Theoretische Festkörperphysik

Prof. F. Wegner, Universität Heidelberg, WS 05/06

2. Lösungsblatt
Abgabe Mittwoch, 2.11.05 zu Beginn der Vorlesung

3) Wir hatten die Deckoperation $\mathbf{r}' = \{\alpha, \mathbf{a}\} = \alpha\mathbf{r} + \mathbf{a}$ eingeführt.

a) Man bestimme α'' und $\mathbf{a}''$ bei der zweifachen Anwendung einer Deckoperation $\{\alpha'', \mathbf{a}''\} = \{\alpha', \mathbf{a}'\}\{\alpha, \mathbf{a}\}$. (1 P.)

Wir finden

$$\{\alpha', \mathbf{a}'\}\{\alpha, \mathbf{a}\}\mathbf{r} = \{\alpha', \mathbf{a}'\}(\alpha\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \alpha'(\alpha\mathbf{r} + \mathbf{a}) + \mathbf{a}' = \alpha'\alpha\mathbf{r} + (\alpha'\mathbf{a} + \mathbf{a}'),$$

also $\{\alpha'' = \alpha'\alpha,\ \mathbf{a}'' = \alpha'\mathbf{a} + \mathbf{a}'$.

b) Wie muss α' und $\mathbf{a}'$ gewählt werden, damit $\alpha'' = 1$ und $\mathbf{a}'' = 0$. Dieses $\{\alpha', \mathbf{a}'\}$ ist das Inverse von $\{\alpha, \mathbf{a}\}$, $\{\alpha', \mathbf{a}'\} = \{\alpha, \mathbf{a}\}^{-1}$. (1 P.)

Lösung: $\alpha' = \alpha^{-1}$, $\mathbf{a}' = -\alpha^{-1}\mathbf{a}$.

c) Man bestimme damit $\{\alpha, \mathbf{a}\}\{1, \mathbf{R}_m\}\{\alpha, \mathbf{a}\}^{-1}$. (1 P.)

Lösung:

$$\begin{gathered}\{\alpha, \mathbf{a}\}\{1, \mathbf{R}_m\}\{\alpha, \mathbf{a}\}^{-1}\mathbf{r} = \{\alpha, \mathbf{a}\}\{1, \mathbf{R}_m\}(\alpha^{-1}\mathbf{r} - \alpha^{-1}\mathbf{a}) \\ = \{\alpha, \mathbf{a}\}(\alpha^{-1}\mathbf{r} - \alpha^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{R}_m) = \mathbf{r} - \mathbf{a} + \alpha\mathbf{R}_m + \mathbf{a} = \{1, \alpha\mathbf{R}_m\}\mathbf{r}.\end{gathered}$$

4) In einem quadratischen Gitter haben wir acht Operationen der Punktgruppe, die sich auf eine Funktion $f(k_x, k_y)$ folgendermaßen auswirken: Identität $Ef(k_x, k_y) = f(k_x, k_y)$, Drehung um 90^0: $\alpha f(k_x, k_y) = f(k_y, -k_x)$, sowie die Drehungen um 180^0 und 270^0, α^2 und α^3, die Spiegelung an der x-Achse $S_x f(k_x, k_y) = f(k_x, -k_y)$ und die Spiegelung an der y-Achse $S_y f(k_x, k_y) = f(-k_x, k_y)$, sowie zwei weitere.

a) Man gebe $\alpha^2 f(k_x, k_y)$ und $\alpha^3 f(k_x, k_y)$ explizit an. Was ist $\alpha^4 f(k_x, k_y)$? (1 P.)

Lösung: $\alpha^2 f(k_x, k_y) = f(-k_x, -k_y)$, $\alpha^3 f(k_x, k_y) = f(-k_y, k_x)$, $\alpha^4 = 1$ ist das Eins-Element (Drehung um 360^0.)

b) Zwei Spiegelungen fehlen noch. Es sind dies die Spiegelung S_+ an $k_x = k_y$ und die Spiegelung S_- an $k_x = -k_y$. Man gebe $S_+ f(k_x, k_y)$ und $S_- f(k_x, k_y)$ an. (1 P.)

Lösung: $S_+ f(k_x, k_y) = f(k_y, k_x)$, $S_- f(k_x, k_y) = f(-k_y, -k_x)$.

c) Man zeige, dass $\cos(k_x)+\cos(k_y)$, $\cos(k_x)-\cos(k_y)$, $\sin(k_x)\sin(k_y)$ und $\sin(k_x)\sin(k_y)(\cos(k_x)-\cos(k_y))$ Eigenfunktionen der Operationen α, S_x und S_y sind und gebe die zugehörigen Eigenwerte an. Welche Parität haben diese Funktionen? (2 P.)

Liste der Eigenwerte:

Funktion	α	S_x	S_y
$\cos(k_x)+\cos(k_y)$	$+1$	$+1$	$+1$
$\cos(k_x)-\cos(k_y)$	-1	$+1$	$+1$
$\sin(k_x)\sin(k_y)$	-1	-1	-1
$\sin(k_x)\sin(k_y)(\cos(k_x)-\cos(k_y))$	$+1$	-1	-1

Die Parität wird durch α^2 gegeben. Sie ist in diesen Fällen stets positiv.

d) Man zeige, dass $\sin(k_x)$ und $\sin(k_y)$ Eigenfunktionen von α^2, S_x und S_y sind, und bestimme die Eigenwerte. (1 P.)

Liste der Eigenwerte:

Funktion	α^2	S_x	S_y
$\sin(k_x)$	-1	$+1$	-1
$\sin(k_y)$	-1	-1	$+1$

e) Diese Funktionen $\sin(k_x)$ und $\sin(k_y)$ sind keine Eigenfunktionen von α. Welche Linearkombinationen sind Eigenfunktionen von α und mit welchen Eigenwerten? (2 P.)

$$\alpha(\sin(k_x)\pm \mathrm{i}\sin(k_y)) = \mp\mathrm{i}(\sin(k_x)\pm \mathrm{i}\sin(k_y)).$$

Die Eigenwerte sind daher $\mp$i.