B Elektrostatik

3 Elektrisches Feld, Potential, Energie des Feldes

3.a Statik

In der Statik behandelt man das zeitunabhängige Problem. Das heißt die auftretenden Größen hängen nur vom Ort ab, $\rho = \rho(\mathbf{r})$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$. Dann zerfallen die Kontinuitätsgleichung (1.12) und die Maxwell-Gleichungen (1.13-1.16) in zwei Gruppen

$$\begin{array}{cc} \operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 & \\ \operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}) & \operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}) \\ \operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 & \operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \\ \text{Magnetostatik} & \text{Elektrostatik} \\ \mathbf{k}_{\mathrm{ma}} = \frac{1}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) & \mathbf{k}_{\mathrm{el}} = \rho(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{array} \tag{3.1}$$

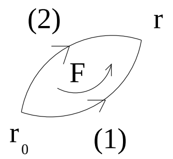
Die erste Gruppe von Gleichungen enthält nur die magnetische Induktion $\mathbf{B}$ und die Stromdichte $\mathbf{j}$. Sie beschreibt die Magnetostatik. Die zweite Gruppe von Gleichungen enthält nur das elektrische Feld $\mathbf{E}$ und die Ladungsdichte ρ. Sie ist Grundlage der Elektrostatik. In der letzten Zeile sind noch die entsprechenden Anteile der Kraftdichte $\mathbf{k}$ hinzugefügt.

3.b Elektrisches Feld und Potential

3.b.α Elektrisches Potential

Wir führen nun das elektrische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ ein. Hierzu betrachten wir das Wegintegral von $\mathbf{E}$ auf zwei verschieden Wegen (1) und (2) von $\mathbf{r}_0$ nach $\mathbf{r}$

$$\int_{\substack{\mathbf{r}_0\\(1)}}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\substack{\mathbf{r}_0\\(2)}}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \oint d\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}), \tag{3.2}$$



wobei das letztere Integral über den geschlossenen Weg von $\mathbf{r}_0$ auf (1) nach $\mathbf{r}$ und von dort in entgegengesetzter Richtung auf (2) nach $\mathbf{r}_0$ zu erstrecken ist. Das letztere Integral lässt sich mit dem Stokesschen Satz (B.56) in das Integral über die von (1) und (2) berandete Fläche $\int d\mathbf{f}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r})$ überführen, das wegen der Maxwellgleichung $\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ (3.1) verschwindet. Daher ist das Integral (3.2) vom Weg unabhängig und man definiert das elektrische Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \Phi(\mathbf{r}_0) \tag{3.3}$$

Dabei sind $\mathbf{r}_0$ und $\Phi(\mathbf{r}_0)$ willkürlich, aber fest. $\Phi(\mathbf{r})$ ist daher bis auf eine willkürliche Konstante bestimmt. Wir haben auf Grund der Definition (3.3)

$$d\Phi(\mathbf{r}) = -d\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}). \tag{3.4}$$

3.b.β Elektrischer Fluss und Ladung

Aus $\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r})$, (3.1) folgt

$$\int_V d^3r \operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\int_V d^3r\,\rho(\mathbf{r}) \tag{3.5}$$

und damit mit dem Gaußschen Satz (B.59)

$$\int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi q(V), \tag{3.6}$$

das heißt der elektrische Fluß des Feldes $\mathbf{E}$ durch die Oberfläche ist das 4π-fache der Ladung q im Volumen V.

Eine einfache Anwendung hat dies für das elektrische Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$ mit $r = |\mathbf{r}|$. Aus Symmetriegründen weist das elektrische Feld in Normalenrichtung $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{r}/r$

$$4\pi r^2 E(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' d\Omega = (4\pi)^2 \int_0^r \rho(r')r'^2 dr', \tag{3.7}$$

so dass man für das Feld

$$E(r) = \frac{4\pi}{r^2} \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' \tag{3.8}$$

erhält.

Als Spezialfall betrachten wir jetzt noch eine Punktladung q im Ursprung. Dann gilt

$$4\pi r^2 E(r) = 4\pi q, \quad E(r) = \frac{q}{r^2}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3} q. \tag{3.9}$$

Das Potential hängt aus Symmetriegründen nur von r ab. Dann gilt

$$\operatorname{grad} \Phi(r) = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr} = -\mathbf{E}(\mathbf{r}), \tag{3.10}$$

woraus durch Integration

$$\Phi(r) = \frac{q}{r} + \text{const.} \tag{3.11}$$

folgt.

3.b.γ Potential einer Ladungsverteilung

Wir gehen aus von Punktladungen q_i an Orten $\mathbf{r}_i$. Das zugehörige Potential und die Feldstärke erhält man aus (3.11) und (3.10) zu

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \tag{3.12}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}. \tag{3.13}$$

Wir gehen nun von den Punktladungen zu einer Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ über. Wir führen dabei den Übergang $\sum_i q_i f(\mathbf{r}_i) = \sum_i \Delta V \rho(\mathbf{r}_i) f(\mathbf{r}_i)$ nach $\int d^3r' \rho(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}')$ durch, was

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{3.14}$$

ergibt. Aus $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi$ und $\operatorname{div} E = 4\pi\rho$ folgt die Poisson-Gleichung

$$\triangle \Phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}). \tag{3.15}$$

Man unterscheide $\triangle = \nabla \cdot \nabla$ und $\Delta = Delta$. Wir machen auf (3.15) die Probe. Zunächst bilden wir

$$\nabla \Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} = \int d^3a\, \rho(\mathbf{r} + \mathbf{a}) \frac{\mathbf{a}}{a^3} \tag{3.16}$$

und

$$\triangle \Phi(\mathbf{r}) = \int d^3a (\nabla \rho(\mathbf{r} + \mathbf{a})) \cdot \frac{\mathbf{a}}{a^3} = \int_0^\infty da \int d\Omega_a \frac{\partial \rho(\mathbf{r} + \mathbf{a})}{\partial a} = \int d\Omega_a (\rho(\mathbf{r} + \infty \mathbf{e}_a) - \rho(\mathbf{r})) = -4\pi\rho(\mathbf{r}), \tag{3.17}$$

wenn ρ im Unendlichen verschwindet.

Aus der Poisson-Gleichung folgt

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r'\rho(\mathbf{r}')\triangle\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\rho(\mathbf{r}) = -4\pi\int d^3r'\rho(\mathbf{r}')\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{3.18}$$

und aus der Gleichheit der Integranden

$$\triangle\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{3.19}$$

3.c Coulombkraft und Feldenergie

Auf die Ladung q_i am Ort $\mathbf{r}_i$ wirkt die Kraft

$$\mathbf{K}_i = q_i\mathbf{E}_i(\mathbf{r}_i). \tag{3.20}$$

Dabei ist $\mathbf{E}_i$ das elektrische Feld ohne das von der Ladung q_i selbst erzeugte. Damit folgt

$$\mathbf{K}_i = q_i\sum_{j\neq i}\frac{q_j(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|^3}. \tag{3.21}$$

Aus dieser Formel erkennt man auch die Definition der Ladungseinheit im Gaußschen Maßsystem: 1 $\mathrm{dyn}^{1/2}$ cm ist die Ladung, die auf eine gleiche Ladung in 1 cm Entfernung die Kraft 1 dyn ausübt.

Die potentielle Energie ist

$$U = \frac{1}{2}\sum_i\sum_{j\neq i}\frac{q_iq_j}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2}\sum_i q_i\Phi_i(\mathbf{r}_i). \tag{3.22}$$

Dabei ist in Φ_i ebenfalls der von q_i herrührende Beitrag zum Potential nicht enthalten. Die Kraft folgt daraus wie üblich zu

$$\mathbf{K}_i = -\operatorname{grad}_{\mathbf{r}_i}U. \tag{3.23}$$

Im Kontinuum erhält man

$$U = \frac{1}{2}\int d^3r\rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi}\int_F d\mathbf{f}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) - \frac{1}{8\pi}\int d^3r\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}), \tag{3.24}$$

wobei jetzt der Beitrag der Ladungsdichte zu Φ am gleichen Ort nicht mehr auszunehmen ist. F schließe alle Ladungen ein und sei etwa eine Kugel vom Radius R. Im Limes $R\to\infty$ geht $\Phi\propto 1/R$, $E\propto 1/R^2$, $\int_F\propto 1/R\to 0$. Man erhält dann die elektrostatische Energie

$$U = \frac{1}{8\pi}\int d^3rE^2(\mathbf{r}) = \int d^3r\,u(\mathbf{r}) \tag{3.25}$$

mit der Energiedichte

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi}E^2(\mathbf{r}). \tag{3.26}$$

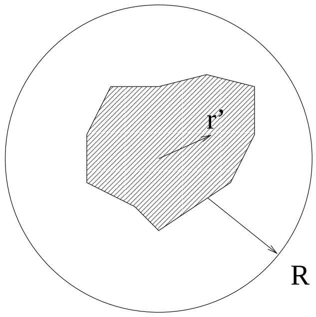
Als Beispiel betrachten wir den "klassischen Elektronenradius" R_0: Man nimmt an, die Ladung sei auf einer Kugelschale vom Radius R_0 gleichmäßig verteilt. Die elektrische Feldenergie stimme mit der Energie $\mathrm{m}_0\mathrm{c}^2$ überein, wobei m_0 die Elektronenmasse ist.

$$\frac{1}{8\pi}\int_{\mathrm{R}_0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e}_0}{r^2}\right)^2r^2drd\Omega = \frac{\mathrm{e}_0^2}{2\mathrm{R}_0} = \mathrm{m}_0\mathrm{c}^2 \tag{3.27}$$

ergibt $\mathrm{R}_0 = 1.4\cdot 10^{-13}$ cm. Die Annahme einer homogenen Ladungsverteilung liefert einen etwas anderen Faktor.

4 Elektrischer Dipol und Quadrupol

Gegeben sei eine Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}')$ innerhalb einer Kugel vom Radius R um den Ursprung. Außerhalb sei $\rho(\mathbf{r}) = 0$.



4.a Das Feld für $r > R$

Das Potential der Ladungsverteilung ist

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{4.1}$$

Wir führen nun eine Taylor-Entwicklung nach $\mathbf{r}'$, das heißt nach den drei Variabeln x_1', x_2' und x_3' durch

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-\mathbf{r}'\nabla)^l}{l!}\frac{1}{r} = \frac{1}{r} - (\mathbf{r}'\nabla)\frac{1}{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{r}'\nabla)(\mathbf{r}'\nabla)\frac{1}{r} - ... \tag{4.2}$$

Als erstes müssen wir den Gradienten von $1/r$ berechnen

$$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \text{ da } \nabla f(r) = \frac{\mathbf{r}}{r}f'(r), \tag{4.3}$$

löse (B.39, B.42). Daraus folgt dann

$$(\mathbf{r}'\nabla)\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}}{r^3}. \tag{4.4}$$

Als nächstes berechnen wir (B.47)

$$\nabla\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3}\,\mathrm{grad}\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}) + (\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{\mathbf{c}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \tag{4.5}$$

unter Verwendung von (B.27) und Lösung von (B.37, B.39). Damit erhalten wir die Taylor-Entwicklung

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^2 - r^2r'^2}{2r^5} + ... \tag{4.6}$$

Wir formen zunächst noch $3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^2 - r^2r'^2$ um

$$3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^2 - r^2r'^2 = x'_\alpha x'_\beta(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha,\beta}) = (x'_\alpha x'_\beta - \frac{1}{3}r'^2\delta_{\alpha,\beta})(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha,\beta}) \tag{4.7}$$

wegen $\delta_{\alpha,\beta}(3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha,\beta}r^2) = 3x_\alpha x_\alpha - r^2\delta_{\alpha,\alpha} = 0$. Hier und auch im Folgenden verwenden wir die Summationskonvention: Über alle Indices (von Komponenten), die zweimal in einem Produkt auftreten, wird summiert, in (4.7) also über α und β.

