Theoretische Festkörperphysik

Prof. F. Wegner, Universität Heidelberg, WS 05/06

8. Lösungsblatt
Abgabe Mittwoch, 11.1.06 zu Beginn der Vorlesung

15) In der Vorlesung hatten wir für die zusätzliche magnetische Energie freier Elektronen (in zwei Dimensionen) in einem starken Magnetfeld

$$\Delta E = \frac{\mu_B N^2}{\xi \tilde{\nu}^2}\delta(1-\delta), \quad \tilde{\nu} = \frac{N}{\xi B}, \quad \xi = \frac{Fe}{hc}, \quad \delta = \tilde{\nu} - [\tilde{\nu}].$$

erhalten. Dabei ist N die Anzahl der Elektronen für die jeweilige Spin-Ausrichtung und Impulskomponente parallel zum Feld, F die Flächenausdehnung des Systems senkrecht zum Feld.

a) Bei hohen Temperaturen $k_\mathrm{B}T \gg \hbar\omega_\mathrm{c}$ ändert sich die Fermifunktion nur wenig von Landau-Niveau zu Landau-Niveau. Man kann dann daher $\delta(1-\delta)$ unter der Annahme einer Gleichverteilung zwischen 0 und +1 mitteln. Berechnen Sie hieraus den Beitrag freier drei-dimensionaler Elektronen für schwache Magnetfelder im Vergleich zur Temperatur, in dem Sie auch noch die Integration über die dritte Dimension durchführen. (3 P.)

Lösung: Die Mittelung von $\delta(1-\delta)$ ergibt

$$\int_0^1 \delta(1-\delta)\mathrm{d}\delta = \frac{1}{6}.$$

Die weitere Umformung ergibt dann für die Energie-Änderung der Zustände für gegebener Spineinstellung und k_z

$$\Delta E_2 = \frac{\mu_\mathrm{B} N^2}{\xi\tilde{\nu}^2}\langle\delta(1-\delta)\rangle = \frac{\mu_\mathrm{B} N^2}{6\xi\tilde{\nu}^2} = \frac{\mu_\mathrm{B}\xi B^2}{6} = \frac{\mu_\mathrm{B} FeB^2}{6hc} = \frac{\mu_\mathrm{B}^2 B^2 F}{6\pi}\frac{m}{\hbar^2}$$

b) Vergleichen Sie mit dem Ergebnis, das wir direkt für hohe Temperaturen erhielten. (2 P.)

Lösung: Wir müssen nun noch über k_z integrieren und die beiden Spin-Richtungen berücksichtigen,

$$\Delta E_3 = 2\sum_{k_z}\Delta E_2 = 2\frac{L_z}{2\pi}2k_F\Delta E_2 = \frac{V_P\mu_\mathrm{B}^2 B^2}{3\pi^2}\frac{mk_F}{\hbar^2} = \frac{V_P D(\mu_\mathrm{B}B)^2}{3}$$

mit der Zustandsdichte $D = mk_F/(\pi^2\hbar^2)$ an der Fermikante.

Dieses Ergebnis ist doppelt so groß, wie das was wir im Zusammenhang mit dem Landau-Diamagnetismus erhalten haben. Was ist der Grund? Wir haben hier den folgenden Beitrag berücksichtigt: Nehmen wir an, die Fermifunktion fällt von $\epsilon = \hbar\omega_c n$ bis $\hbar\omega_c(n+1)$ von f_1 auf f_2 linear ab. Dann ist der Energie-Beitrag dieses Intervals zur Gesamtenergie

$$V_P D \int_{\epsilon=\hbar\omega_c n}^{\hbar\omega_c(n+1)} \mathrm{d}\epsilon \epsilon \Big(f_1 + (f_2 - f_1)(\epsilon - \hbar\omega_c n) \Big)$$

Sind dagegen alle diese Zustände bei $\epsilon = \hbar\omega_c(n+\frac{1}{2})$ konzentriert, dann ist der Beitrag zur Gesamtenergie

$$V_P D \hbar\omega_c \frac{f_1 + f_2}{2} \hbar\omega_c (n + \frac{1}{2})$$

Bildet man die Differenz, so erhält man

$$V_P D (\hbar\omega_c)^2 \frac{f_1 - f_2}{12} = \frac{f_1 - f_2}{3} V_P D (\mu_B B)^2$$

was über die Energie-Intervalle aufsummiert in Übereinstimmung mit obigem Ergebnis ist. Es gibt jedoch noch einen zweiten Beitrag, der davon herrührt, dass die lineare Interpolation der Fermifunktion zu grob ist. Berücksichtigen wir die zweite Ableitung von f, so erhalten wir

$$f(\epsilon) = f_1 + (f_2 - f_1)\delta - \frac{1}{2} f''(\hbar\omega_c)^2 \delta(1-\delta), \quad \delta = \frac{\epsilon - \hbar\omega_c n}{\hbar\omega_c}$$

Dies gibt ohne Feld B einen zusätzlichen Beitrag $-\frac{1}{12}(\hbar\omega_c)^3 \epsilon V_P D f''$ von besetzten Zuständen im Intervall $\hbar\omega_c n ... \hbar\omega_c(n+1)$, während es im Feld $-\frac{1}{8}(\hbar\omega_c)^3 \epsilon V_P D$ gibt. Insgesamt also eine Differenz von $-\frac{1}{24}(\hbar\omega_c)^3 \epsilon V_P D f''$. Aufsummiert ergibt das einen zusätzlichen Beitrag

$$-\frac{V_P D (\hbar\omega_c)^2}{24} \int \mathrm{d}\epsilon \epsilon f'' = \frac{V_P D (\hbar\omega_c)^2}{24} \int \mathrm{d}\epsilon f' = -\frac{V_P D (\hbar\omega_c)^2}{24} = -\frac{V_P D (\mu_B B)^2}{6},$$

was zusammen mit dem obigen Beitrag Übereinstimmung mit dem Landau-Diamagnetismus bringt.

16) Geben Sie Verfahren an, die wir bisher kennen, um Information über die Bandstruktur zu erhalten

a) in Metallen, (3 P.)

In der Vorlesung haben wir vor allem den De Haas - van Alphen Effekt und die Zyklotronresonanz besprochen. Zusätzliche Information erhält man aus der spezifischen Wärme.

b) in Halbleitern. (2 P.)

Hier ist es die Zyklotronresonanz. Information über die Bandlücke erhält man aus der Leitfähigkeit und der optischen Absorption.