A Umrechnung zwischen Maßsystemen der Elektrodynamik

Neben dem Gaußschen Maßsystem werden noch eine Reihe weiterer cgs-Systeme sowie das SI-System (internationales Maßsystem, Giorgi-System) verwendet. Letzteres ist das gesetzliche Maßsystem. Es wird seit langem in der Technik angewandt.

Während das Gaußsche Maßsystem alle elektromagnetischen Größen in cm, g und s ausdrückt, verwendet das Giorgi-System neben den mechanischen Einheiten m, kg und s noch zwei weitere Einheiten A (Ampere) und V (Volt), allerdings nicht unabhängig voneinander, vielmehr gilt für die Einheit der Energie

$$1\ \mathrm{kg\ m^2\ s^{-2}} = 1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{W\ s} = 1\ \mathrm{A\ V\ s}. \tag{A.1}$$

Die Umrechnung einiger gebräuchlicher Maßsysteme ineinander kann durch drei Umrechnungsfaktoren ϵ_0, μ_0 und ψ beschrieben werden. Dabei können ϵ_0 und μ_0 (im SI-System als Dielektrizitätskonstante und Permeabilitätskonstante des Vakuums bekannt) und die Verkettungskonstante

$$\gamma = \mathrm{c}\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \tag{A.2}$$

dimensionsbehaftet sein, während ψ ein dimensionsloser Zahlenfaktor ist. Man unterscheidet zwischen rationalen Maßsystemen ($\psi = 4\pi$) und nicht rationalen Maßsystemen ($\psi = 1$). Die Umrechnungsfaktoren einiger gebräuchlicher Maßsysteme sind

Maßsystem	ϵ_0	μ_0	γ	ψ
Gauß	1	1	c	1
Elektrostatisch (esu)	1	c^{-2}	1	1
Elektromagnetisch (emu)	c^{-2}	1	1	1
Heaviside-Lorentz	1	1	c	4π
Giorgi (SI)	$(\mathrm{c}^2\mu_0)^{-1}$	$\frac{4\pi}{10^7}\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$	1	4π

Die Feldgrößen im Gaußschen Maßsystem drücken sich durch die Größen der anderen Maßsysteme (mit einem Stern versehen) folgendermaßen aus

$$\begin{array}{rc}
\mathbf{E} = \sqrt{\psi\epsilon_0}\mathbf{E}^* & \text{analog elektrisches Potential} \\
\mathbf{D} = \sqrt{\psi/\epsilon_0}\mathbf{D}^* & \\
\mathbf{P} = 1/\sqrt{\psi\epsilon_0}\mathbf{P}^* & \text{analog Ladung, Strom und deren Dichten,} \\
 & \text{elektrische Momente} \\
\mathbf{B} = \sqrt{\psi/\mu_0}\mathbf{B}^* & \text{analog Vektorpotential, magnetischer Fluss} \\
\mathbf{H} = \sqrt{\psi\mu_0}\mathbf{H}^* & \\
\mathbf{M} = \sqrt{\mu_0/\psi}\mathbf{M}^* & \text{analog magnetische Momente}
\end{array} \tag{A.3}$$

Für die mit Leitfähigkeit und Widerstand verknüpften Größen gilt

$$\begin{array}{rl}
\sigma = 1/(\psi\epsilon_0)\sigma^* & \text{analog Kapazität} \\
R = \psi\epsilon_0 R^* & \text{analog Induktivität}
\end{array} \tag{A.4}$$

Für die elektrische und magnetische Suszeptibilität gilt

$$\chi = \chi^*/\psi. \tag{A.5}$$

Wir erhalten damit die folgenden Gleichungen für beliebige Maßsysteme (d.h. der * ist jetzt weggelassen): Die Maxwell-Gleichungen in Materie lauten dann

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{1}{\gamma}(\dot{\mathbf{D}} + \frac{4\pi}{\psi}\mathbf{j}_\mathrm{f}), \tag{A.6}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \frac{4\pi}{\psi}\rho_\mathrm{f}, \tag{A.7}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{\gamma}\dot{\mathbf{B}}, \tag{A.8}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0. \tag{A.9}$$

Für die Materialgleichungen folgt

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \frac{4\pi}{\psi}\mathbf{P}, \tag{A.10}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \frac{4\pi}{\psi}\mathbf{M}. \tag{A.11}$$

Für die Lorentz-Kraft folgt

$$\mathbf{K} = q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}{\gamma}) \tag{A.12}$$

Für die Energiedichte u und den Poynting-Vektor $\mathbf{S}$ folgen

$$u = \frac{\psi}{4\pi}\int(\mathbf{E}\cdot d\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}), \tag{A.13}$$

$$\mathbf{S} = \frac{\psi\gamma}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}. \tag{A.14}$$