Wir führen nun die Größen

$$q = \int d^3r'\rho(\mathbf{r}') \qquad \text{Ladung} \tag{4.8}$$

$$\mathbf{p} = \int d^3r'\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}') \qquad \text{Dipolmoment} \tag{4.9}$$

$$Q_{\alpha,\beta} = \int d^3r'(x'_\alpha x'_\beta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha,\beta}r'^2)\rho(\mathbf{r}') \qquad \text{Komponenten des Quadrupolmoments} \tag{4.10}$$

ein und erhalten damit die Entwicklung für das Potential und die elektrische Feldstärke

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3} + Q_{\alpha,\beta}\frac{3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha,\beta}}{2r^5} + \mathrm{O}(\frac{1}{r^4}) \tag{4.11}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q\mathbf{r}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{p}r^2}{r^5} + \mathrm{O}(\frac{1}{r^4}) \tag{4.12}$$

4.b Transformationseigenschaften

Die Multipolmomente sind definiert bezüglich eines vorgegebenen Punktes, zum Beispiel des Ursprungs. Verschiebt man den Bezugspunkt um $\mathbf{a}$, das heißt $\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}' - \mathbf{a}$, so findet man mit $\rho_1(\mathbf{r}_1') = \rho(\mathbf{r}')$

$$q_1 = \int d^3r_1' \rho_1(\mathbf{r}_1') = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') = q \tag{4.13}$$

$$\mathbf{p}_1 = \int d^3r_1' \mathbf{r}_1' \rho_1(\mathbf{r}_1') = \int d^3r' (\mathbf{r}' - \mathbf{a}) \rho(\mathbf{r}') = \mathbf{p} - \mathbf{a}q. \tag{4.14}$$

Die Gesamtladung ist unabhängig vom Bezugspunkt. Das Dipolmoment ist unabhängig vom Bezugspunkt, falls $q = 0$ (reiner Dipol), sonst hängt es vom Bezugspunkt ab. Ähnlich findet man, dass das Quadrupolmoment unabhängig vom Bezugspunkt ist, falls $q = 0$ und $\mathbf{p} = 0$ (reiner Quadrupol).

Unter Drehung $x_{1,\alpha}' = D_{\alpha,\beta} x_\beta'$ ist q invariant (Skalar), wobei D eine Drehmatrix sei, also eine orthogonale Transformation beschreibe. Der Dipol $\mathbf{p}$ transformiert sich wie ein Vektor

$$p_{1,\alpha} = \int d^3r' D_{\alpha,\beta} x_\beta' \rho(\mathbf{r}') = D_{\alpha,\beta} p_\beta \tag{4.15}$$

und der Quadrupol Q wie ein Tensor zweiter Stufe

$$Q_{1,\alpha,\beta} = \int d^3r' (D_{\alpha,\gamma} x_\gamma' D_{\beta,\delta} x_\delta' - \frac{1}{3} \delta_{\alpha,\beta} r'^2) \rho(\mathbf{r}'). \tag{4.16}$$

Beachtet man, dass auf Grund der Orthogonalität von D

$$\delta_{\alpha,\beta} = D_{\alpha,\gamma} D_{\beta,\gamma} = D_{\alpha,\gamma} \delta_{\gamma,\delta} D_{\beta,\delta}, \tag{4.17}$$

so folgt

$$Q_{1,\alpha,\beta} = D_{\alpha,\gamma} D_{\beta,\delta} Q_{\gamma,\delta}, \tag{4.18}$$

also das Transformationsgesetz für Tensoren zweiter Stufe.

4.c Dipol

Der Prototyp eines Dipols besteht aus einer Ladung q am Ort $\mathbf{r}_0 + \mathbf{a}$ und einer entgegengesetzten Ladung $-q$ am Ort $\mathbf{r}_0$. Das Dipolmoment beträgt dann

$$\mathbf{p} = q\mathbf{a}. \tag{4.19}$$

Als Ladungsverteilung ergibt sich dann

$$\rho(\mathbf{r}) = q(\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{a}) - \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)). \tag{4.20}$$

Wir führen nun eine Taylorentwicklung nach $\mathbf{a}$ durch

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - q\mathbf{a} \cdot \nabla \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \frac{q}{2} (\mathbf{a} \cdot \nabla)^2 \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + ... - q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \tag{4.21}$$

wobei sich der erste mit dem letzten Term weghebt. Wir führen nun den Limes $\mathbf{a} \to 0$ durch, wobei wir das Produkt $q\mathbf{a} = \mathbf{p}$ festhalten. Dann bleibt als Ladungsverteilung eines Dipols $\mathbf{p}$ am Ort $\mathbf{r}_0$

$$\rho(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \tag{4.22}$$

und das Potential

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\mathbf{p} \cdot \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \operatorname{grad}' \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) = \mathbf{p} \cdot \int d^3r' \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \\ &= \mathbf{p} \cdot \int d^3r' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \end{aligned} \tag{4.23}$$

wobei die Gleichungen (B.61) verwendet und (B.50) gelöst wurden.

4.d Quadrupol

Der Quadrupol wird durch die zweiten Momente der Ladungsverteilung beschrieben.

4.d.α Symmetrien

Q ist ein symmetrischer Tensor

$$Q_{\alpha,\beta} = Q_{\beta,\alpha}. \tag{4.24}$$

Er lässt sich daher ähnlich wie der Trägheitstensor durch eine orthogonale Transformation auf Diagonalform bringen. Weiterhin folgt aus der Definition (4.10)

$$Q_{\alpha,\alpha} = 0, \tag{4.25}$$

das heißt die Spur des Quadrupol-Tensors verschwindet. Daher hat der Tensor nicht sechs, sondern nur fünf unabhängige Komponenten.

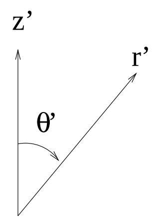
4.d.β Symmetrischer Quadrupol

Ein Spezialfall ist der symmetrische Quadrupol. Seine Ladungsverteilung hängt nur von z und dem Abstand von der z-Achse ab, $\rho = \rho(z, \sqrt{x^2+y^2})$. Für ihn gilt

$$Q_{\rm x,y} = Q_{\rm x,z} = Q_{\rm y,z} = 0, \tag{4.26}$$

weil $\rho(x,y,z) = \rho(-x,y,z) = \rho(x,-y,z)$. Weiter ist

$$Q_{\rm x,x} = Q_{\rm y,y} = -\frac{1}{2}Q_{\rm z,z} =: -\frac{1}{3}Q \tag{4.27}$$



Die erste Gleichung folgt aus $\rho(x,y,z) = \rho(y,x,z)$, die zweite daraus, dass die Spur von Q verschwindet. Das letzte Gleichheitszeichen gibt die Definition von Q an.

Man findet

$$Q = \frac{3}{2}Q_{\rm z,z} = \int d^3r'(\frac{3}{2}z'^2 - \frac{1}{2}r'^2)\rho(\mathbf{r}') = \int d^3r' r'^2 P_2(\cos\theta')\rho(\mathbf{r}') \tag{4.28}$$

mit dem Legendre-Polynom $P_2(\xi) = \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}$. Auf die Legendre-Polynome werden wir im nächsten Abschnitt und im Anhang C noch zurückkommen.

Als Beispiel betrachten wir noch den gestreckten Quadrupol mit zwei Ladungen q an den Orten $\pm a\mathbf{e}_{\rm z}$ und einer Ladung $-2q$ am Ursprung. Wir finden $Q = 2qa^2$. Die einzelnen Ladungen tragen zum Quadrupolpotential

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{3}Q\frac{3x^2-r^2}{2r^5} - \frac{1}{3}Q\frac{3y^2-r^2}{2r^5} + \frac{2}{3}Q\frac{3z^2-r^2}{2r^5} = \frac{QP_2(\cos\theta)}{r^3} \tag{4.29}$$

bei.

4.e Energie, Kraft und Drehmoment eines Multipols im äußeren Feld

Eine Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$, die um den Ursprung lokalisiert sei, sei in einem äußeren elektrischen Potential $\Phi_{\rm a}(\mathbf{r})$, das etwa von einer entfernten Ladungsverteilung $\rho_{\rm a}$ erzeugt sei. Die Wechselwirkungsenergie beträgt dann

$$U = \int d^3r \rho(\mathbf{r})\Phi_{\rm a}(\mathbf{r}). \tag{4.30}$$

Hier tritt kein Faktor 1/2 vor dem Integral auf, wie man es wegen (3.24) annehmen könnte, da zum Integral über $\rho(\mathbf{r})\Phi_{\rm a}(\mathbf{r})$ noch ein zweiter Beitrag mit dem Integral über $\rho_{\rm a}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})$ hinzutritt, der noch einmal den gleichen Beitrag liefert. Wir entwickeln nun das äußere Potential und erhalten für die Wechselwirkungsenergie

$$\begin{aligned} U &= \int d^3r\rho(\mathbf{r}) \left\{ \Phi_\mathrm{a}(0) + \mathbf{r}\nabla\Phi_\mathrm{a}|_{r=0} + \frac{1}{2}x_\alpha x_\beta \; \nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi_\mathrm{a}|_{r=0} + ... \right\} \\ &= q\Phi_\mathrm{a}(0) + \mathbf{p}\cdot\nabla\Phi_\mathrm{a}|_{r=0} + \frac{1}{2}\left(Q_{\alpha,\beta} + \frac{1}{3}\delta_{\alpha,\beta}\int d^3r\rho(\mathbf{r})r^2\right) \nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi_\mathrm{a}|_{r=0} + ... \end{aligned} \tag{4.31}$$

Der Beitrag proportional zum Integral über $\rho(\mathbf{r})r^2$ verschwindet, da $\nabla_\alpha\nabla_\alpha\Phi_\mathrm{a} = \triangle\Phi_\mathrm{a} = -4\pi\rho_\mathrm{a}(\mathbf{r}) = 0$, da sich am Ursprung keine Ladungen befinden, die Φ_a erzeugen. Damit bleibt für das Wechselwirkungs-Potential

$$U = q\Phi_\mathrm{a}(0) - \mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_\mathrm{a}(0) + \frac{1}{2}Q_{\alpha,\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi_\mathrm{a} + ... \tag{4.32}$$

Wir können daraus zum Beispiel die potentielle Energie zweier Dipole, $\mathbf{p}_\mathrm{b}$ im Ursprung und $\mathbf{p}_\mathrm{a}$ bei $\mathbf{r}_0$ bestimmen. Der Dipol $\mathbf{p}_\mathrm{a}$ erzeugt das Potential

$$\Phi_\mathrm{a}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}_\mathrm{a}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}. \tag{4.33}$$

Die Wechselwirkungsenergie ergibt sich dann zu (vgl. B.47)

$$U_\mathrm{a,b} = \mathbf{p}_\mathrm{b}\cdot\nabla\Phi_\mathrm{a}|_{r=0} = \frac{\mathbf{p}_\mathrm{a}\cdot\mathbf{p}_\mathrm{b}}{r_0^3} - \frac{3(\mathbf{p}_\mathrm{a}\cdot\mathbf{r}_0)(\mathbf{p}_\mathrm{b}\mathbf{r}_0)}{r_0^5}. \tag{4.34}$$

Die Kraft auf einen Dipol im Ursprung ergibt sich zu

$$\mathbf{K} = \int d^3r\rho(\mathbf{r})\mathbf{E}_\mathrm{a}(\mathbf{r}) = \int d^3r\rho(\mathbf{r})(\mathbf{E}_\mathrm{a}(0) + x_\alpha\nabla_\alpha\mathbf{E}_\mathrm{a}|_{r=0} + ...) = q\mathbf{E}_\mathrm{a}(0) + (\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}\,)\mathbf{E}_\mathrm{a}(0) + ... \tag{4.35}$$

