A Grundgleichungen

Vorbemerkung

Ich gehe davon aus, dass der Student bereits etwas mit der Elektrodynamik aus einer einführenden Vorlesung vertraut ist. Daher setze ich die vollständigen Gleichungen an den Anfang und führe von diesen ausgehend die jeweiligen Spezialisierungen ein.

In dieser Ausarbeitung verwende ich das Gaußsche Maßsystem und nicht das SI-System. Im SI-System sind das elektrische Feld **E** und die dielektrische Verschiebung **D** wie auch die magnetische Induktion **B** und das Magnetfeld **H** mit unterschiedlichen Dimensionen behaftet. Hierdurch wird leicht der irreführende Eindruck erweckt, es handele sich um selbständige Felder. Tatsächlich wird der zweite Satz Felder nur dadurch eingeführt, dass man Polarisations- und Magnetisierungsanteile der Ladungen und Ströme in Materie aus den totalen Ladungen und Strömen herauszieht und zu den Feldern addiert. Dies kommt in einem Maßsystem wie dem Gaußschen, in dem **E** und **D** wie auch **B** und **H** in gleichen Einheiten gemessen werden, besser zum Ausdruck.

Der Zusammenhang zwischen den Maßsystemen wird jeweils kurz angegeben. Eine Zusammenfassung findet sich im Anhang A. Leider gehört das Gaußsche Maßsystem zu den irrationalen, während das SI-System ein rationales ist. Ich hätte ein rationales Maß-System wie das von Heaviside und Lorentz vorgezogen. Leider wird aber in gängigen Lehrbüchern nur das SI-System und das Gaußsche verwendet. Ich möchte die Studierenden nicht mit einem Maßsystem konfrontieren, mit dem praktisch kein Lehrbuch arbeitet.

Im Anhang B sind Formeln zur Vektoralgebra und Vektoranalysis angegeben. Der Leser sei jedoch gewarnt, dass er an einigen Stellen (B.11, B.15, B.34-B.50 und Aufgabe nach B.71) die Ergebnisse selbst einzutragen hat. Er ist also aufgefordert, die Rechnungen selbst durchzuführen oder zumindest die Ergebnisse, die in dem Skriptum erarbeitet werden, dort einzutragen.

1 Grundgleichungen der Elektrodynamik

Die Elektrodynamik befasst sich mit elektrischen und magnetischen Feldern, ihrer Erzeugung durch Ladungen und Ströme, ihrer Ausbreitung (elektromagnetische Wellen), ihrer Rückwirkung auf die Materie (Kräfte).

1.a Ladungen und Ströme

1.a.α Ladungsdichte

Die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ ist die Ladung Δq pro Volumenelement ΔV

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \tag{1.1}$$

Damit ergibt sich die Ladung q im Volumen V zu

$$q = \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) \tag{1.2}$$

Besteht die Ladungsverteilung aus Punktladungen q_i an den Orten $\mathbf{r}_i$, so ist die Ladungsdichte durch die Summe

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \delta^3(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}), \tag{1.3}$$

gegeben, wobei die Diracsche Delta-Funktion (eigentlich Delta-Distribution) die Eigenschaft

$$\int_V d^3r f(\mathbf{r}) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{cases} f(\mathbf{r}_0) & \text{falls } \mathbf{r}_0 \in V \\ 0 & \text{falls } \mathbf{r}_0 \notin V \end{cases} \tag{1.4}$$

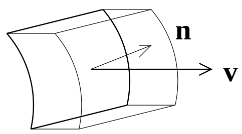
hat.

Ähnlich definiert man die Flächenladungsdichte $\sigma(\mathbf{r})$ an Grenz- oder Oberflächen als Ladung pro Fläche
$$\sigma(\mathbf{r}) = \frac{dq}{df}, \tag{1.5}$$
ähnlich auch die Linienladungsdichte.

1.a.β Strom und Stromdichte

Der Strom I ist die Ladung dq, die pro Zeiteinheit dt durch eine Fläche F fließt,
$$I = \frac{dq}{dt}. \tag{1.6}$$

Es sei nun $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ die mittlere Geschwindigkeit der Ladungsträger, $\mathbf{n}$ die (auf die Länge 1 normierte) Flächennormale. Dann ist $\mathbf{v}dt$ der Weg, den die Ladungen in der Zeit dt zurücklegen. Multipliziert mit $\mathbf{n}$ ergibt sich die Schichtdicke $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dt$, die die in der Zeit dt durch die Fläche geflossenen Ladungen bilden. Multipliziert mit dem Flächenelement df ergibt sich das Volumen der Ladung, die durch df geflossen ist und weitere Multiplikation mit der Ladungsdichte ρ ergibt die Ladung dq, die in der Zeit dt durch die Fläche df tritt



$$dq = \int_F \mathbf{v}dt \cdot \mathbf{n}df\rho \tag{1.7}$$
$$I = dq/dt = \int_F \mathbf{v}(\mathbf{r},t)\rho(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{r})df = \int_F \mathbf{j}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{f} \tag{1.8}$$
mit der Stromdichte $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ und dem gerichteten Flächenelement $d\mathbf{f} = \mathbf{n}df$.