Während im Gaußschen System alle Feldgrößen $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ und $\mathbf{M}$ in der Einheit

$$\sqrt{\mathrm{dyn}}/\mathrm{cm} = \sqrt{\mathrm{erg}/\mathrm{cm}^3} \tag{A.15}$$

gemessen werden, werden im Giorgi-System $\mathbf{E}$ in V/m, $\mathbf{D}$ und $\mathbf{P}$ in As/m^2, $\mathbf{B}$ in Vs/m^2, $\mathbf{H}$ und $\mathbf{M}$ in A/m gemessen.
Je nach Feldgröße entspricht 1 dyn$^{1/2}$ cm^{-1} im Gaußschen System den folgenden Werten im Giorgi-System (analog für die weiteren in (A.3) und (A.4) angegebenen Größen)

$$\mathbf{E} = 3\cdot 10^4 \text{ V/m} \tag{A.16}$$

$$\mathbf{D} = 10^{-5}/(12\pi) \text{ As/m}^2 \tag{A.17}$$

$$\mathbf{P} = 10^{-5}/3 \text{ As/m}^2 \tag{A.18}$$

$$\mathbf{B} = 10^{-4} \text{ Vs/m}^2 \tag{A.19}$$

$$\mathbf{H} = 10^3/(4\pi) \text{ A/m} \tag{A.20}$$

$$\mathbf{M} = 10^3 \text{ A/m} \tag{A.21}$$

Für Widerstände gilt c$^{-1}\hat{=}30\Omega$. Für genaue Berechnungen sind die Faktoren 3 (auch die 3 in $12 = 4\cdot 3$) durch den Faktor 2.99792458 zu ersetzen. Dieser Faktor multipliziert mit 10^8 m/s ist die Lichtgeschwindigkeit.

Für folgende vielgebrauchte Einheiten im Gaußschen und im elektromagnetischen System sind eigene Namen üblich:

Magnetische Induktion	1 dyn$^{1/2}$ cm^{-1}=1 G (Gauß)
Magnetische Feldstärke	1 dyn$^{1/2}$ cm^{-1}=1 Oe (Oerstedt)
Magnetischer Fluss	1 dyn$^{1/2}$ cm =1 Mx (Maxwell)

Im SI-System haben außer Ampere und Volt folgende Größen einen eigenen Namen:

Ladung	1 As =1 C (Coulomb)
Widerstand	1 V/A =1 Ω (Ohm)
Leitwert	1 A/V =1 S (Siemens)
Kapazität	1 As/V =1 F (Farad)
Induktivität	1 Vs/A =1 H (Henry)
Magnetischer Fluss	1 Vs =1 Wb (Weber)
Induktion	1 Vs/m^2=1 T (Tesla).

B Formeln zur Vektorrechnung

Der Leser möge die Aufgaben B.11, B.15, B.34-B.50 und die Aufgabe nach B.71 selbst lösen oder die Ergebnisse dem Skriptum an anderer Stelle entnehmen.

B.a Vektoralgebra

B.a.α Summationskonvention und orthonormale Basis

Wir verwenden die Summationskonvention, die besagt, daß über alle Indices, die zweimal in einem Produkt auftreten, summiert wird. Daher steht

$$\mathbf{a} = a_\alpha \mathbf{e}_\alpha \tag{B.1}$$

für

$$\mathbf{a} = \sum_{\alpha=1}^{3} a_\alpha \mathbf{e}_\alpha = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3.$$

Wir setzen im Folgenden voraus, daß die Vektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ in der Zerlegung (B.1) ein orthonormales und ortsunabhängiges Rechtssystem darstellen. Dann sind a_1, a_2, a_3 die Komponenten des Vektors $\mathbf{a}$ bezüglich der Basis $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

B.a.β Skalarprodukt

Für das Skalarprodukt gilt

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = a_\alpha b_\alpha, \tag{B.2}$$

insbesondere

$$\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1 \text{ für } \alpha=\beta \\ 0 \text{ für } \alpha\neq\beta \end{cases} \tag{B.3}$$

mit dem gegen Vertauschen der Indices symmetrischen Kronecker-Symbol $\delta_{\alpha,\beta}$, und

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\alpha = a_\alpha. \tag{B.4}$$

B.a.γ Vektorielles Produkt

Für das vektorielle Produkt gilt

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a} = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} a_\alpha b_\beta \mathbf{e}_\gamma = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3 \tag{B.5}$$

mit dem total antisymmetrischen Levi-Civita-Symbol

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} +1 & \text{für } (\alpha,\beta,\gamma) = (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2) \\ -1 & \text{für } (\alpha,\beta,\gamma) = (1,3,2),(2,1,3),(3,2,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{B.6}$$