Das Drehmoment eines Dipols im Ursprung ergibt sich zu

$$\mathbf{M}_\mathrm{mech} = \int d^3r'\rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}'\times\mathbf{E}_\mathrm{a}(\mathbf{r}') = \mathbf{p}\times\mathbf{E}_\mathrm{a}(0) + ... \tag{4.36}$$

5 Multipol-Entwicklung in Kugelkoordinaten

5.a Poisson-Gleichung in Kugelkoordinaten

Wir leiten zunächst den Ausdruck für den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

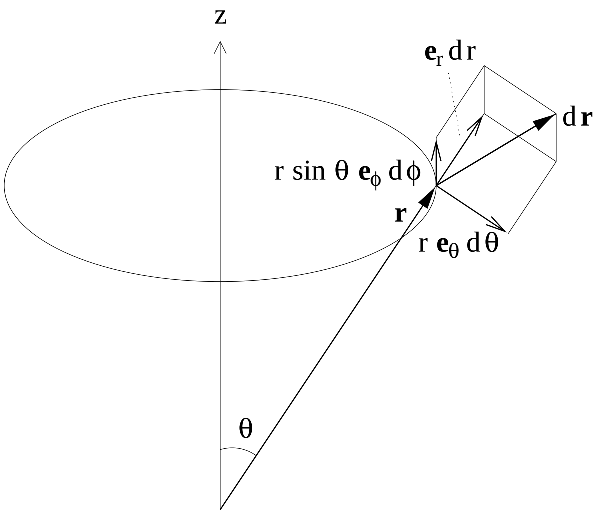
$$x = r\sin\theta\cos\phi \tag{5.1}$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi \tag{5.2}$$
$$z = r\cos\theta \tag{5.3}$$

her. Dabei benützen wir zunächst nur, dass es sich dabei um krummlinige Koordinaten handelt, die sich unter rechtem Winkel schneiden, so dass wir

$$d\mathbf{r} = g_r\mathbf{e}_r dr + g_\theta\mathbf{e}_\theta d\theta + g_\phi\mathbf{e}_\phi d\phi \tag{5.4}$$

schreiben können, wobei die $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ und $\mathbf{e}_\phi$ eine orthonormierte ortsabhängige Basis bilden. Man findet leicht, dass

$$g_r = 1, \quad g_\theta = r, \quad g_\phi = r\sin\theta. \tag{5.5}$$



5.a.α Der Gradient

Zur Berechnung des Gradienten betrachten wir das Differential einer Funktion $\Phi(\mathbf{r})$

$$d\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\partial\Phi}{\partial r}dr + \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\Phi}{\partial\phi}d\phi, \tag{5.6}$$

die mit $(\operatorname{grad}\Phi)\cdot d\mathbf{r}$ übereinstimmen muss. Aus der Entwicklung des Vektorfeldes in seine Komponenten

$$\operatorname{grad}\Phi = (\operatorname{grad}\Phi)_r\mathbf{e}_r + (\operatorname{grad}\Phi)_\theta\mathbf{e}_\theta + (\operatorname{grad}\Phi)_\phi\mathbf{e}_\phi \tag{5.7}$$

und (5.4) folgt dann

$$d\Phi(\mathbf{r}) = (\operatorname{grad}\Phi)_r g_r dr + (\operatorname{grad}\Phi)_\theta g_\theta d\theta + (\operatorname{grad}\Phi)_\phi g_\phi d\phi, \tag{5.8}$$

woraus wir

$$(\operatorname{grad}\Phi)_r = \frac{1}{g_r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad (\operatorname{grad}\Phi)_\theta = \frac{1}{g_\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \quad (\operatorname{grad}\Phi)_\phi = \frac{1}{g_\phi}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \tag{5.9}$$

für die Komponenten des Gradienten erhalten.

5.a.β Die Divergenz

Zur Berechnung der Divergenz verwenden wir den Gaußschen Satz (B.59). Wir integrieren die Divergenz von $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ über ein Volumen begrenzt durch die Koordinaten $r, r+dr$, $\theta, \theta+d\theta$, $\phi, \phi+d\phi$. Wir erhalten

$$\int d^3r \operatorname{div}\mathbf{A} = g_r g_\theta g_\phi \operatorname{div}\mathbf{A}\, dr d\theta d\phi \tag{5.10}$$

$$= \int \mathbf{A}\cdot d\mathbf{f} = g_\theta d\theta g_\phi d\phi A_r|_r^{r+dr} + g_r dr g_\phi d\phi A_\theta|_\theta^{\theta+d\theta} + g_r dr g_\theta d\theta A_\phi|_\phi^{\phi+d\phi}. \tag{5.11}$$

Nach Division beider Seiten durch das Volumenelement $g_r dr g_\theta d\theta g_\phi d\phi$ folgt

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{g_r g_\theta g_\phi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(g_\theta g_\phi A_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(g_r g_\phi A_\theta) + \frac{\partial}{\partial\phi}(g_r g_\theta A_\phi)\right] \tag{5.12}$$

5.a.γ Der Laplace-Operator

Durch Bildung von $\triangle\Phi =$ div grad Φ erhalten wir schließlich

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{g_r g_\theta g_\phi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{g_\theta g_\phi}{g_r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{g_r g_\phi}{g_\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{g_r g_\theta}{g_\phi}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right)\right]. \tag{5.13}$$

Diese Formel gilt noch generell für orthogonale krummlinige Koordinaten (wenn wir sie mit r, θ, ϕ bezeichnen). Setzen wir nun die Werte für g ein, so folgt für sphärische Koordinaten

$$\triangle\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2}\triangle_\Omega\Phi, \tag{5.14}$$

$$\triangle_\Omega\Phi = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}. \tag{5.15}$$

Der Operator $\triangle_\Omega$ wirkt nur auf die beiden Winkel θ und ϕ, aber nicht auf den Abstand r. Er wird auch Laplace-Operator auf der Kugel genannt.

5.b Kugelflächenfunktionen

Wie wir im Anhang C näher ausführen, gibt es einen vollständigen Satz orthonormierter Funktionen $Y_{l,m}(\theta, \phi)$, $l = 0, 1, 2, ...$, $m = -l, -l+1, ...l$, die der Gleichung

$$\triangle_\Omega Y_{l,m}(\theta, \phi) = -l(l+1)Y_{l,m}(\theta, \phi) \tag{5.16}$$

genügen. Diese heißen Kugelflächenfunktionen. Vollständigkeit heißt: Ist $f(\theta, \phi)$ auf der Kugel differenzierbar und sind die Ableitungen beschränkt, so lässt sich $f(\theta, \phi)$ darstellen als konvergente Summe

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l,m} \hat{f}_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \phi). \tag{5.17}$$

Daher führen wir jetzt die entsprechende Entwicklung für $\Phi(\mathbf{r})$ und $\rho(\mathbf{r})$ durch

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \hat{\Phi}_{l,m}(r) Y_{l,m}(\theta, \phi), \tag{5.18}$$

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \hat{\rho}_{l,m}(r) Y_{l,m}(\theta, \phi). \tag{5.19}$$

Die Kugelflächenfunktionen sind orthonormal, das heißt, das Integral über den Raumwinkel ergibt

$$\int d\phi \sin\theta d\theta Y^*_{l,m}(\theta, \phi) Y_{l',m'}(\theta, \phi) = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'}. \tag{5.20}$$

Diese Orthogonalitätsbeziehung können wir zur Berechnung der $\hat{\Phi}$ und $\hat{\rho}$ verwenden.

$$\begin{aligned} \int d\phi \sin\theta d\theta Y^*_{l,m}(\theta, \phi)\rho(\mathbf{r}) &= \sum_{l',m'} \hat{\rho}_{l',m'}(r) \int d\phi \sin\theta d\theta Y^*_{l,m}(\theta, \phi) Y_{l',m'}(\theta, \phi) \\ = \sum_{l',m'} \hat{\rho}_{l',m'}(r)\delta_{l,l'}\delta_{m,m'} &= \hat{\rho}_{l,m}(r). \end{aligned} \tag{5.21}$$

Wir geben hier einige der Kugelflächenfunktionen an

$$Y_{0,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \tag{5.22}$$

$$Y_{1,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \tag{5.23}$$

$$Y_{1,\pm1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi} \tag{5.24}$$

$$Y_{2,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) \tag{5.25}$$

$$Y_{2,\pm1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi} \tag{5.26}$$

$$Y_{2,\pm2}(\theta,\phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}. \tag{5.27}$$

Allgemein ist

$$Y_{l,m}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{5.28}$$

mit den zugeordneten Legendre-Polynomen

$$P_l^m(\xi) = \frac{(-)^m}{2^l l!}(1-\xi^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}}(\xi^2-1)^l. \tag{5.29}$$

Generell ist $Y_{l,m}$ das Produkt aus $(\sin\theta)^{|m|}e^{im\phi}$ und einem Polynom der Ordnung $l-|m|$ in $\cos\theta$. Je nachdem, ob $l-|m|$ gerade oder ungerade ist, handelt es sich dabei um ein gerades oder ungerades Polynom in $\cos\theta$. Es gilt die Symmetrie-Beziehung

$$Y_{l,-m}(\theta,\phi) = (-)^m Y_{l,m}^*(\theta,\phi). \tag{5.30}$$

5.c Radialgleichung und Multipol-Momente

Unter Verwendung der Entwicklung von Φ und ρ nach den Kugelflächenfunktionen lautet die Poisson-Gleichung nun

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l,m}\left(\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\hat\Phi_{l,m}(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2}\hat\Phi_{l,m}(r)\right)Y_{l,m}(\theta,\phi) = -4\pi\sum_{l,m}\hat\rho_{l,m}(r)Y_{l,m}(\theta,\phi). \tag{5.31}$$

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten von $Y_{l,m}$ erhalten wir die Radialgleichungen

$$\hat\Phi''_{l,m}(r) + \frac{2}{r}\hat\Phi'_{l,m}(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\hat\Phi_{l,m}(r) = -4\pi\hat\rho_{l,m}(r). \tag{5.32}$$

Die Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$\hat\Phi_{l,m}(r) = a_{l,m}r^l + b_{l,m}r^{-l-1}. \tag{5.33}$$

Für die inhomogene Gleichung macht man nun wie üblich den Ansatz (ich lasse im Moment die Indices l und m weg.)

$$\hat\Phi = a(r)r^l + b(r)r^{-l-1}. \tag{5.34}$$

Dann folgt

$$\hat\Phi' = a'(r)r^l + b'(r)r^{-l-1} + la(r)r^{l-1} - (l+1)b(r)r^{-l-2}. \tag{5.35}$$

Wir fordern nun wie üblich

$$a'(r)r^l + b'(r)r^{-l-1} = 0 \tag{5.36}$$

und erhalten dann für die zweite Ableitung

$$\hat\Phi'' = la'(r)r^{l-1} - (l+1)b'(r)r^{-l-2} + l(l-1)a(r)r^{l-2} + (l+1)(l+2)b(r)r^{-l-3}. \tag{5.37}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Radialgleichung ein, so heben sich die Anteile, die a und b ohne Ableitung enthalten, weg. Es bleibt

$$la'(r)r^{l-1} - (l+1)b'(r)r^{-l-2} = -4\pi\hat\rho, \tag{5.38}$$

Aus den Gleichungen (5.36) und (5.38) folgt dann durch Auflösen nach a' und b'

$$\begin{aligned}
\frac{da_{l,m}(r)}{dr} &= -\frac{4\pi}{2l+1} r^{1-l} \hat{\rho}_{l,m}(r), && (5.39)\\
\frac{db_{l,m}(r)}{dr} &= \frac{4\pi}{2l+1} r^{l+2} \hat{\rho}_{l,m}(r). && (5.40)
\end{aligned}$$

Wir integrieren nun die Gleichungen

$$\begin{aligned}
a_{l,m}(r) &= \frac{4\pi}{2l+1} \int_r^\infty dr' r'^{1-l} \hat{\rho}_{l,m}(r') && (5.41)\\
b_{l,m}(r) &= \frac{4\pi}{2l+1} \int_0^r dr' r'^{l+2} \hat{\rho}_{l,m}(r'). && (5.42)
\end{aligned}$$

Addieren wir eine Konstante zu $a_{l,m}(r)$, so ist dies auch eine Lösung der Poisson-Gleichung, da $r^l Y_{l,m}(\theta,\phi)$ homogene Lösung der Poisson-Gleichung ist. Wir wünschen aber eine Lösung, die für großes r abfällt. Daher wählen wir $a_{l,m}(\infty) = 0$. Addieren wir eine Konstante zu $b_{l,m}$, so ist das eine Lösung für $r \neq 0$. Für $r = 0$ hingegen erhält man eine Singularität, die die Poisson-Gleichung nicht erfüllt. Daher muss man $b_{l,m}(0) = 0$ setzen.

