 1, \\ \{\alpha^\dagger_{-k\downarrow}, \alpha_{-k\downarrow}\} = w_3 w_3^* + w_4 w_4^* = 1.\end{gathered}$$

Die anderen Gleichungen sind dann auch erfüllt. Wegen der zweiten Gleichung können w_1 und w_2 nicht gleichzeitig verschwinden. Damit folgt dann aus der ersten Gleichung $w_3 = c w_1$, $w_4 = -c w_2$ und aus der zweiten und dritten Gleichung $|c| = 1$, insgesamt findet man also

$$|w_1|^2 + |w_2|^2 = 1, \quad w_3 = c w_1, \quad w_4 = -c w_2, \quad |c| = 1.$$

Wir bemerken, dass wir die Transformation auch

$$\begin{pmatrix} \alpha^\dagger_{k\uparrow} \\ \alpha_{-k\downarrow} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} c^\dagger_{k\uparrow} \\ c_{-k\downarrow} \end{pmatrix} \text{ mit } U = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_4^* & w_3^* \end{pmatrix}$$

schreiben können, wobei dann die Bedingungen an die Koeffizienten w_i äquivalent sind zur Bedingung, dass U unitär ist, $UU^\dagger = 1$.

Häufig wird

$$w_1 = w_3 = u, \quad w_2 = -w_4 = v \text{ mit } u^2 + v^2 = 1$$

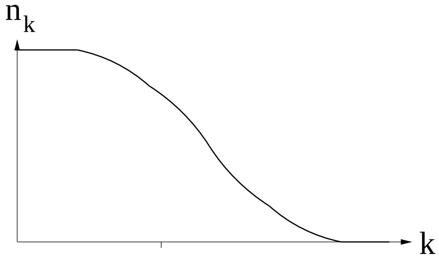
und reellem u und v verwendet.

24) Wiederholung zum Supraleiter:
a) Wie wird der Grundzustand des Supraleiters beschrieben? (1 P.)
Antwort: Der Grundzustand ist der BCS-Zustand

$$\psi\rangle = \prod_k (u_k + v_k c_k^\dagger c_{-k}^\dagger) \quad \text{mit} \quad |u_k|^2 + |v_k|^2 = 1.$$

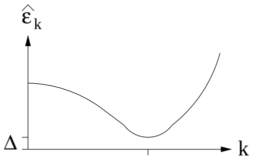
(Häufig können u_k und v_k reell gewählt werden.)
b) Skizziere die mittlere Besetzung $\langle c_{ks}^\dagger c_{ks}\rangle$ als Funktion von k. (1 P.)
Antwort: Die mittlere Besetzung ist

$$n_k = \langle c_{ks}^\dagger c_{ks}\rangle = |v_k|^2.$$



c) Geben Sie die Einteilchen-Anregungsenergien im Supraleiter an und skizzieren Sie sie als Funktion von k. (1 P.)
Antwort: Die Einteilchenanregungs-Energie ist gegeben durch

$$\hat{\epsilon}_k = \sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + \Delta^2}.$$



d) Wie unterscheidet sich die Grundzustandsenergie des Supraleiters von der des normalleitenden Zustands? (1 P.)
Antwort: Die Grundzustandsenergie ist um etwa $DV_P\Delta^2/4$ im supraleitenden Zustand gegenüber dem Normalzustand abgesenkt.

25) Welche Phasen des Hubbard-Modells kennen Sie? (1 P.)
Bisher erwähnte Phasen des Hubbard-Modells:
Metall - Mott-Isolator,
paramagnetischer, ferromagnetischer, antiferromagnetischer Zustand.
Weitere Phasen:
d-Wellen-Supraleiter
d-Wellen-Pomeranchuk-Deformation
Fluss-Phase.