Mit Determinanten schreibt man

$$\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha,1} & \delta_{\beta,1} & \delta_{\gamma,1} \\ \delta_{\alpha,2} & \delta_{\beta,2} & \delta_{\gamma,2} \\ \delta_{\alpha,3} & \delta_{\beta,3} & \delta_{\gamma,3} \end{vmatrix}. \tag{B.7}$$

Durch Multiplikation mit a_α, b_β und $\mathbf{e}_\gamma$ und Ausführen der Summe erhält man aus (B.5)

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \mathbf{e}_1 \\ a_2 & b_2 & \mathbf{e}_2 \\ a_3 & b_3 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}. \tag{B.8}$$

Insbesondere gilt

$$\mathbf{a}\times\mathbf{a} = \mathbf{0} \tag{B.9}$$

und

$$\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}\mathbf{e}_\gamma. \tag{B.10}$$

Man drücke die Summe

$$\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}\epsilon_{\zeta,\eta,\gamma} = \tag{B.11}$$

mit Hilfe von Kronecker-Deltas aus.

B.a.δ Mehrfachprodukte

Für das Spatprodukt gilt

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}a_\alpha b_\beta c_\gamma = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{B.12}$$

Es ist

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = [\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}] = [\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}] = -[\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b}] = -[\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}] = -[\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}]. \tag{B.13}$$

Für das Dreifach-Produkt folgt

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}. \tag{B.14}$$

Man drücke das Vierfach-Produkt

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \tag{B.15}$$

mit Hilfe von (B.11) oder (B.14) durch Skalarprodukte aus.

B.b Vektoranalysis

B.b.α Räumliche Differentiation, Nabla-Operator

Die räumliche Differentiation wird mit dem Nabla-Operator ∇ durchgeführt. Er ist ein Differential-Operator mit Vektoreigenschaften, in kartesischen Koordinaten

$$\nabla = \mathbf{e}_\alpha \partial_\alpha, \tag{B.16}$$

wobei ∂_α für $\partial/\partial x_\alpha$ steht. Man bezeichnet

$$\nabla\Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\alpha\partial_\alpha\Phi(\mathbf{r}) = \operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}) \tag{B.17}$$

als Gradient,

$$(\mathbf{b}(\mathbf{r})\nabla)\mathbf{a}(\mathbf{r}) = b_\alpha(\mathbf{r})\partial_\alpha\mathbf{a}(\mathbf{r}) = (\mathbf{b}(\mathbf{r})\operatorname{grad})\mathbf{a}(\mathbf{r}) \tag{B.18}$$

als Vektorgradient,

$$\nabla\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \partial_\alpha a_\alpha(\mathbf{r}) = \operatorname{div}\mathbf{a}(\mathbf{r}) \tag{B.19}$$

als Divergenz und

$$\nabla\times\mathbf{a}(\mathbf{r}) = (\mathbf{e}_\alpha\times\mathbf{e}_\beta)\partial_\alpha a_\beta(\mathbf{r}) = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}\partial_\alpha a_\beta(\mathbf{r})\mathbf{e}_\gamma = \operatorname{rot}\mathbf{a}(\mathbf{r}) \tag{B.20}$$

als Rotation.

B.b.β Zweifache Ableitung, Laplace-Operator

Soweit die Differentiationen vertauschbar sind, gilt

$$\nabla\times\nabla = \mathbf{0}, \tag{B.21}$$

woraus

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \tag{B.22}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}(\mathbf{r}) = 0 \tag{B.23}$$

folgt. Das Skalarprodukt

$$\nabla \cdot \nabla = \partial_\alpha \partial_\alpha = \triangle \tag{B.24}$$

wird als Laplace-Operator bezeichnet. Daher ist

$$\operatorname{div}\,\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}) = \triangle\Phi(\mathbf{r}). \tag{B.25}$$

Man findet

$$\triangle\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \operatorname{grad}\,\operatorname{div}\mathbf{a}(\mathbf{r}) - \operatorname{rot}\,\operatorname{rot}\mathbf{a}(\mathbf{r}), \tag{B.26}$$

indem man in (B.14) **a** and **b** durch ∇ ersetzt und den Vektor **c** stets auf die rechte Seite schafft.