Wir können nun die Entwicklungs-Koeffizienten $\hat{\rho}_{l,m}$ einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
a_{l,m}(r) &= \frac{4\pi}{2l+1} \int_{r'>r} d^3r' r'^{-1-l} Y^*_{l,m}(\theta',\phi') \rho(\mathbf{r}') && (5.43)\\
b_{l,m}(r) &= \frac{4\pi}{2l+1} \int_{r'<r} d^3r' r'^{l} Y^*_{l,m}(\theta',\phi') \rho(\mathbf{r}'). && (5.44)
\end{aligned}$$

Wir können nun die Ausdrücke für $a_{l,m}$ und $b_{l,m}$ in (5.18) und (5.34) einsetzen. Die r- und r'-Abhängigkeit ergibt sich für $r < r'$ aus dem a-Term zu r^l / r'^{l+1} und für $r > r'$ aus dem b-Term zu r'^l / r^{l+1}. Dies fasst man zusammen, indem man mit $r_>$ den größeren, mit $r_<$ den kleineren der beiden Radien r und r' bezeichnet. Dann folgt

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} \int d^3r' \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \rho(\mathbf{r}') Y^*_{l,m}(\theta',\phi') Y_{l,m}(\theta,\phi). \tag{5.45}$$

Falls $\rho(\mathbf{r}') = 0$ für $r' > R$, dann folgt für $r > R$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} q_{l,m} \frac{Y_{l,m}(\theta,\phi)}{r^{l+1}} \tag{5.46}$$

mit den Multipolmomenten

$$q_{l,m} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int d^3r' r'^l Y^*_{l,m}(\theta',\phi') \rho(\mathbf{r}'). \tag{5.47}$$

Für $l = 0$ erhalten wir das "Monopolmoment" Ladung, für $l = 1$ haben wir die Komponenten des Dipol-Moments, für $l = 2$ die Komponenten des Quadrupolmoments. Speziell für $m = 0$ hat man

$$\begin{aligned}
q_{0,0} &= \sqrt{4\pi} \int d^3r' \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \rho(\mathbf{r}') = q && (5.48)\\
q_{1,0} &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int d^3r' \sqrt{\frac{3}{4\pi}} r' \cos\theta' \rho(\mathbf{r}') = \int d^3r' z' \rho(\mathbf{r}') = p_z && (5.49)\\
q_{2,0} &= \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \int d^3r' \sqrt{\frac{5}{4\pi}} r'^2 (\frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2}) \rho(\mathbf{r}') = \int d^3r' (\frac{3}{2} z'^2 - \frac{1}{2} r'^2) \rho(\mathbf{r}') = \frac{3}{2} Q_{zz}. && (5.50)
\end{aligned}$$

5.d Punktladung am Ort $\mathbf{r}'$, zylindersymmetrische Ladungsverteilung

Wir betrachten jetzt noch den Fall einer Punktladung q am Ort $\mathbf{r}'$. Wir können ausgehen von dem bekannten Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{q}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\psi}}. \tag{5.51}$$

Dabei ist ψ der Winkel zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$. Wir entwickeln nun nach $r_</r_>$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r_>\sqrt{1+(\frac{r_<}{r_>})^2-2\frac{r_<}{r_>}\cos\psi}} = q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\psi). \tag{5.52}$$

Dabei bezeichnet man $P_l(\xi)$ als Legendre-Polynome. Für $\cos\psi = \pm 1$ sieht man sofort aus der Entwicklung von $1/(r_> \mp r_<)$, dass $P_l(1) = 1$ und $P_l(-1) = (-)^l$ gilt.

Wir können andererseits auch mit (5.45) arbeiten und finden

$$\Phi(\mathbf{r}) = q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{l,m}(\theta,\phi)Y_{l,m}^*(\theta',\phi'). \tag{5.53}$$

Durch Vergleich findet man das Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen

$$P_l(\cos\psi) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{l,m}(\theta,\phi)Y_{l,m}^*(\theta',\phi'), \tag{5.54}$$

wobei sich der Winkel ψ zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ ausdrücken lässt durch $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' = rr'\cos\psi$ und unter Verwendung von (5.1-5.3)

$$\cos\psi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi'). \tag{5.55}$$

Wir betrachten jetzt noch den Spezialfall $\theta' = 0$, das heißt $\psi = \theta$. Dann verschwinden alle $Y_{l,m}(\theta',\phi')$ wegen der Faktoren $\sin\theta'$ außer denen für $m = 0$ und das Additions-Theorem reduziert sich auf

$$P_l(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2l+1}Y_{l,0}(\theta)Y_{l,0}(0) = P_l^0(\cos\theta)P_l^0(1). \tag{5.56}$$

Aus der Darstellung (5.29) $P_l^0(\xi) = 1/(2^l l!)d^l(\xi^2-1)^l/d\xi^l$ folgt für $\xi = 1$ und Zerlegen $(\xi^2-1)^l = (\xi+1)^l(\xi-1)^l$ das Ergebnis $P_l^0(1) = [(\xi+1)^l/2^l]_{\xi=1}[d^l(\xi-1)^l/d\xi^l/l!]_{\xi=1} = 1$. Damit haben wir gefunden, dass

$$P_l^0(\xi) = P_l(\xi) \tag{5.57}$$

gilt.

Speziell für zylindersymmetrische Verteilungen $\rho(\mathbf{r})$, die also nur von r und θ, aber nicht von ϕ abhängen, gilt dann

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_l \frac{P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}}q_{l,0} \tag{5.58}$$

mit

$$q_{l,0} = \int d^3r' r'^l P_l(\cos\theta')\rho(\mathbf{r}'). \tag{5.59}$$

6 Elektrisches Feld in Materie

6.a Polarisation und dielektrische Verschiebung

Die bisher aufgestellten Feldgleichungen gelten auch in Materie. Auf ein äußeres elektrisches Feld reagiert die Materie im allgemeinen durch Polarisation. Die Elektronen verschieben sich gegenüber den Kernen, wodurch Dipole entstehen, oder bereits existierende Dipole von Molekülen oder Molekülgruppen richten sich gegen die thermische Bewegung aus. Ein elektrisches Feld bewirkt also die Verschiebung von Ladungen q_i vom Ort $\mathbf{r}_i$ zum Ort $\mathbf{r}_i+\mathbf{a}_i$, das heißt Dipole $\mathbf{p}_i = q_i\mathbf{a}_i$ werden induziert. Man erhält die Ladungsverteilung oder Polarisationsladungen (4.22)

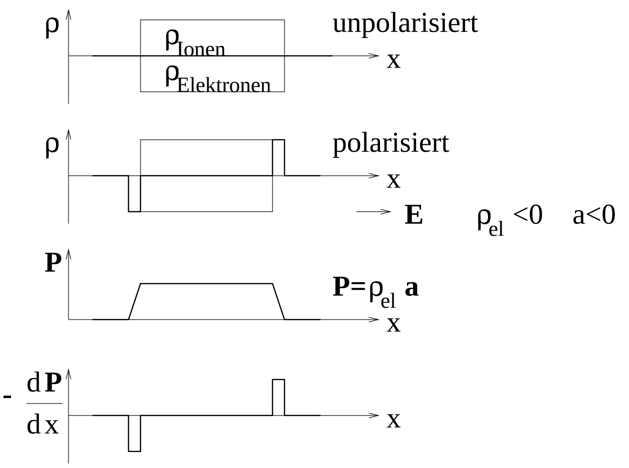
$$\rho_{\mathrm{P}}(\mathbf{r}) = -\sum_i \mathbf{p}_i \operatorname{grad} \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i). \tag{6.1}$$

Führen wir eine Dipolmomentdichte $\mathbf{P}$ ein, die man als Polarisation bezeichnet,

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V}, \tag{6.2}$$

so folgt

$$\rho_{\mathrm{P}}(\mathbf{r}) = -\int d^3r'\mathbf{P}(\mathbf{r}') \operatorname{grad} \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\operatorname{div}\left(\int d^3r'\mathbf{P}(\mathbf{r}')\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right) = -\operatorname{div}\mathbf{P}(\mathbf{r}). \tag{6.3}$$



Wir veranschaulichen diese Gleichung. Wir gehen aus von einem Festkörper, in dem sich (auf einer Skala groß gegen den Atomabstand) die Ladungen der Ionen und Elektronen kompensieren (oberste Figur). Legt man ein Feld $\mathbf{E}$ an, so verschieben sich die Elektronen gegenüber den Ionen (zweite Figur). Im Inneren hat man Ladungskompensation. Nur am Rand bleiben Netto-Ladungen übrig. Im dritten Bild ist die Polarisation $\mathbf{P} = \rho_{\mathrm{el}}\mathbf{a}$ aufgezeichnet, wobei diese am Rand stetig ausgeschmiert wurde. Im letzten Bild ist die Ableitung $-d\mathbf{P}/dx$ aufgetragen. Man sieht, dass das letzte Bild mit dem zweiten übereinstimmt.

Damit setzt sich die Ladungsdichte ρ zusammen aus einer freibeweglichen Ladungsdichte ρ_{f} und der Polarisations-Ladungsdichte ρ_{P} (erstere kann zum Beispiel die Ladungsdichte sein, die auf eine Kondensatorplatte aufgebracht wird)

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}) + \rho_{\mathrm{P}}(\mathbf{r}) = \rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}) - \operatorname{div}\mathbf{P}(\mathbf{r}). \tag{6.4}$$

Damit führt man in der Maxwellgleichung

$$\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}) = 4\pi\rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}) - 4\pi\operatorname{div}\mathbf{P}(\mathbf{r}) \tag{6.5}$$

die dielektrische Verschiebung $\mathbf{D}$ ein

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + 4\pi\mathbf{P}(\mathbf{r}), \tag{6.6}$$

so dass

$$\operatorname{div}\mathbf{D}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}) \tag{6.7}$$

gilt. Für den Fluss der dielektrischen Verschiebung durch die Oberfläche eines Volumens erhält man dann die freibewegliche Ladung $q_{\mathrm{f}}(V)$ in diesem Volumen

$$\int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r}) = 4\pi q_{\mathrm{f}}(V). \tag{6.8}$$

Für viele Substanzen sind bei nicht zu großer Feldstärke **P** und **E** in guter Näherung proportional

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathbf{r}) &= \chi_{\mathrm{e}}\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad \chi_{\mathrm{e}} \text{ elektrische Suszeptibilität} && (6.9)\\
\mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad \epsilon \text{ (relative) Dielektrizitätskonstante} && (6.10)\\
\epsilon &= 1 + 4\pi\chi_{\mathrm{e}} && (6.11)
\end{aligned}$$

χ_{e} und ϵ sind Tensoren für anisotrope Materialien, sonst Skalare. Bei Ferroelektrika ist **P** bereits für $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ von 0 verschieden. Allerdings ist die Polarisationsladung meist durch Oberflächenladungen kompensiert. Doch wird sie offensichtlich, wenn die Polarisation durch äußere Änderungen verändert wird, zum Beispiel durch Druck beim Quarz (Piezoelektrizität) oder Temperaturveränderung.