1.a.γ Ladungserhaltung

Die Ladung q in einem Volumen V
$$q(t) = \int_V d^3r\rho(\mathbf{r},t) \tag{1.9}$$
ändert sich pro Zeiteinheit um
$$\frac{dq(t)}{dt} = \int_V d^3r\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \tag{1.10}$$
Da die Ladung erhalten ist, kann sie sich nur durch einen Strom durch die Oberfläche ∂V des Volumens ändern. Wir bezeichnen mit I den nach außen fließenden Strom. Dann ist
$$\frac{dq(t)}{dt} = -I(t) = -\int_{\partial V}\mathbf{j}(\mathbf{r},t)d\mathbf{f} = -\int_V d^3r\,\mathrm{div}\,\mathbf{j}(\mathbf{r},t), \tag{1.11}$$
wobei wir vom Gaußschen Satz (B.59) Gebrauch machten. Da diese Beziehung für jedes Volumen und auch Volumenelement gilt, folgt die Gleichheit der Integranden in den beiden Volumenintegralen
$$\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = 0. \tag{1.12}$$
Diese Gleichung bezeichnet man als Kontinuitätsgleichung. Sie drückt in differentieller Form die Erhaltung der Ladung aus.

1.b Maxwell-Gleichungen

Die elektrischen Ladungen und Ströme erzeugen das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ und die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$. Diese Beziehung wird durch die vier Maxwell-Gleichungen beschrieben

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\mathrm{c}\partial t} &= \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) &\quad (1.13)\\ \operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= 4\pi\rho(\mathbf{r},t) &\quad (1.14)\\ \operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\mathrm{c}\partial t} &= \mathbf{0} &\quad (1.15)\\ \operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= 0. &\quad (1.16) \end{aligned}$$

Diese Maxwell-Gleichungen werden bisweilen als Maxwell-Gleichungen im Vakuum bezeichnet. Sie gelten jedoch auch in Materie. Die Ladungsdichte und die Stromdichte enthalten alle Beiträge, also freibewegliche und Polarisations-Ladungsdichten und freibewegliche, Polarisations- und Magnetisierungs-stromdichten. Vielfach verlangt man als Randbedingung noch, dass das elektrische und das magnetische Feld im Unendlichen verschwinden.

1.c Coulomb- und Lorentz-Kraft

Das elektrische Feld $\mathbf{E}$ und die magnetische Induktion $\mathbf{B}$ üben auf eine Ladung q am Ort $\mathbf{r}$, die sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegt, die Kraft

$$\mathbf{K} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) + q\frac{\mathbf{v}}{\mathrm{c}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) + (\text{Reaktionskraft}) \quad (1.17)$$

aus. Dabei sind $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ die Beiträge, die nicht von q selbst herrühren. Der erste Beitrag ist die Coulomb-Kraft, der zweite die Lorentz-Kraft. Die von q selbst erzeugten Felder bewirken die Reaktionskraft, die wir jedoch im Weiteren nicht betrachten. Dabei ist c= 299 792 458 m/s. Wir werden später sehen, dass diese Konstante die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist.

Die Kraft, die auf ein kleines Volumen ΔV wirkt, lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{K} &= \mathbf{k}(\mathbf{r})\Delta V &\quad (1.18)\\ \mathbf{k}(\mathbf{r}) &= \rho(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}). &\quad (1.19) \end{aligned}$$

Man bezeichnet $\mathbf{k}$ als die Kraftdichte.

2 Dimensionen und Einheiten

2.a Gaußsches Maßsystem

In dieser Vorlesung verwenden wir das Gaußsche Maßsystem. Wir betrachten nun die Dimensionen der auftretenden Größen. Aus der Kontinuitätsgleichung (1.12) und den Maxwellgleichungen (1.13) bis (1.16) folgt

$$[\rho]/[t] = [j]/[x] \tag{2.1}$$
$$[B]/[x] = [E]/([\mathrm{c}][t]) = [j]/[\mathrm{c}] \tag{2.2}$$
$$[E]/[x] = [B]/([\mathrm{c}][t]) = [\rho] \tag{2.3}$$

Daraus folgt

$$[j] = [\rho][x]/[t] \tag{2.4}$$
$$[E] = [\rho][x] \tag{2.5}$$
$$[B] = [\rho][\mathrm{c}][t] = [\rho][x]^2/([\mathrm{c}][t]), \tag{2.6}$$

sowie

$$[\mathrm{c}] = [x]/[t] \tag{2.7}$$
$$[B] = [\rho][x] \tag{2.8}$$

Daraus sieht man, dass c tatsächlich die Dimension einer Geschwindigkeit hat. Um die weiteren Größen in ihrer Dimension festzulegen, müssen wir noch den Ausdruck (1.19) für die Kraftdichte k verwenden

$$[k] = [\rho][E] = [\rho]^2[x]. \tag{2.9}$$

Daraus folgt dann

$$[\rho]^2 = [k]/[x] = \mathrm{dyn\ cm}^{-4} \tag{2.10}$$
$$[\rho] = \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-2} \tag{2.11}$$
$$[E] = [B] = \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1} \tag{2.12}$$
$$[j] = \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}\ \mathrm{s}^{-1} \tag{2.13}$$
$$[q] = [\rho][x]^3 = \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm} \tag{2.14}$$
$$[I] = [j][x]^2 = \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm\ s}^{-1} \tag{2.15}$$