B.b.γ Ableitung von Produkten

Bei Anwendung des Nabla-Operators auf Produkte von zwei Faktoren erhält man gemäß der Produkt-Regel zwei Summanden, indem man einmal den ersten Faktor differenziert und den zweiten konstant hält, und zum zweiten den zweiten Faktor differenziert und den ersten festhält. Dann formt man unter Berücksichtigung des Vektor-Charakters des Nabla-Operators die Ausdrücke so um, dass die konstant gehaltenen Faktoren links, die zu differenzierenden rechts vom Nabla-Operator stehen. Man findet

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(\Phi\Psi) &= \Phi\operatorname{grad}\Psi + \Psi\operatorname{grad}\Phi && \text{(B.27)}\\
\operatorname{div}(\Phi\mathbf{a}) &= \Phi\operatorname{div}\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\operatorname{grad}\Phi && \text{(B.28)}\\
\operatorname{rot}(\Phi\mathbf{a}) &= \Phi\operatorname{rot}\mathbf{a} + (\operatorname{grad}\Phi)\times\mathbf{a} && \text{(B.29)}\\
\operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= \mathbf{b}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{b} && \text{(B.30)}\\
\operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a} + (\mathbf{b}\operatorname{grad})\mathbf{a} - (\mathbf{a}\operatorname{grad})\mathbf{b} && \text{(B.31)}\\
\operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) &= \mathbf{a}\times\operatorname{rot}\mathbf{b} + \mathbf{b}\times\operatorname{rot}\mathbf{a} + (\mathbf{b}\operatorname{grad})\mathbf{a} + (\mathbf{a}\operatorname{grad})\mathbf{b} && \text{(B.32)}\\
\triangle(\Phi\Psi) &= \Phi\triangle\Psi + \Psi\triangle\Phi + 2(\operatorname{grad}\Phi)\cdot(\operatorname{grad}\Psi). && \text{(B.33)}
\end{aligned}$$

B.c Spezielle Ausdrücke

Man bestimme für $r = |\mathbf{r}|$ und für konstanten Vektor **c**

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} r^2 &= && \text{(B.34)}\\
\operatorname{div}\mathbf{r} &= && \text{(B.35)}\\
\operatorname{rot}\mathbf{r} &= && \text{(B.36)}\\
\operatorname{grad}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}) &= && \text{(B.37)}\\
(\mathbf{c}\operatorname{grad})\mathbf{r} &= && \text{(B.38)}\\
\operatorname{grad} f(r) &= && \text{(B.39)}\\
\operatorname{div}(\mathbf{c}\times\mathbf{r}) &= && \text{(B.40)}\\
\operatorname{rot}(\mathbf{c}\times\mathbf{r}) &= && \text{(B.41)}\\
\operatorname{grad}\frac{1}{r} &= && \text{(B.42)}\\
\operatorname{div}\frac{\mathbf{c}}{r} &= && \text{(B.43)}\\
\operatorname{rot}\frac{\mathbf{c}}{r} &= && \text{(B.44)}\\
\operatorname{div}\frac{\mathbf{r}}{r^3} &= && \text{(B.45)}\\
\operatorname{rot}\frac{\mathbf{r}}{r^3} &= && \text{(B.46)}\\
\operatorname{grad}\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}}{r^3} &= && \text{(B.47)}\\
\operatorname{div}\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{r}}{r^3} &= && \text{(B.48)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{r}}{r^3} &= \qquad (B.49)\\ \mathrm{grad}\,\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{c}|} &= \quad , \qquad (B.50)\end{aligned}$$

wobei singuläre Punkte auszunehmen seien.

B.d Integral-Sätze

B.d.α Linien-Integrale

Für ein skalares oder vektorielles Feld $A(\mathbf{r})$ gilt

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (d\mathbf{r}\nabla)A(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}_2) - A(\mathbf{r}_1), \qquad (B.51)$$

das heißt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r}\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}) &= \Phi(\mathbf{r}_2) - \Phi(\mathbf{r}_1), \qquad (B.52)\\ \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (d\mathbf{r}\,\mathrm{grad}\,)\mathbf{a}(\mathbf{r}) &= \mathbf{a}(\mathbf{r}_2) - \mathbf{a}(\mathbf{r}_1). \qquad (B.53)\end{aligned}$$

B.d.β Flächen-Integrale

Nach Stokes lässt sich ein Flächenintegral über die Fläche F der Form

$$\int_F (d\mathbf{f}\times\nabla)A(\mathbf{r}) = \oint_{\partial F} d\mathbf{r}A(\mathbf{r}) \qquad (B.54)$$

in ein Linienintegral über den Rand ∂F umformen, wobei das Linienintegral im Rechtschraubensinn zur Richtung von $d\mathbf{f}$ zu führen ist (Korkenzieherregel). Insbesondere folgt

$$\begin{aligned}\int_F d\mathbf{f}\times\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}) &= \oint_{\partial F} d\mathbf{r}\Phi(\mathbf{r}), \qquad (B.55)\\ \int_F d\mathbf{f}\cdot\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) &= \oint_{\partial F} d\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{r}). \qquad (B.56)\end{aligned}$$