Im Gaußschen System sind die Dimensionen von **D**, **E** und **P** übereinstimmend dyn$^{1/2}$ cm^{-1}. Im SI-System wird aber **E** in V/m, **D** und **P** in As/m^2 gemessen. Da das SI-System ein rationales Maßsystem ist, das Gaußsche ein irrationales, unterscheiden sich die Umrechnungsfaktor für **D** und **P** um 4π. Dementsprechend unterscheiden sich auch die χ_e in beiden Systemen um einen Faktor 4π. Dagegen sind die relativen Dielektrizitätskonstanten ϵ identisch. Genaueres findet sich im Anhang A.

6.b Grenzflächen zwischen Dielektrika

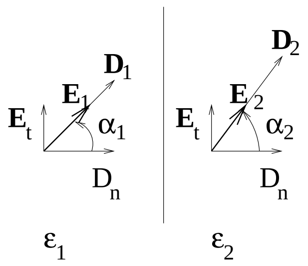
Wir betrachten nun die Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika oder Dielektrikum und Vakuum. Aus der Maxwellgleichung $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ folgt, dass die Komponenten des elektrischen Feldes tangential zur Grenzfläche in beiden Dielektrika übereinstimmen

$$\mathbf{E}_{1,\mathrm{t}} = \mathbf{E}_{2,\mathrm{t}}. \tag{6.12}$$

Hierzu muss man nur ein Linienintegral $\oint d\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r})$, das parallel zur Grenzfläche in einem Dielektrikum hin, im anderen zurückführt, ausführen und in das Flächenintegral $\int d\mathbf{f}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ überführen. Man sieht dann, dass das Linienintegral verschwindet. Sind die Integrationswege in den beiden Dielektrika infinitesimal benachbart, so folgt, da das für beliebige Wege gilt, dass $\mathbf{E}_{\mathrm{t}}$ in beiden Dielektrika übereinstimmen muss.

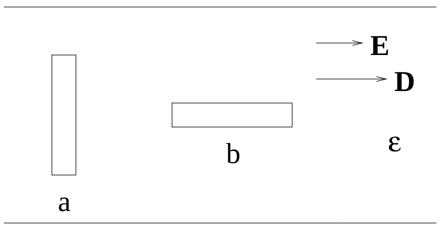
Andererseits können wir ein "Gaußsche Dose" einführen, deren Deckfläche infinitesimal von der Grenzfläche entfernt in einem Dielektrikum und deren Grundfläche ebenfalls infinitesimal von der Grenzfläche im anderen Dielektrikum verläuft. Sind auf der Grenzfläche keine freibeweglichen Ladungen, so gilt $\int_V d^3r \operatorname{div}\mathbf{D} = 0$, was dazu führt, dass man auf der Oberfläche $\int d\mathbf{f}\cdot\mathbf{D} = 0$ hat. Rückt man die Oberfläche nun an die Grenzfläche heran, so folgt die Stetigkeit der Normalkomponenten von **D**

$$D_{1,\mathrm{n}} = D_{2,\mathrm{n}}. \tag{6.13}$$



Schließt das elektrische Feld (in isotropen Dielektrika) mit der Flächennormalen die Winkel α_1 und α_2 ein, so gilt

$$\begin{aligned}
E_1\sin\alpha_1 &= E_2\sin\alpha_2 && (6.14)\\
D_1\cos\alpha_1 &= D_2\cos\alpha_2 && (6.15)\\
\frac{\tan\alpha_1}{\epsilon_1} &= \frac{\tan\alpha_2}{\epsilon_2}. && (6.16)
\end{aligned}$$

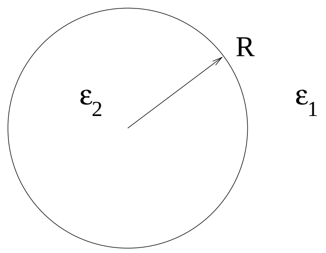


Wir betrachten jetzt einen Hohlraum im Dielektrikum. Handelt es sich dabei um einen sehr langgestreckten in Richtung des Feldes (b), so muss der Abfall des Potentials in dieser langgestreckten Richtung übereinstimmen, so dass im Inneren und im Äußeren des Hohlraums das elektrische Feld **E** übereinstimmt. Ist dagegen der Hohlraum sehr dünn in Richtung des Feldes (a) und in beiden dazu senkrechten Richtungen vergleichsweise sehr ausgedehnt, dann stimmt die dielektrische Verschiebung **D** im Hohlraum und im Dielektrikum überein.

Daneben treten vor allem an den Rändern auch Streufelder auf. Es ist für Ellipsoide möglich, das Feld im Innern eines Hohlraums exakt zu berechnen. Siehe zum Beispiel im Buch von Becker und Sauter. Das Feld im Inneren des Ellipsoids ist homogen. Für die Kugel führen wir die Berechnung anschließend durch.

6.c Dielektrische Kugel im homogenen elektrischen Feld

Wir betrachten eine dielektrische Kugel mit Radius R und Dielektrizitätskonstante ϵ_2, die in ein anderes Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante ϵ_1 eingebettet ist. Im Dielektrikum 1 herrsche in sehr großer Entfernung ein homogenes Feld



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1 = E_1 \mathbf{e}_z \quad r \gg R. \tag{6.17}$$

Daraus folgt das Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{r} = -E_1 r \cos\theta \quad r \gg R. \tag{6.18}$$

Da $\cos\theta$ das Legendre-Polynom $P_1(\cos\theta)$ ist, führt der Ansatz

$$\Phi(\mathbf{r}) = f(r)\cos\theta \tag{6.19}$$

zum Erfolg. Die Lösung der homogenen Poisson-Gleichung $\triangle(f(r)\cos\theta) = 0$ ist eine Linearkombination (5.33) aus $f(r) = r$ (homogenes Feld) und $f(r) = 1/r^2$ (Dipolfeld). Da am Ursprung kein makroskopischer Dipol sitzt, können wir ansetzen

$$\Phi(\mathbf{r}) = \cos\theta \cdot \begin{cases} -E_2 r & r \le R \\ -E_1 r + p/r^2 & r \ge R \end{cases} \tag{6.20}$$

An der Grenzfläche gilt $\Phi(R+0) = \Phi(R-0)$, was identisch ist mit $\mathbf{E}_{1,\mathrm{t}} = \mathbf{E}_{2,\mathrm{t}}$ und auf

$$-E_1 R + \frac{p}{R^2} = -E_2 R \tag{6.21}$$

führt. Die Bedingung $D_{1,\mathrm{n}} = D_{2,\mathrm{n}}$ führt mit $D_\mathrm{n} = -\epsilon\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ auf

$$\epsilon_1(E_1 + \frac{2p}{R^3}) = \epsilon_2 E_2. \tag{6.22}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man

$$E_2 = \frac{3\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} E_1 \tag{6.23}$$

$$p = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} R^3 E_1. \tag{6.24}$$

Daraus folgt dann, dass die Polarisation im Inneren der Kugel eine Veränderung des mittleren elektrischen Felds um

$$\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = -\frac{4\pi}{3}\mathbf{P} \tag{6.25}$$

bewirkt. Speziell für die dielektrische Kugel ($\epsilon_2 = \epsilon$) im Vakuum ($\epsilon_1 = 1$) folgt

$$E_2 = \frac{3}{2+\epsilon} E_1, \quad p = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} R^3 E_1, \tag{6.26}$$

während man für eine Hohlkugel ($\epsilon_2 = 1$) im Dielektrikum ($\epsilon_1 = \epsilon$)

$$E_2 = \frac{3\epsilon}{1 + 2\epsilon} E_1 \tag{6.27}$$

erhält.

6.d Dielektrizitätskonstante nach Clausius und Mosotti

Clausius und Mosotti leiten die Dielektrizitätskonstante aus der Polarisierbarkeit α der Moleküle (Atome) wie folgt her: Im Feld $\mathbf{E}_{\text{eff}}$ ist das mittlere Dipolmoment

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_{\text{eff}}. \tag{6.28}$$

Bei einer Dichte der Dipole (Atome) n ergibt sich die Polarisation

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p} = n\alpha \mathbf{E}_{\text{eff}}. \tag{6.29}$$

Wir müssen daher das effektive Feld $\mathbf{E}_{\text{eff}}$ bestimmen, das auf den Dipol wirkt.

Dazu schneiden wir eine Kugel vom Radius R aus der Materie um den Dipol heraus. Diese Dipole erzeugen, wie wir am Beispiel der dielektrischen Kugel im Vakuum aus (6.25) sehen, ein mittleres Feld

$$\bar{\mathbf{E}}_{\text{P}} = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = -\frac{4\pi}{3}\mathbf{P}. \tag{6.30}$$

Dieses Feld fehlt nach dem Herausschneiden der Kugel. Dafür ist das schnell veränderliche Feld der einzelnen Dipole innerhalb der Kugel zu addieren (mit Ausnahme des Dipols, an dessen Stelle das Feld bestimmt werden soll)

$$\mathbf{E}_{\text{eff}} = \mathbf{E} - \bar{\mathbf{E}}_{\text{P}} + \sum_i \frac{-\mathbf{p}_i r_i^2 + 3(\mathbf{p}_i \mathbf{r}_i)\mathbf{r}_i}{r_i^5}. \tag{6.31}$$

Die Summe hängt von der Anordnung der Dipole (Kristallstruktur) ab. Falls die Dipole auf einem kubischen Gitter sitzen, verschwindet die Summe, denn die Beiträge aus

$$\sum_{\alpha,\beta} \mathbf{e}_\alpha p_\beta \sum_i \frac{-\delta_{\alpha,\beta} r_i^2 + 3x_{i,\alpha} x_{i,\beta}}{r_i^5} \tag{6.32}$$

heben sich für $\alpha \neq \beta$ weg, wenn man die Beiträge jeweils für x_α und $-x_\alpha$ zusammenfasst, die für $\alpha = \beta$, wenn man die drei Beiträge, die man durch zyklisches Permutieren der drei Komponenten erhält, zusammenfasst. Damit bleibt für ein kubisches Gitter

$$\chi_{\text{e}} \mathbf{E} = \mathbf{P} = n\alpha \mathbf{E}_{\text{eff}} = n\alpha(\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P}) = n\alpha(1 + \frac{4\pi}{3}\chi_{\text{e}})\mathbf{E}, \tag{6.33}$$

woraus

$$\chi_{\text{e}} = \frac{n\alpha}{1 - \frac{4\pi n\alpha}{3}} \quad \text{oder} \quad \frac{4\pi}{3} n\alpha = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \tag{6.34}$$

folgt.

7 Elektrizität auf Leitern

7.a Elektrische Leiter

Innerhalb eines Leiters (#i) ist das elektrische Feld $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, da ein von Null verschiedenes Feld sofort die Ladungen verschieben würde. Das Potential ist daher im Leiter konstant $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_i$.

