# Theoretische Festkörperphysik

# Prof. F. Wegner, Universität Heidelberg, WS 05/06

7. Lösungsblatt
Abgabe Mittwoch, 14.12.05 zu Beginn der Vorlesung

**13)** In einem äußeren Magnetfeld, das in $z$-Richtung weist, wird die Leitfähigkeit durch die Matrix $\sigma$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_\mathrm{p} & \sigma_\mathrm{H} \\ -\sigma_\mathrm{H} & \sigma_\mathrm{p} \end{pmatrix}$$

mit der Parallel-Leitfähigkeit $\sigma_\mathrm{P}$ und der Hallleitfähigkeit $\sigma_\mathrm{H}$ beschrieben. Diese Matrix verknüpft Stromdichte $\mathbf{j}$ und elektrische Feldstärke $\mathbf{E}$,

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}.$$

a) Berechne die inverse Matrix $\rho$,

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_\mathrm{p} & -\rho_\mathrm{H} \\ \rho_\mathrm{H} & \rho_\mathrm{p} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix}.$$

(2 P.)

Lösung:

$$\rho_\mathrm{p} = \frac{\sigma_\mathrm{p}}{\sigma_\mathrm{p}^2 + \sigma_\mathrm{H}^2}, \quad \rho_\mathrm{H} = \frac{\sigma_\mathrm{H}}{\sigma_\mathrm{p}^2 + \sigma_\mathrm{H}^2}.$$

b) Im Bereich der Hall-Plateaus ist $\sigma_\mathrm{H} \neq 0$, $\sigma_\mathrm{p} = 0$. Was folgt für $\rho_\mathrm{p}$ und $\rho_\mathrm{H}$?

(2 P.)

Lösung: $\rho_\mathrm{H} = 1/\sigma_\mathrm{H}$, $\rho_\mathrm{p} = 0$. Auf diesen Plateaux ist also sowohl $\sigma_\mathrm{P} = 0$ wie auch $\rho_\mathrm{P} = 0$.

**14)** a) Berechnen Sie den Projektor $P(z, z')$ auf das unterste Landau-Niveau unter Verwendung der symmetrischen Eichung $\mathbf{A} = \frac{B}{2}(-y, x)$ und

$$\sqrt{\frac{eB}{2\hbar c}}(x, y) = (\xi, \eta), \quad z = \xi - \mathrm{i}\eta, \quad z^* = \xi + \mathrm{i}\eta.$$

Wir hatten gefunden, dass sich dann die Zustände des untersten Landau-Niveaus darstellen lassen als $\psi = \mathrm{e}^{-zz^*/2} f(z)$ mit einer analytischen Funktion $f(z)$. Aus einem vollständigen Orthonormal-System $\psi_l$ erhält man dann den Projektor als

$$P(z, z') = \sum_l \psi_l(z) \psi_l^*(z').$$

(3 P.)

Lösung: Die Zustände können geschrieben werden als

$$\psi_l = c_l z^l \mathrm{e}^{-zz^*/2}$$

Wir berechnen die Normierung

$$\int \psi_l^* \psi_l \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = c_l^2 \int (zz^*)^l \mathrm{e}^{-zz^*} \pi \mathrm{d}(zz*) = c_l^2 \pi l!$$

mit $r^2 = zz^*$ und Flächenelement $\pi \mathrm{d}(R^2) = \pi \mathrm{d}(zz^*)$. Daher ist $c_l = \frac{1}{\sqrt{\pi l!}}$ und

$$P(z,z') = \sum_l \psi_l(z)\psi_l^*(z') = \sum_l \frac{1}{\pi l!}(zz'^*)^l \mathrm{e}^{-zz^*/2-z'z'^*/2} = \frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-zz^*/2+zz'^*-z'z'^*/2}$$

b) Man überprüfe, dass $P$ wirklich ein Projektor ist, das heißt,

$$\int P(z,z'')P(z'',z')\mathrm{d}\xi''\mathrm{d}\eta'' = P(z,z').$$

(3 P.)

Lösung:

$$\begin{aligned}\int P(z,z'')P(z'',z')\mathrm{d}\xi''\mathrm{d}\eta'' &= \frac{1}{\pi^2}\int \mathrm{d}\xi''\mathrm{d}\eta''\mathrm{e}^{-zz^*/2-z''z''^*-z'z'^*/2+zz''^*+z''z'^*} \\ &= P(z,z')\frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}\xi''\mathrm{d}\eta''\mathrm{e}^{-(z''-z)(z''^*-z'^*)},\end{aligned}$$

wobei das Integral einschließlich des Faktors $\frac{1}{\pi}$ gerade 1 ergibt. Man überzeugt sich, dass

$$\int \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{e}^{-(z-a)(z^*-b^*)} = \pi$$

auch für $a \neq b$ gilt, da

$$(z-a)(z^*-b^*) = (\xi - \mathrm{i}\eta - a)(\xi + \mathrm{i}\eta - b^*) = (\xi - \frac{a}{2} - \frac{b^*}{2})^2 + (\eta - \frac{\mathrm{i}a}{2} + \frac{\mathrm{i}b^*}{2})^2.$$