B.d.γ Volumen-Integrale

Nach Gauß lässt sich ein Volumenintegral der Form

$$\int_V d^3r\nabla A(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}A(\mathbf{r}) \qquad (B.57)$$

in ein Integral über die Oberfläche ∂V umformen. Dabei weist $d\mathbf{f}$ nach außen. Insbesondere folgt

$$\begin{aligned}\int_V d^3r\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}) &= \int_{\partial V} d\mathbf{f}\Phi(\mathbf{r}), \qquad (B.58)\\ \int_V d^3r\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) &= \int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{r}), \qquad (B.59)\\ \int_V d^3r\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) &= \int_{\partial V} d\mathbf{f}\times\mathbf{a}(\mathbf{r}). \qquad (B.60)\end{aligned}$$

B.d.δ Volumen-Integrale über Produkte

Setzt man für $\Phi(\mathbf{r})$ oder $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in den Gleichungen (B.58-B.60) Produkte ein und verwendet die Gleichungen (B.27-B.30), so erhält man

$$\int_V d^3r\Phi(\mathbf{r})\,\mathrm{grad}\,\Psi(\mathbf{r}) + \int_V d^3r\Psi(\mathbf{r})\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\Phi(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}), \qquad (B.61)$$

$$\int_V d^3r\Phi(\mathbf{r})\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) + \int_V d^3r\mathbf{a}(\mathbf{r})\cdot\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}), \tag{B.62}$$

$$\int_V d^3r\Phi(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) + \int_V d^3r(\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}))\times\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\times\mathbf{a}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}), \tag{B.63}$$

$$\int_V d^3r\mathbf{b}(\mathbf{r})\cdot\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) - \int_V d^3r\mathbf{a}(\mathbf{r})\cdot\,\mathrm{rot}\,\mathbf{b}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot(\mathbf{a}(\mathbf{r})\times\mathbf{b}(\mathbf{r})). \tag{B.64}$$

Diese Gleichungen erlauben die Umformung eines Volumen-Integrals in ein anderes Volumen-Integral und ein Oberflächen-Integral. Dies ist die Übertragung der partiellen Integration von einer auf drei Dimensionen. In vielen Fällen verschwindet das Oberflächenintegral im Limes eines unendlichen Volumens, so dass die Gleichungen (B.61-B.64) die Umformung eines Volumenintegrals in ein anderes erlauben.

Ersetzt man $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in (B.62) durch $\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r})$ oder $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ in (B.64) durch $\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})$, so folgt wegen (B.22) und (B.23)

$$\int_V d^3r\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})\cdot\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot(\mathbf{a}(\mathbf{r})\times\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot(\Phi(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r})). \tag{B.65}$$

Ähnlich erhält man aus (B.63)

$$\int_V d^3r\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})\times\,\mathrm{grad}\,\Psi(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\times(\,\mathrm{grad}\,\Psi(\mathbf{r}))\Phi(\mathbf{r}) = -\int_{\partial V} d\mathbf{f}\times(\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}))\Psi(\mathbf{r}). \tag{B.66}$$

Ersetzt man $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in (B.59) durch $\Phi\,\mathrm{grad}\,\Psi - \Psi\,\mathrm{grad}\,\Phi$, so folgt der Greensche Satz

$$\int_V d^3r(\Phi(\mathbf{r})\triangle\Psi(\mathbf{r}) - \Psi(\mathbf{r})\triangle\Phi(\mathbf{r})) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot(\Phi(\mathbf{r})\,\mathrm{grad}\,\Psi(\mathbf{r}) - \Psi(\mathbf{r})\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})). \tag{B.67}$$

B.e Der Laplace-Operator von $1/r$ und Verwandtes

B.e.α Der Laplace-Operator von $1/r$

Für $r \neq 0$ findet man $\triangle(1/r) = 0$. Wertet man das Integral über eine Kugel vom Radius R unter Verwendung von (B.59) aus,

$$\int \triangle(\frac{1}{r})d^3r = \int d\mathbf{f}\cdot\,\mathrm{grad}\,(\frac{1}{r}) = -\int \mathbf{r}rd\Omega\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -4\pi \tag{B.68}$$

mit dem Raumwinkelelement $d\Omega$, so erhält man -4π. Man schreibt daher

$$\triangle(\frac{1}{r}) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}), \tag{B.69}$$

wobei Diracs Delta-"Funktion" $\delta^3(\mathbf{r})$ (eigentlich eine Distribution) die Eigenschaft

$$\int_V d^3rf(\mathbf{r})\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \begin{cases} f(\mathbf{r}_0) & \text{falls } \mathbf{r}_0\in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{B.70}$$

hat. Aus

$$\triangle\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \mathbf{c}\triangle\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\mathbf{c}\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

folgt mit (B.26,B.43,B.44)

$$4\pi\mathbf{c}\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \mathrm{grad}\,\frac{\mathbf{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \mathrm{rot}\,\frac{\mathbf{c}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{B.71}$$

Man bestimme die δ-Funktions-Anteile in (B.45) bis (B.49). Welche Dimension hat $\delta^3(\mathbf{r})$?