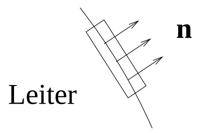
Außerhalb der Leiter ist der Potentialverlauf durch die Poisson-Gleichung gegeben

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}) \text{ oder } \operatorname{div}(\epsilon(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r})) = -4\pi\rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}). \tag{7.1}$$

7.a.α Randbedingungen an der Leiteroberfläche

An der Leiteroberfläche gilt (auch auf der Seite des Dielektrikums)

$$\mathbf{E}_{\mathrm{t}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \tag{7.2}$$



da im Innern des Leiters die elektrische Feldstärke verschwindet. Auf der Leiteroberfläche befinden sich in der Regel Influenzladungen. Wir bezeichnen die Oberflächenladungsdichte mit $\sigma(\mathbf{r})$.
Bei Integration über ein Stück der Oberfläche folgt dann

$$\int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{E}_{\text{außen}}(\mathbf{r}) = 4\pi q = 4\pi \int df\, \sigma(\mathbf{r}). \tag{7.3}$$

Daher gilt für die Feldstärke an der Oberfläche im Außenraum

$$\mathbf{E}_{\text{außen}}(\mathbf{r}) = 4\pi\sigma(\mathbf{r})\mathbf{n}, \quad -\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 4\pi\sigma(\mathbf{r}). \tag{7.4}$$

Im allgemeinen wird sich die Ladungsdichte σ an der Oberfläche zusammensetzen aus der freibeweglichen σ_{f} auf der Leiteroberfläche und der Polarisationsladungsdichte σ_{P} auf dem Dielektrikum $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}) + \sigma_{\mathrm{P}}(\mathbf{r})$ mit

$$\mathbf{D}_{\text{außen}}(\mathbf{r}) = 4\pi\sigma_{\mathrm{f}}(\mathbf{r})\mathbf{n}, \tag{7.5}$$

woraus dann mit $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$

$$\sigma_{\mathrm{f}} = \epsilon(\sigma_{\mathrm{f}} + \sigma_{\mathrm{P}}), \quad \sigma_{\mathrm{P}} = (\frac{1}{\epsilon} - 1)\sigma_{\mathrm{f}} \tag{7.6}$$

folgt.

7.a.β Kraft auf Leiter (im Vakuum)

Zunächst könnte man vermuten, die Kraft sei gegeben durch $\int df \mathbf{E}_{\text{außen}}\sigma(\mathbf{r})$. Dies ist aber falsch. Denn genau so könnte man argumentieren, man müsse $\mathbf{E}_{\text{innen}} = \mathbf{0}$ einsetzen. Die Wahrheit liegt in der Mitte. Dies erkennt man, wenn man davon ausgeht, dass die Ladung nicht exakt auf der Oberfläche sitzt, sondern über eine Schichtdicke l verschmiert ist. Nehmen wir an innerhalb einer Schicht der Dicke a befindet sich die Ladung $s(a)\sigma(\mathbf{r})df$ mit $s(0) = 0$ und $s(l) = 1$, dann wirkt in der Tiefe a die Feldstärke $\mathbf{E}_{\text{innen}}(\mathbf{r} - a\mathbf{n}) = (1 - s(a))\mathbf{E}_{\text{außen}}(\mathbf{r})$, da der Bruchteil $s(a)$ bereits abgeschirmt ist. Mit $\rho(\mathbf{r} - a\mathbf{n}) = s'(a)\sigma(\mathbf{r})$ folgt dann

$$\mathbf{K} = \int df\, da \rho(\mathbf{r} - a\mathbf{n})\mathbf{E}(\mathbf{r} - a\mathbf{n}) = \int df \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}_{\text{außen}}(\mathbf{r}) \int_0^l da s'(a)(1 - s(a)). \tag{7.7}$$

Das Integral über a ergibt $(s(a) - s^2(a)/2)|_0^l = 1/2$, so dass wir schließlich

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \int df \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}_{\text{außen}}(\mathbf{r}) \tag{7.8}$$

für die Kraft erhalten.

7.b Kapazitäten

Wir betrachten jetzt mehrere Leiter eingebettet in das Vakuum oder in Dielektrika. Außerhalb der Leiter seien keine freibeweglichen Ladungsdichten, $\rho_{\rm f} = 0$. Die elektrischen Potentiale Φ_i auf den Leitern $\#i$ seien vorgegeben. Gesucht sind die freibeweglichen Ladungen q_i auf den Leitern. Da die Maxwell-Gleichungen linear sind (und wir annehmen, dass lineare Beziehungen $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ bestehen), können wir das Potential als Superposition von Lösungen Ψ_i schreiben

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_i \Phi_i \Psi_i(\mathbf{r}). \tag{7.9}$$

Dabei ist Ψ_i die Lösung, die auf dem Leiter $\#i$ den Wert 1, auf den anderen den Wert 0 annimmt

$$\Psi_i(\mathbf{r}) = \delta_{i,j} \quad \mathbf{r} \in \text{ Leiter } j. \tag{7.10}$$

Die Ladung auf dem Leiter $\#i$ ist dann gegeben durch

$$q_i = -\frac{1}{4\pi}\int_{F_i} df \epsilon \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{\text{außen}} = \sum_j C_{i,j}\Phi_j \tag{7.11}$$

mit den Kapazitätskoeffizienten

$$C_{i,j} = -\frac{1}{4\pi}\int_{F_i} df \epsilon \left.\frac{\partial\Psi_j}{\partial n}\right|_{\text{außen}}. \tag{7.12}$$

Im Gaußschen Maßsystem hat die Kapazität die Dimension Ladung/Spannung = Länge. Die Umrechnung in das SI-System geschieht mit dem Faktor $4\pi\epsilon_0$, so dass 1 cm $\hat{=}\ 1/9 \cdot 10^{-11}$ As/V = 10/9 pF (Picofarad).

Die elektrostatische Energie ergibt sich aus

$$dU = \sum_i \Phi_i dq_i = \sum_{i,j} \Phi_i C_{i,j} d\Phi_j, \tag{7.13}$$

das heißt

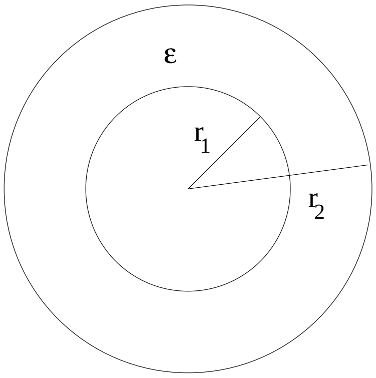
$$\frac{\partial U}{\partial \Phi_j} = \sum_i C_{i,j}\Phi_i, \tag{7.14}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\Phi_i\partial\Phi_j} = C_{i,j} = \frac{\partial^2 U}{\partial\Phi_j\partial\Phi_i} = C_{j,i}, \tag{7.15}$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,j} C_{i,j}\Phi_i\Phi_j = \frac{1}{2}\sum_i \Phi_i q_i \tag{7.16}$$

Als Beispiel betrachten wir den Kugelkondensator. Zwei konzentrische leitende Kugeln mit Radien r_1, r_2, wobei $r_1 < r_2$, seien mit den Ladungen q_1 und q_2 belegt. Der Außenraum sei Vakuum. Zwischen den beiden Kugeln sei ein Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante ϵ. Im Außenraum gilt dann

$$\Phi(r) = \frac{q_1 + q_2}{r} \quad r \geq r_2. \tag{7.17}$$



Im Raum zwischen den beiden Kugel hat man einen Abfall des Potentials der Form $q_1/(\epsilon r)$. Da das Potential bei $r = r_2$ stetig sein muss, folgt

$$\Phi(r) = \frac{q_1}{\epsilon r} - \frac{q_1}{\epsilon r_2} + \frac{q_1 + q_2}{r_2} \quad r_1 \leq r \leq r_2. \tag{7.18}$$

Im Innenraum ist das Potential konstant.

$$\Phi(r) = \frac{q_1}{\epsilon r_1} - \frac{q_1}{\epsilon r_2} + \frac{q_1 + q_2}{r_2} \quad r \leq r_1. \tag{7.19}$$

Daraus errechnen sich dann die Ladungen als Funktion der Potentiale $\Phi_i = \Phi(r_i)$

$$q_1 = \frac{\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}(\Phi_1 - \Phi_2) \tag{7.20}$$

$$q_2 = \frac{\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}(\Phi_2 - \Phi_1) + r_2 \Phi_2, \tag{7.21}$$

aus denen man die Kapazitätskoeffizienten unmittelbar ablesen kann. Falls das System neutral ist $q = q_1 = -q_2$, kann man q durch die Potentialdifferenz ausdrücken

$$q = C(\Phi_1 - \Phi_2) \tag{7.22}$$

und bezeichnet C als die Kapazität. Für den Kugelkondensator finden wir $\Phi_2 = 0$ und $\Phi_1 = \frac{q_1}{\epsilon}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$, woraus die Kapazität

$$C = \frac{\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1} \tag{7.23}$$

folgt.

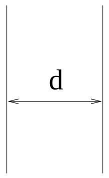
Für eine einzelne Kugel können wir r_2 gegen ∞ gehen lassen und finden $C = \epsilon r_1$.

Den Plattenkondensator mit Plattenabstand d erhalten wir, indem wir $r_2 = r_1 + d$ setzen und dann großes r_1 betrachten. Wir finden

$$C = \frac{(r_1^2 + r_1 d)\epsilon}{d} = \frac{4\pi r_1^2 \epsilon}{d}(\frac{1}{4\pi} + \frac{d}{4\pi r_1}), \tag{7.24}$$

was für große r_1 gegen $\frac{\epsilon F}{4\pi d}$ mit der Fläche F geht. Daher erhält man für den Plattenkondensator

$$C = \frac{\epsilon F}{4\pi d} \tag{7.25}$$



Eine andere Überlegung ist die Folgende: Die Ladung q erzeugt einen Fluss $DF = 4\pi q$. Daher ist die Potentialdifferenz zwischen den beiden Platten $\Phi = \frac{D}{\epsilon} d = \frac{4\pi d}{\epsilon F} q$, woraus $C = q/\phi = \frac{\epsilon F}{4\pi d}$ folgt. Man beachte, dass wir hier mit q die freibewegliche Ladung bezeichnet haben.

7.c Influenzladungen

Halten wir die Potentiale der Leiter auf 0, $\Phi_i = 0$ und haben wir eine freibewegliche Ladung q' am Ort $\mathbf{r}'$, so beschreiben wir das Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')q' \tag{7.26}$$

mit der Greenschen Funktion G. Offensichtlich genügt diese der Gleichung

$$\nabla(\epsilon(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{7.27}$$

für $\mathbf{r}$ außerhalb der Leiter. Für $\mathbf{r}$ auf den Leiteroberflächen ist $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$. Für eine Ladungsverteilung $\rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}')$ gilt dann nach dem Superpositionsprinzip

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3 r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}') + \sum_i \Phi_i \Psi_i(\mathbf{r}), \tag{7.28}$$

wobei wir jetzt angenommen haben, dass die Leiter auf den Potentialen Φ_i liegen.

