Theoretische Festkörperphysik

Prof. F. Wegner, Universität Heidelberg, WS 05/06

9. Lösungsblatt
Abgabe Mittwoch, 18.1.06 zu Beginn der Vorlesung

17) Gegeben sind die beiden Operatoren

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} c_i^\dagger c_j, \quad B = \sum_{k,l} b_{kl} c_k^\dagger c_l$$

mit den Fermion-Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren $c^\dagger$ und c.

a) Man bringe AB in die Normal-Ordnung für das Vakuum, das heißt in Produkten stehen stets die Erzeuger links von den Vernichtern. (2 P.)

Lösung:

$$AB = \sum_{i,j,k,l} a_{ij} b_{kl} c_i^\dagger c_j c_k^\dagger c_l.$$

Nun ist $c_j c_k^\dagger = \delta_{jk} - c_k^\dagger c_j$. Damit folgt

$$AB = -\sum_{i,j,k,l} a_{ij} b_{kl} c_i^\dagger c_k^\dagger c_j c_l + \sum_{i,j,l} a_{ij} b_{jl} c_i^\dagger c_l.$$

b) Man berechne den Kommutator $[A, B]$. (2 P.)

Lösung: Die $c^\dagger c^\dagger cc$-Terme von AB und BA stimmen überein, da $c_i^\dagger c_k^\dagger c_j c_l = c_k^\dagger c_i^\dagger c_l c_i$. Daher bleiben nur $c^\dagger c$-Terme

$$[A, B] = \sum_{i,l} \sum_j (a_{ij} b_{jl} - b_{ij} a_{jl}) c_i^\dagger c_l.$$

18) Gegeben sind der Teilchenzahl-Operator

$$\hat{N} = \sum_k (c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} + c_{-k\downarrow}^\dagger c_{-k\downarrow})$$

und der Operator

$$A = \sum_k c_{k\uparrow} c_{-k\downarrow}.$$

mit Fermion-Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren $c^\dagger$ und c.

a) Man gebe $A^\dagger$ an. (1 P.)

Lösung: Man muss nur die c in ihr hermitesch Adjungiertes $c^\dagger$ umwandeln und die beiden Faktoren in die umgekehrte Reihenfolge bringen.

$$A^\dagger = \sum_k c_{-k\downarrow}^\dagger c_{k\uparrow}^\dagger.$$

b) Man berechne die Kommutatoren $[\hat{N}, A]$, $[\hat{N}, A^\dagger]$ und $[A, A^\dagger]$. (5 P.)

Lösung:

$$
\begin{aligned}
[\hat{N}, A] &= \sum_{k,k'} [c^\dagger_{k\uparrow} c_{k\uparrow} + c^\dagger_{-k\downarrow} c_{-k\downarrow}, c_{k'\uparrow} c_{-k'\downarrow}] \\
&= \sum_k ([c^\dagger_{k\uparrow} c_{k\uparrow}, c_{k\uparrow}] c_{-k\downarrow} + c_{k\uparrow} [c^\dagger_{-k\downarrow} c_{-k\downarrow}, c_{-k\downarrow}]) \\
&= -\sum (c_{k\uparrow} c_{-k\downarrow} + c_{k\uparrow} c_{-k\downarrow}) = -2A.
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir zunächst verwendet, dass ein Paar $c^\dagger c$ oder $c^\dagger c^\dagger$ oder cc mit einem anderen Operator kommutiert, wenn die alle Quantenzahlen in dem Paar verschieden sind von denen des anderen Operators.

$$
[\hat{N}, A^\dagger] = [A, \hat{N}]^\dagger = -[\hat{N}, A]^\dagger = 2A^\dagger.
$$

$$
\begin{aligned}
[A, A^\dagger] &= \sum_{k,k'} [c_{k\uparrow} c_{-k\downarrow}, c^\dagger_{-k'\downarrow} c^\dagger_{k'\uparrow}] \\
&= \sum_k (c_{k\uparrow} c_{-k\downarrow} c^\dagger_{-k\downarrow} c^\dagger_{k\uparrow} - c^\dagger_{-k\downarrow} c^\dagger_{k\uparrow} c_{k\uparrow} c_{-k\downarrow}) \\
&= \sum_k (c_{k\uparrow} c^\dagger_{k\uparrow} c_{-k\downarrow} c^\dagger_{-k\downarrow} - c^\dagger_{k\uparrow} c_{k\uparrow} c^\dagger_{-k\downarrow} c_{-k\downarrow}) \\
&= \sum_k ((1 - c^\dagger_{k\uparrow} c_{k\uparrow})(1 - c^\dagger_{-k\downarrow} c_{-k\downarrow}) - c^\dagger_{k\uparrow} c_{k\uparrow} c^\dagger_{-k\downarrow} c_{-k\downarrow}) \\
&= \sum_k (1 - c^\dagger_{k\uparrow} c_{k\uparrow} - c^\dagger_{-k\downarrow} c_{-k\downarrow}) \\
&= \#k - \hat{N},
\end{aligned}
$$

wobei $\#k$ die Anzahl der k-Vektoren ist.