B.e.β Darstellung eines Vektorfeldes als Summe eines rotationsfreien und eines divergenzfreien Feldes

Wir schreiben das Vektorfeld $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ als

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int d^3r' \mathbf{a}(\mathbf{r}')\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{B.72}$$

und erhalten aus (B.71), da $\mathbf{a}(\mathbf{r}')$ nicht von $\mathbf{r}$ abhängt,

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \,\mathrm{grad}\, \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \,\mathrm{rot}\, \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \tag{B.73}$$

was sich als

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = -\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}) + \mathrm{rot}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}) \tag{B.74}$$

mit

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3r' \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{B.75}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{B.76}$$

schreiben lässt. Falls die Integrale (B.75) und (B.76) existieren, erhält man auf diese Weise eine Darstellung von $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ als Summe des rotationsfreien Feld $-\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})$ und des divergenzfreien Feldes $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Mit (B.48) folgt

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0. \tag{B.77}$$

C Kugelflächenfunktionen

C.a Eigenwert-Problem und Separation der Variablen

Gesucht sind die Eigenfunktionen Y

$$\Delta_\Omega Y(\theta,\phi) = \lambda Y(\theta,\phi) \tag{C.1}$$

mit

$$\Delta_\Omega = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}. \tag{C.2}$$

Man führt den Separations-Ansatz ein

$$Y = g(\cos\theta)h(\phi) \tag{C.3}$$

Mit

$$\xi = \cos\theta, \quad \frac{dg}{d\theta} = -\sin\theta\frac{dg}{d\cos\theta} = -\sqrt{1-\xi^2}\frac{dg}{d\xi} \tag{C.4}$$

folgt durch Einsetzen in die Eigenwertgleichung und Division durch $h(\phi)$

$$\frac{d}{d\xi}((1-\xi^2)\frac{dg}{d\xi}) + \frac{g(\xi)}{1-\xi^2}(\frac{d^2h(\phi)}{d\phi^2}/h(\phi)) = \lambda g(\xi). \tag{C.5}$$

Die Gleichung lässt sich nur erfüllen, wenn $d^2h(\phi)/d\phi^2/h(\phi)$ konstant ist. Da außerdem $h(\phi+2\pi) = h(\phi)$ sein soll, folgt

$$h(\phi) = e^{im\phi} \text{ mit ganzem } m. \tag{C.6}$$

Damit reduziert sich die Differentialgleichung für g auf

$$\frac{d}{d\xi}((1-\xi^2)\frac{dg}{d\xi}) - \frac{m^2 g(\xi)}{1-\xi^2} = \lambda g(\xi). \tag{C.7}$$

C.b Zugeordnete Legendre-Polynome

Beachtet man, dass (wenigstens für positives m) der Faktor $e^{im\phi}$ von der analytischen Funktion $(x+iy)^m = r^m(\sin\theta)^m e^{im\phi}$ herrührt, so liegt es nahe, einen Faktor $(sin\theta)^m$ aus g herauszuziehen,

$$g(\xi) = (\sin\theta)^m G(\xi) = (1-\xi^2)^{m/2}G(\xi), \tag{C.8}$$

woraus dann für G die Gleichung

$$-m(m+1)G(\xi) - 2(m+1)\xi G'(\xi) + (1-\xi^2)G'' = \lambda G(\xi) \tag{C.9}$$

folgt.

Für die Funktion G können wir eine Taylor-Entwicklung ansetzen

$$G(\xi) = \sum_k a_k\xi^k, \quad G'(\xi) = \sum_k k a_k \xi^{k-1}, \quad G''(\xi) = \sum_k k(k-1)a_k\xi^{k-2} \tag{C.10}$$

und finden durch Koeffizienten-Vergleich

$$[m(m+1) + 2(m+1)k + k(k-1) + \lambda]a_k = (k+2)(k+1)a_{k+2}. \tag{C.11}$$

Setzen wir

$$\lambda = -l(l+1), \tag{C.12}$$

so lautet die Rekursionsformel

$$\frac{a_{k+2}}{a_k} = \frac{(m+k+l+1)(m+k-l)}{(k+1)(k+2)}. \tag{C.13}$$

Die Reihenentwicklung bricht bei einem endlichen k ab, wenn der Zähler verschwindet, also insbesondere für ganzes nicht negatives $k = l - m$. Diesen Fall wollen wir weiter untersuchen. Ohne nähere Betrachtung sei erwähnt, dass in den anderen Fällen die Funktion Y ein nichtanalytisches Verhalten für $\cos\theta = \pm 1$ entwickelt.