Wir zeigen nun, dass die Greensche Funktion symmetrisch ist, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$. Zum Beweis gehen wir aus vom Integral über die Leiteroberflächen

$$\int d\mathbf{f}'' \cdot \{G(\mathbf{r}'', \mathbf{r})\epsilon(\mathbf{r}'')\nabla'' G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') - \epsilon(\mathbf{r}'')[\nabla'' G(\mathbf{r}'', \mathbf{r})]G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')\} = 0, \tag{7.29}$$

da G auf den Leiteroberflächen verschwindet. Das Flächenelement $d\mathbf{f}''$ weise in die Leiter. Wir erstrecken das Integral auch über eine Kugel vom Radius R, die alle Leiter einschließt. Wegen $G \sim 1/R$ und $\nabla'' G \sim 1/R^2$ verschwindet das Oberflächenintegral für $R \to \infty$. Die Anwendung des Gaußschen Satzes liefert

$$\int d^3r'' \{G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}) \nabla''[\epsilon(\mathbf{r}'') \nabla'' G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')] - \nabla''[\epsilon(\mathbf{r}'') \nabla'' G(\mathbf{r}'', \mathbf{r})] G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')\} \tag{7.30}$$

$$= -4\pi \int d^3r'' \{G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}) \delta^3(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}') - \delta^3(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}) G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')\} \tag{7.31}$$

$$= -4\pi (G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = 0. \tag{7.32}$$

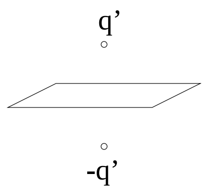
Wir betrachten nun einige Beispiele:

7.c.α Leiterfreier Raum

Im leiterfreien Raum mit konstanter Dielektrizitätskonstante ϵ gilt

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{7.33}$$

7.c.β Leitende Ebene



Für eine leitende Ebene $z = 0$ ($\epsilon = 1$) löst man das Problem durch eine Spiegelladung. Befindet sich die gegebene Ladung q' am Ort $\mathbf{r}' = (x', y', z')$, so denke man sich eine zweite Ladung am Ort $\mathbf{r}'' = (x', y', -z')$. Diese kompensiert gerade das Potential an der Leiteroberfläche. Es folgt

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} & \text{für } \operatorname{sign} z = \operatorname{sign} z' \\ 0 & \text{für } \operatorname{sign} z = -\operatorname{sign} z' \end{cases} \tag{7.34}$$

Als nächstes betrachten wir die Kraft, die auf die Ladung q' wirkt. Das Potential ist $\Phi(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')q'$. Dabei ist der Anteil $q'/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ das Potential von q' selbst, das auf q' keine Kraft ausübt. Der zweite Beitrag $q'/|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|$ rührt dagegen von den Influenz-Ladungen auf der Metallebene her und bewirkt die Kraft

$$\mathbf{K} = -q' \operatorname{grad} \frac{-q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{q'^2 \mathbf{e}_z}{4z'^2} \operatorname{sign} z'. \tag{7.35}$$

Weiter bestimmen wir die Influenz-Ladung auf der Platte. Bei $z = 0$ haben wir $4\pi \operatorname{sign} z' \mathbf{e}_z \sigma(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) = q' \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} - q' \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|^3}$. Daraus ergibt sich die Oberflächenladungsdichte

$$\sigma(\mathbf{r}) = -\frac{q'}{2\pi} \frac{|z'|}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2}^3} \tag{7.36}$$

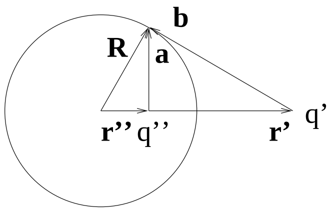
Mit $df = \pi d(x^2 + y^2)$ folgt dann

$$\int df \sigma(\mathbf{r}) = -\frac{q'|z'|}{2} \int_{z'^2}^{\infty} \frac{d(x^2 + y^2 + z'^2)}{(x^2 + y^2 + z'^2)^{3/2}} = -q'. \tag{7.37}$$

Die Kraft auf die Platte errechnet sich zu

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \int df \mathbf{E}(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r}) = \frac{q'^2 z' |z'|}{2} \mathbf{e}_z \int \frac{d(x^2 + y^2 + z'^2)}{(x^2 + y^2 + z'^2)^3} = \frac{q'^2 \mathbf{e}_z}{4z'^2} \operatorname{sign} z'. \tag{7.38}$$

7.c.γ Leitende Kugel



Wir betrachten eine Ladung q' am Ort $\mathbf{r}'$ in Gegenwart einer leitenden Kugel mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung. Es gibt dann einen Vektor $\mathbf{r}''$, so dass das Verhältnis der Abstände von den Punkten $\mathbf{R}$ der Kugeloberfläche von $\mathbf{r}'$ und $\mathbf{r}''$ konstant ist. Es sei

$$a^2 := (\mathbf{R}-\mathbf{r}'')^2 \quad = \quad R^2 + r''^2 - 2\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}'' \tag{7.39}$$
$$b^2 := (\mathbf{R}-\mathbf{r}')^2 \quad = \quad R^2 + r'^2 - 2\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}' \tag{7.40}$$

Diese Konstanz des Verhl̈tnisses der Abstände ist erfüllt für $\mathbf{r}' \parallel \mathbf{r}''$ und

$$\frac{R^2 + r''^2}{R^2 + r'^2} = \frac{r''}{r'}. \tag{7.41}$$

Dann gilt

$$R^2 = r'r'' \quad \mathbf{r}'' = \frac{R^2}{r'^2}\mathbf{r}' \tag{7.42}$$
$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{r''}{r'} = \frac{R^2}{r'^2} = \frac{r''^2}{R^2}. \tag{7.43}$$

Man findet damit ein konstantes Potential auf der Kugel mit der Ladung q' am Ort $\mathbf{r}'$ und der Ladung $q'' = -qR/r'$ am Ort r''

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{R/r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} \text{ für } \operatorname{sign}(r-R) = \operatorname{sign}(r'-R), \\ 0 \text{ sonst }. \end{cases} \tag{7.44}$$

Mit diesem G verschwindet das Potential auf der Kugel. Für $r' > R$ trägt sie die Ladung q'' und für $r' < R$ die Ladung $-q'$. Daher muss man für eine neutrale Kugel zum Potential Φ noch den Beitrag hinzufügen, der von einer gleichmäßig auf der Kugel verteilten Ladung $-q''$ beziehungsweise q' herrührt.

8 Energie, Kräfte und Spannungen im Dielektrikum

8.a Elektrostatische Energie

Bei Verschiebung der Ladungsdichten $\delta\rho = \delta\rho_{\rm f} + \delta\rho_{\rm P}$ wird die elektrostatische Energie

$$\delta U = \int d^3r \delta\rho_{\rm f} \Phi + \int d^3r \delta\rho_{\rm P} \Phi \tag{8.1}$$

zugeführt. Gleichzeitig sind in der Materie zusätzliche innere Potentiale $\Phi_{\rm i}$ vorhanden, so dass die Polarisation ins Gleichgewicht kommt, das heißt

$$\delta U = \int d^3r \delta\rho_{\rm f} \Phi + \int d^3r \delta\rho_{\rm P} (\Phi + \Phi_{\rm i}). \tag{8.2}$$

Die Kräfte dieser Potentiale müssen so beschaffen sein, dass $\delta U = 0$ für eine Verschiebung gilt, damit die Polarisationen im Gleichgewicht sind

$$\Phi + \Phi_{\rm i} = 0. \tag{8.3}$$

Diese Überlegungen gelten bei adiabatisch geführten Prozessen und unter der Bedingung, dass keine mechanische Energie zugeführt wird. Die Materie muss sich also in einem kräftefreien Zustand (Gleichgewicht $\mathbf{k} = \mathbf{0}$) befinden oder sie muss festgehalten werden. Damit folgt mit (B.62)

$$\delta U = \int d^3r\, \delta\rho_{\rm f}\, \Phi = \frac{1}{4\pi} \int d^3r\, {\rm div}\, \delta\mathbf{D}\, \Phi = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r \delta\mathbf{D} \cdot {\rm grad}\, \Phi = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D}, \tag{8.4}$$

ähnlich zum materiefreien Fall (3.25). Damit gilt für die Energiedichte bei fester Massendichte $\rho_{\rm m}$ (wir nehmen hier an, dass außer dem elektrischen Feld nur die Massendichte die Energiedichte festlegt; tatsächlich wird im Allgemeinen der Verzerrungszustand wesentlich sein)

$$du = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D}. \tag{8.5}$$

Falls $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, so folgt

$$u = u_0(\rho_{\rm m}) + \frac{1}{4\pi} \int \epsilon(\rho_{\rm m}) \mathbf{E} \cdot d\mathbf{E} = u_0(\rho_{\rm m}) + \frac{1}{8\pi} \epsilon(\rho_{\rm m}) E^2 = u_0(\rho_{\rm m}) + \frac{D^2}{8\pi\epsilon(\rho_{\rm m})}, \tag{8.6}$$

da die Dielektrizitätskonstante im Allgemeinen von der Massendichte abhängt.

8.b Kraftdichte in einem isotropen Dielektrikum (Flüssigkeit)

Wir können die Kraftdichte in einem Dielektrikum bestimmen, indem wir die Massen und freibeweglichen Ladungen von $\mathbf{r}$ nach $\mathbf{r} + \delta\mathbf{s}(\mathbf{r})$ verschieben und die Energieänderung δU bestimmen. Die dem System dabei zugeführte Energie ist

$$\delta U = \int d^3r\, \mathbf{k}_{\rm a}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{s}(\mathbf{r}), \tag{8.7}$$

wobei $\mathbf{k}_{\rm a}$ die von außen angreifende Kraftdichte ist. Im Gleichgewicht ist die entgegenwirkende innere Kraftdichte

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = -\mathbf{k}_{\rm a}(\mathbf{r}), \tag{8.8}$$

so dass

$$\delta U = -\int d^3r\, \mathbf{k}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{s}(\mathbf{r}) \tag{8.9}$$

gelten muss. Wir bringen nun δU auf diese Form

$$\delta U = \int d^3r \left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{D}} \cdot \delta\mathbf{D} + \left.\frac{\partial u}{\partial\rho_{\rm m}}\right|_{\mathbf{D}} \delta\rho_{\rm m} \right), \quad u = u(\mathbf{D}, \rho_{\rm m}). \tag{8.10}$$

Wegen $\partial u/\partial \mathbf{D} = \mathbf{E}/(4\pi)$ formen wir den ersten Term wie im vorhergehenden Abschnitt um in

$$\delta U = \int d^3r \left(\Phi(\mathbf{r})\delta\rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}) + \left.\frac{\partial u}{\partial \rho_{\mathrm{m}}}\right|_{\mathbf{D}} \delta\rho_{\mathrm{m}} \right). \tag{8.11}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung $d\rho/dt = -\,\mathrm{div}\,\mathbf{j}$ leiten wir nun den Zusammenhang zwischen $\delta\rho$ und $\delta\mathbf{s}$ her. Man muss die Gleichung nur mit δt multiplizieren und berücksichtigen, dass $\mathbf{j}\delta t = \rho\mathbf{v}\delta t = \rho\delta\mathbf{s}$ gilt. Mit $(d\rho/dt)\delta t = \delta\rho$ erhalten wir

$$\delta\rho = -\,\mathrm{div}\,(\rho\delta\mathbf{s}). \tag{8.12}$$

Es folgt dann

$$\begin{aligned} \delta U &= -\int d^3r \left(\Phi(\mathbf{r})\,\mathrm{div}\,(\rho_{\mathrm{f}}\delta\mathbf{s}) + \frac{\partial u}{\partial \rho_{\mathrm{m}}}\,\mathrm{div}\,(\rho_{\mathrm{m}}\delta\mathbf{s}) \right) \\ &= \int d^3r \left(\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})\rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}) + \left(\mathrm{grad}\,\frac{\partial u}{\partial \rho_{\mathrm{m}}} \right) \rho_{\mathrm{m}}(\mathbf{r}) \right) \cdot \delta\mathbf{s}(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{8.13}$$

wobei beim Übergang zur letzten Zeile der Gaußsche Satz (B.62) verwendet wurde. Daraus folgt

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) - \rho_{\mathrm{m}}(\mathbf{r})\,\mathrm{grad}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho_{\mathrm{m}}} \right) \tag{8.14}$$

Der erste Beitrag ist die Coulomb-Kraft auf die freien Ladungsträger. Den zweiten Beitrag formen wir noch um. Wir setzen (8.6) $u = u_0(\rho_{\mathrm{m}}) + D^2/(8\pi\epsilon(\rho_{\mathrm{m}}))$. Dann ist

$$\frac{\partial u}{\partial \rho_{\mathrm{m}}} = \frac{du_0}{d\rho_{\mathrm{m}}} + \frac{1}{8\pi}D^2\frac{d(1/\epsilon)}{d\rho_{\mathrm{m}}} = \frac{du_0}{d\rho_{\mathrm{m}}} - \frac{1}{8\pi}E^2\frac{d\epsilon}{d\rho_{\mathrm{m}}}. \tag{8.15}$$