2.b Andere Einheitensysteme

Für jede Größe kann die Einheit in jedem System unabhängig definiert werden. Glücklicherweise macht man davon nicht vollständigen Gebrauch.

Neben dem Gaußschen Maßsystem werden noch eine Reihe weiterer cgs-Systeme sowie das SI-System (internationales Maßsystem, Giorgi-System) verwendet. Letzteres ist das gesetzliche Maßsystem. Es wird seit langem in der Technik angewandt.

Während das Gaußsche Maßsystem alle elektromagnetischen Größen in cm, g und s ausdrückt, verwendet das Giorgi-System neben den mechanischen Einheiten m, kg und s noch zwei weitere Einheiten A (Ampere) und V (Volt), allerdings nicht unabhängig voneinander, vielmehr gilt für die Einheit der Energie

$$1\ \mathrm{kg\ m}^2\ \mathrm{s}^{-2} = 1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{W\ s} = 1\ \mathrm{A\ V\ s}. \tag{2.16}$$

Die Umrechnung einiger gebräuchlicher Maßsysteme ineinander kann durch drei Umrechnungsfaktoren ϵ_0, μ_0 und ψ beschrieben werden. Dabei können ϵ_0 und μ_0 (im SI-System als Dielektrizitätskonstante und Permeabilitätskonstante des Vakuums bekannt) und die Verkettungskonstante

$$\gamma = \mathrm{c}\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \tag{2.17}$$

dimensionsbehaftet sein, während ψ ein dimensionsloser Zahlenfaktor ist. Man unterscheidet zwischen rationalen Maßsystemen ($\psi = 4\pi$) und nicht rationalen Maßsystemen ($\psi = 1$). Die Umrechnungsfaktoren einiger gebräuchlicher Maßsysteme sind

Maßsystem	ϵ_0	μ_0	γ	ψ
Gauß	1	1	c	1
Elektrostatisch (esu)	1	c^{-2}	1	1
Elektromagnetisch (emu)	c^{-2}	1	1	1
Heaviside-Lorentz	1	1	c	4π
Giorgi (SI)	$(\mathrm{c}^2\mu_0)^{-1}$	$\frac{4\pi}{10^7}\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$	1	4π

Die bisher eingeführten Größen drücken sich durch die Größen der anderen Maßsysteme (mit einem Stern versehen) folgendermaßen aus

$$\mathbf{E} = \sqrt{\psi\epsilon_0}\mathbf{E}^* \qquad 1\ \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1} \hat{=} 3 \cdot 10^4 \mathrm{V/m} \tag{2.18}$$

$$\mathbf{B} = \sqrt{\psi/\mu_0}\mathbf{B}^* \qquad 1\ \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1} \hat{=} 10^{-4} \mathrm{Vs/m}^2 \tag{2.19}$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{\psi\epsilon_0}} q^* \qquad 1\ \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm} \hat{=} 10^{-9}/3\mathrm{As},\ \text{ähnlich} \rho, \sigma, I, j. \tag{2.20}$$

Ein Umrechnungsbeispiel: Die Coulomb-Lorentz-Kraft lässt sich schreiben

$$\mathbf{K} = q(\mathbf{E} + \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{q^*}{\sqrt{\psi\epsilon_0}}(\sqrt{\psi\epsilon_0}\mathbf{E}^* + \frac{\sqrt{\psi}}{\mathrm{c}\sqrt{\mu_0}}\mathbf{v} \times \mathbf{B}^*) = q^*(\mathbf{E}^* + \frac{1}{\mathrm{c}\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}\mathbf{v} \times \mathbf{B}^*) = q^*(\mathbf{E}^* + \frac{1}{\gamma}\mathbf{v} \times \mathbf{B}^*). \tag{2.21}$$

Die Elementarladung e_0 ist in dem von uns verwendeten Gaußschen Maßsystem 4.803 10^{-10} $\mathrm{dyn}^{1/2}$ cm und im SI-System 1.602 10^{-19} As. Das Elektron trägt die Ladung -e_0, das Proton e_0, ein Kern der Kernladungszahl Z die Ladung $Z\mathrm{e}_0$, Quarks die Ladungen $\pm\mathrm{e}_0/3$ oder $\pm\ 2\mathrm{e}_0/3$.

Weitere Angaben werden jeweils bei der Einführung weiterer Größen gegeben und sind im Anhang A zusammengefasst.