Der führende Term hat dann den Koeffizienten a_{l-m}. Durch Anwendung der Rekursionsformel findet man

$$\begin{aligned} a_{l-m-2} &= -\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l-1)2} a_{l-m} \\ &= -\frac{(l-m)(l-m-1)l}{(2l-1)2l} a_{l-m}, \end{aligned} \tag{C.14}$$

$$\begin{aligned} a_{l-m-4} &= \frac{(l-m)(l-m-1)(l-m-2)(l-m-3)}{(2l-1)(2l-3)2\cdot 4} a_{l-m} \\ &= \frac{(l-m)(l-m-1)(l-m-2)(l-m-3)l(l-1)}{(2l-1)(2l-3)2l(2l-2)2} a_{l-m}, \end{aligned} \tag{C.15}$$

$$a_{l-m-2k} = (-)^k \frac{(l-m)!l!(2l-2k)!}{(l-m-2k)!(l-k)!(2l)!k!} a_{l-m}. \tag{C.16}$$

Üblicherweise wählt man

$$a_{l-m} = \frac{(-)^m (2l)!}{(l-m)!2^l l!}. \tag{C.17}$$

Dann folgt

$$G(\xi) = \frac{(-)^m}{2^l l!} \sum_k \frac{(2l-2k)!}{(l-m-2k)!} \frac{l!}{k!(l-k)!} (-)^k \xi^{l-m-2k} \tag{C.18}$$

$$= \frac{(-)^m}{2^l l!} \sum_k \binom{l}{k} (-)^k \frac{d^{l+m}\xi^{2l-2k}}{d\xi^{l+m}} = \frac{(-)^m}{2^l l!} \frac{d^{l+m}(\xi^2-1)^l}{d\xi^{l+m}}. \tag{C.19}$$

Man bezeichnet dann die Lösungen $g(\xi)$ in der Form

$$P_l^m(\xi) = (1-\xi^2)^{m/2} \frac{(-)^m}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}} (\xi^2-1)^l \tag{C.20}$$

als zugeordnete Legendre-Polynome. Bis auf Normierung ist $Y_{lm}(\theta,\phi)$ durch $P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$ gegeben.

Die Differentialgleichung für g hängt nur von m^2 ab, aber nicht vom Vorzeichen von m. Wir vergleichen daher P_l^m und P_l^{-m}. Es sei $m \geq 0$, dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{d^{l-m}}{d\xi^{l-m}}(\xi^2-1)^l &= \sum_{k=0}^{l-m} \binom{l-m}{k} \frac{d^k(\xi-1)^l}{d\xi^k} \frac{d^{l-m-k}(\xi+1)^l}{d\xi^{l-m-k}} \\ &= \sum_{k=0}^{l-m} \frac{(l-m)!l!l!}{k!(l-m-k)!(l-k)!(m+k)!} (\xi-1)^{l-k}(\xi+1)^{m+k}, \end{aligned} \tag{C.21}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}}(\xi^2-1)^l &= \sum_{k=0}^{l-m} \binom{l+m}{k+m} \frac{d^{m+k}(\xi-1)^l}{d\xi^{m+k}} \frac{d^{l-k}(\xi+1)^l}{d\xi^{l-k}} \\ &= \sum_{k=0}^{l-m} \frac{(l+m)!l!l!}{(m+k)!(l-k)!(l-m-k)!k!} (\xi-1)^{l-k-m}(\xi+1)^k. \end{aligned} \tag{C.22}$$

Der Vergleich zeigt

$$P_l^{-m}(\xi) = \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (-)^m P_l^m(\xi), \tag{C.23}$$

das heißt, bis auf die Normierung stimmen die beiden Lösungen überein.