Der erste Term kann geschrieben werden

$$-\rho_{\mathrm{m}}\,\mathrm{grad}\,\frac{du_0}{d\rho_{\mathrm{m}}} = -\,\mathrm{grad}\left(\rho_{\mathrm{m}}\frac{du_0}{d\rho_{\mathrm{m}}} - u_0 \right) = -\,\mathrm{grad}\,P_0(\rho_{\mathrm{m}}) \tag{8.16}$$

Dabei ist P_0 der hydrostatische Druck der Flüssigkeit ohne elektrisches Feld

$$\mathbf{k}_{0,\mathrm{hydro}} = -\,\mathrm{grad}\,P_0(\rho_{\mathrm{m}}(\mathbf{r})). \tag{8.17}$$

Die auf das Volumen V wirkende hydrostatische Kraft kann dann umgeformt werden in ein Oberflächenintegral

$$\mathbf{K}_0 = -\int_V d^3r\,\mathrm{grad}\,P_0(\rho_{\mathrm{m}}(\mathbf{r})) = -\int_{\partial V} d\mathbf{f}P_0(\rho_{\mathrm{m}}(\mathbf{r})). \tag{8.18}$$

Dies ist eine Kraft, die auf die Oberfläche ∂V mit dem Druck P_0 nach innen wirkt. Es bleibt noch der elektrostriktive Anteil

$$\frac{1}{8\pi}\rho_{\mathrm{m}}\,\mathrm{grad}\left(E^2\frac{d\epsilon}{d\rho_{\mathrm{m}}} \right) = \frac{1}{8\pi}\,\mathrm{grad}\left(E^2\rho_{\mathrm{m}}\frac{d\epsilon}{d\rho_{\mathrm{m}}} \right) - \frac{1}{8\pi}E^2\,\mathrm{grad}\,\epsilon, \tag{8.19}$$

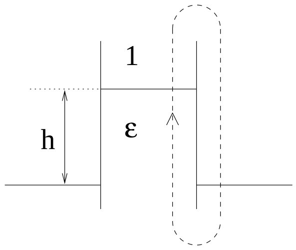
wobei $(d\epsilon/d\rho_{\mathrm{m}})\,\mathrm{grad}\,\rho_{\mathrm{m}} = \mathrm{grad}\,\epsilon$ verwendet wurde. Insgesamt ergibt sich dann die Kraftdichte zu

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathrm{grad}\,(-P_0(\rho_{\mathrm{m}}) + \frac{1}{8\pi}E^2\rho_{\mathrm{m}}\frac{d\epsilon}{d\rho_{\mathrm{m}}}) - \frac{1}{8\pi}E^2\,\mathrm{grad}\,\epsilon. \tag{8.20}$$

Anwendungen:

Dielektrische Flüssigkeit zwischen zwei senkrechten Kondensatorplatten. Um welche Höhe h steht die Flüssigkeit zwischen den Kondensatorplatten höher als im feldfreien Raum? Wir führen dazu das Integral über einen geschlossenen Weg zwischen den Kondensatorplatten nach oben und außerhalb nach unten

$$\oint \mathbf{k}\cdot d\mathbf{r} = \oint \mathrm{grad}\left(-P_0 + \frac{1}{8\pi}E^2\rho_{\mathrm{m}}\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho_{\mathrm{m}}} \right)\cdot d\mathbf{r} - \frac{1}{8\pi}\oint E^2\,\mathrm{grad}\,\epsilon\cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{8\pi}E^2(\epsilon - 1). \tag{8.21}$$



Dabei verschwindet das Integral des Gradienten über den geschlossenen Weg, während das Integral über $E^2 \operatorname{grad}\epsilon$ nur etwas an den beiden Punkten ergibt, an denen der Integrationsweg durch die Flüssigkeitsoberfläche tritt. Zusätzlich zu diesen Kräften kommt noch die Gravitationskraft. Beide müssen sich die Waage halten

$$\mathbf{k} + \mathbf{k}_{\mathrm{grav}} = \mathbf{0}, \tag{8.22}$$

also

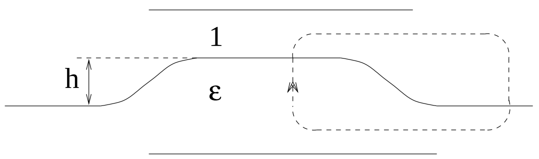
$$\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}_{\mathrm{grav}} = -\rho_{\mathrm{m}} g h = -\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}, \tag{8.23}$$

woraus sich die Höhe

$$h = \frac{E^2(\epsilon - 1)}{8\pi\rho_{\mathrm{m}} g} \tag{8.24}$$

ergibt.

Dielektrische Flüssigkeit zwischen zwei waagrechten Kondensatorplatten

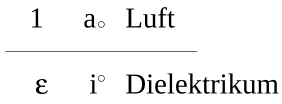


Wie groß ist die Steighöhe einer dielektrischen Flüssigkeit zwischen zwei horizontalen Kondensatorplatten? Das Problem lässt sich ähnlich lösen wie zwischen zwei senkrechten Kondensatorplatten. Allerdings ist es zweckmässig, die Umformung

$$-\frac{1}{8\pi} E^2 \operatorname{grad}\epsilon = \frac{1}{8\pi} D^2 \operatorname{grad}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \tag{8.25}$$

zu verwenden.

Hydrostatischer Druckunterschied an einer Grenzfläche



Aus

$$0 = \int_{\mathrm{Materie}}^{\mathrm{Luft}} \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = \int \operatorname{grad}\left(-P_0 + \frac{1}{8\pi}\rho_{\mathrm{m}} E^2 \frac{d\epsilon}{d\rho_{\mathrm{m}}}\right) \cdot d\mathbf{r} - \frac{1}{8\pi}\int E_{\mathrm{t}}^2 \operatorname{grad}\epsilon \cdot d\mathbf{r} + \frac{1}{8\pi}\int D_{\mathrm{n}}^2 \operatorname{grad}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \cdot d\mathbf{r} \tag{8.26}$$

folgt der hydrostatische Druckunterschied

$$P_{0,\mathrm{Materie}}(\rho_{\mathrm{m}}) - P_{0,\mathrm{Luft}} = \frac{1}{8\pi}\left(\rho_{\mathrm{m}} \frac{d\epsilon}{d\rho_{\mathrm{m}}} E^2 - (\epsilon - 1) E_{\mathrm{t}}^2 + \left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right) D_{\mathrm{n}}^2\right) \tag{8.27}$$

Druckverlauf im praktisch inkompressiblen Dielektrikum

Man hat

$$\mathbf{k} + \mathbf{k}_{\mathrm{grav}} = -\operatorname{grad}\left(P_0(\rho_{\mathrm{m}})\right) + \rho_{\mathrm{m}} \operatorname{grad}\left(\frac{1}{8\pi} E^2 \frac{d\epsilon}{d\rho_{\mathrm{m}}}\right) - \rho_{\mathrm{m}} \operatorname{grad}(gz) = \mathbf{0}. \tag{8.28}$$

Falls ρ_{m} annähernd konstant ist, folgt

$$P_0 = \rho_{\mathrm{m}}\left(\frac{1}{8\pi} E^2 \frac{d\epsilon}{d\rho_{\mathrm{m}}} - gz\right) + \mathrm{const.} \tag{8.29}$$

8.c Maxwellscher Spannungstensor

Wir wollen nun die Kraftdichte $\mathbf{k}$ als Divergenz eines Tensors darstellen,

$$k_\alpha = \nabla_\beta T_{\alpha,\beta}. \tag{8.30}$$

Hat man eine derartige Darstellung, so ist die auf ein Volumen V wirkende Kraft gegeben durch

$$\mathbf{K} = \int_V d^3r\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \int d^3r\mathbf{e}_\alpha \nabla_\beta T_{\alpha,\beta} = \int_{\partial V} df_\beta(\mathbf{e}_\alpha T_{\alpha,\beta}). \tag{8.31}$$

Die auf das Volumen wirkende Kraft wird also dargestellt durch eine auf die Oberfläche wirkende Kraft. Wäre sie isotrop $T_{\alpha,\beta} = -P\delta_{\alpha,\beta}$, so würden wir von einem Druck sprechen, der auf die Oberfläche einwirkt. Im hier vorliegenden allgemeineren Fall spricht man von einem Spannungstensor T, da der Druck anisotrop sein kann und Scherspannungen auftreten können.

Zur Berechnung von T gehen wir aus von

$$k_\alpha = \rho_\mathrm{f} E_\alpha - \rho_\mathrm{m} \nabla_\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}}\right). \tag{8.32}$$

Wir formen um

$$\rho_\mathrm{f} E_\alpha = \frac{1}{4\pi} E_\alpha \nabla_\beta D_\beta = \frac{1}{4\pi}\left(\nabla_\beta(E_\alpha D_\beta) - (\nabla_\beta E_\alpha) D_\beta\right) \tag{8.33}$$

und verwenden $\nabla_\beta E_\alpha = \nabla_\alpha E_\beta$ wegen $\operatorname{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Damit folgt

$$k_\alpha = \nabla_\beta(\frac{1}{4\pi}E_\alpha D_\beta) - \rho_\mathrm{m}\nabla_\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}}\right) - \frac{1}{4\pi} D_\beta \nabla_\alpha E_\beta. \tag{8.34}$$

Nun ist aber

$$\nabla_\alpha \left(u - \rho_\mathrm{m}\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} - \frac{1}{4\pi}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\right) = -\rho_\mathrm{m}\nabla_\alpha \frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} - \frac{1}{4\pi} D_\beta \nabla_\alpha E_\beta, \tag{8.35}$$

da $\partial u/\partial D_\beta = E_\beta/(4\pi)$. Damit folgt der Ausdruck für den Spannungstensor

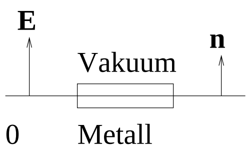
$$T_{\alpha,\beta} = \frac{1}{4\pi} E_\alpha D_\beta + \delta_{\alpha,\beta}\left(u - \rho_\mathrm{m}\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} - \frac{1}{4\pi}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\right). \tag{8.36}$$

Speziell mit $u = u_0(\rho_\mathrm{m}) + D^2/(8\pi\epsilon(\rho_\mathrm{m}))$, (8.6) folgt

$$T_{\alpha,\beta} = \frac{1}{4\pi} E_\alpha D_\beta + \delta_{\alpha,\beta}\left(-P_0(\rho_\mathrm{m}) - \frac{1}{8\pi}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{8\pi}E^2\rho_\mathrm{m}\frac{d\epsilon}{d\rho_\mathrm{m}}\right) \tag{8.37}$$

Im Vakuum ergibt sich der Maxwellsche Spannungstensor zu

$$T_{\alpha,\beta} = \frac{1}{4\pi} E_\alpha E_\beta - \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{8\pi} E^2. \tag{8.38}$$



Als Beispiel betrachten wir die elektrostatische Kraft auf ein ebenes Stück Metall. Wir haben auszuwerten

$$\mathbf{K} = \int df_\beta(\mathbf{e}_\alpha T_{\alpha,\beta}) = \left(\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}(\mathbf{E}\mathbf{n}) - \frac{1}{8\pi}\mathbf{n}E^2\right)F = \frac{1}{8\pi}E^2\mathbf{n}F. \tag{8.39}$$

Dies ist in Übereinstimmung mit dem Ergebnis aus (7.8).