C.c Orthogonalität und Normierung

Wir betrachten das Normierungs-Integral

$$N_{lml'm'} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} d\cos\theta P_l^m(\cos\theta)e^{-im\phi} P_{l'}^{m'}(\cos\theta)e^{im'\phi} \tag{C.24}$$

Die Integration über ϕ ergibt

$$\begin{aligned} N_{lml'm'} &= 2\pi\delta_{mm'} \int_{-1}^{+1} P_l^m(\xi)P_{l'}^m(\xi)d\xi \\ &= 2\pi\delta_{mm'}(-)^m \frac{(l'+m)!}{(l'-m)!} \int_{-1}^{+1} P_l^m(\xi)P_{l'}^{-m}(\xi)d\xi \\ &= \frac{2\pi(l'+m)!}{(l'-m)!} \frac{\delta_{mm'}}{2^{2l}l!^2} I_m^{ll'} \end{aligned} \tag{C.25}$$

mit

$$I_m^{ll'} = (-)^m \int_{-1}^{+1} \frac{d^{l+m}(\xi^2-1)^l}{d\xi^{l+m}} \frac{d^{l'-m-1}(\xi^2-1)^{l'}}{d\xi^{l'-m}} d\xi. \tag{C.26}$$

Durch partielle Integration findet man

$$I_m^{ll'} = (-)^m \left[\frac{d^{l+m}(\xi^2-1)^l}{d\xi^{l+m}} \frac{d^{l'-m-1}(\xi^2-1)^{l'}}{d\xi^{l'-m-1}} \right]_{-1}^{+1} + I_{m+1}^{ll'} \tag{C.27}$$

Der erste Faktor in eckigen Klammern enthält mindestens $-m$, der zweite $m+1$ Nullstellen bei $\xi = \pm 1$. Die eckige Klammer verschwindet demnach. Das heißt $I_m^{ll'}$ ist unabhängig von m für $-l \le m \le l'$. Für $l' > l$ folgt $I_m^{ll'} = I_{l'}^{ll'} = 0$, da der erste Faktor des Integranden von $I_{l'}^{ll'}$ verschwindet. Für $l' < l$ folgt $I_m^{ll'} = I_{-l}^{ll'} = 0$, da der zweite Faktor des Integranden von $I_{-l}^{ll'}$ verschwindet. Für $l = l'$ werten wir aus

$$I_m^{ll} = I_l^{ll} = (-)^l \int_{-1}^{+1} \frac{d^{2l}(\xi^2-1)^l}{d\xi^{2l}} (\xi^2-1)^l d\xi. \tag{C.28}$$

Der erste Faktor im Integranden ist die Konstante $(2l)!$

$$I_m^{ll} = (2l)! \int_{-1}^{+1} (1-\xi^2)^l d\xi. \tag{C.29}$$

Das letztere Integral ergibt $2^{2l+1}l!^2/(2l+1)!$ (man findet das, in dem man den Integranden $(1+\xi)^l(1-\xi)^l$ schreibt und l mal partiell integriert, in dem man jeweils die Potenz von $1-\xi$ differenziert und die von $1+\xi$ integriert. Das ergibt das Normierungsintegral

$$N_{lml'm'} = 2\pi \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \delta_{m,m'} \tag{C.30}$$

erhalten. Damit ergeben sich die orthonormierten Kugelflächenfunktionen

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}. \tag{C.31}$$

C.d Bemerkung zur Vollständigkeit

Entwickeln wir eine in den drei Koordinaten in der Umgebung des Ursprungs analytische Funktion f in eine Taylor-Reihe

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{ijk} a_{ijk} x^i y^j z^k = \sum_n r^n f_n(\theta,\phi), \tag{C.32}$$

so sind die Beiträge proportional zu r^n in denen mit $i + j + k = n$ enthalten. Dies sind insgesamt $(n+1) + n + (n-1) + ... = (n+2)(n+1)/2$ Terme

$$f_n(\theta, \phi) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} a_{n-j-k,j,k} (\frac{x}{r})^{n-j-k} (\frac{y}{r})^j (\frac{z}{r})^k. \tag{C.33}$$

Andererseits können wir die Funktion f_n auch durch die Funktionen $Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{...} P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi}$, darstellen, da sich diese als $(\sin\theta)^{|m|} e^{im\phi} = ((x \pm iy)/r)^m$ multipliziert mit einem Polynom in $\cos\theta$ der Ordnung $l - |m|$ schreiben lassen. Dabei können die auftretenden Potenzen $(\cos\theta)^{l-m-2k} = (z/r)^{l-m-2k}((x^2 + y^2 + z^2)/r^2)^k$ geschreiben werden. Zusätzlich führen wir noch einen Faktor $((x^2 + y^2 + z^2)/r^2)^{(n-l)/2}$ ein. Dann erhalten wir Beiträge für $l = n, n-2, n-4, ...$ Da m jeweils von $-l$ bis l läuft, ergibt das insgesamt $(2n+1) + (2n-3) + (2n-7) + ... = (n+2)(n+1)/2$ linear unabhängige (weil orthogonale) Beiträge. Der Raum dieser Funktionen hat daher die gleiche Dimension wie die der f_n. Wir können daher jede Funktion f_n durch eine Linearkombination von Kugelflächenfunktionen ausdrücken.