B

Elektrostatik

Electrostatics

©2000/01 Franz Wegner Universität Heidelberg

3 Elektrisches Feld, Potential, Energie des Feldes

3.a Statik

In der Statik behandelt man das zeitunabhängige Problem. Das heißt, die auftretenden Größen hängen nur vom Ort ab, $\rho = \rho(\mathbf{r})$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$. Dann zerfallen die Kontinuitätsgleichung (1.12) und die Maxwell-Gleichungen (1.13-1.16) in zwei Gruppen

$$\begin{array}{c} \operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 \\ \operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \\ \operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \\ \text{Magnetostatik} \\ \text{magnetostatics} \\ \mathbf{k}_{\mathrm{ma}} = \frac{1}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \end{array}$$

Die erste Gruppe von Gleichungen enthält nur die magnetische Induktion $\mathbf{B}$ und die Stromdichte $\mathbf{j}$. Sie beschreibt die Magnetostatik. Die zweite Gruppe von Gleichungen enthält nur das elektrische Feld $\mathbf{E}$ und die Ladungsdichte ρ. Sie ist Grundlage der Elektrostatik. In der letzten Zeile sind noch die entsprechenden Anteile der Kraftdichte $\mathbf{k}$ hinzugefügt.

3.b Elektrisches Feld und Potential

3.b.α Elektrisches Potential

Wir führen nun das elektrische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ ein. Hierzu betrachten wir das Wegintegral von $\mathbf{E}$ auf zwei verschiedenen Wegen (1) und (2) von $\mathbf{r}_0$ nach $\mathbf{r}$

$$\int_{\substack{\mathbf{r}_0\\(1)}}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\substack{\mathbf{r}_0\\(2)}}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \oint d\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}), \tag{3.2}$$

3 Electric Field, Potential, Energy of the Field

3.a Statics

First we consider the time-independent problem: Statics. This means, the quantities depend only on their location, $\rho = \rho(\mathbf{r})$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$. Then the equation of continuity (1.12) and Maxwell's equations (1.13-1.16) separate into two groups

$$\begin{array}{c} \operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}) \\ \operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \\ \text{Elektrostatik} \\ \text{electrostatics} \\ \mathbf{k}_{\mathrm{el}} = \rho(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{array} \tag{3.1}$$

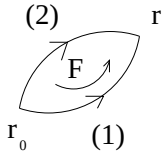
The first group of equations contains only the magnetic induction $\mathbf{B}$ and the current density $\mathbf{j}$. It describes magnetostatics. The second group of equations contains only the electric field $\mathbf{E}$ and the charge density ρ. It is the basis of electrostatics. The expressions for the corresponding parts of the force density $\mathbf{k}$ is given in the last line.

3.b Electric Field and Potential

3.b.α Electric Potential

Now we introduce the electric Potential $\Phi(\mathbf{r})$. For this purpose we consider the path integral over $\mathbf{E}$ along to different paths (1) and (2) from $\mathbf{r}_0$ to $\mathbf{r}$

wobei das letztere Integral über den geschlossenen Weg von $\mathbf{r}_0$ auf (1) nach $\mathbf{r}$ und von dort in entgegengesetzter Richtung auf (2) nach $\mathbf{r}_0$ zu erstrecken ist.



where the last integral has to be performed along the closed path from $\mathbf{r}_0$ along (1) to $\mathbf{r}$ and from there in opposite direction along (2) to $\mathbf{r}_0$.

Das letztere Integral lässt sich mit dem Stokesschen Satz (B.56) in das Integral über die von (1) und (2) berandete Fläche $\int d\mathbf{f} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r})$ überführen, das wegen der Maxwellgleichung $\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ (3.1) verschwindet.

This later integral can be transformed by means of Stokes' theorem (B.56) into the integral $\int d\mathbf{f} \cdot \operatorname{curl}\mathbf{E}(\mathbf{r})$ over the open surface bounded by (1) and (2), which vanishes due to Maxwell's equation $\operatorname{curl}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ (3.1).

Daher ist das Integral (3.2) vom Weg unabhängig und man definiert das elektrische Potential

Therefore the integral (3.2) is independent of the path and one defines the electric potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \Phi(\mathbf{r}_0). \tag{3.3}$$

Dabei sind $\mathbf{r}_0$ und $\Phi(\mathbf{r}_0)$ willkürlich, aber fest. $\Phi(\mathbf{r})$ ist daher bis auf eine willkürliche additive Konstante bestimmt. Wir haben auf Grund der Definition (3.3)

The choice of $\mathbf{r}_0$ and of $\Phi(\mathbf{r}_0)$ is arbitrary, but fixed. Therefore $\Phi(\mathbf{r})$ is defined apart from an arbitrary additive constant. From the definition (3.3) we have

$$d\Phi(\mathbf{r}) = -d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}). \tag{3.4}$$

3.b.β Elektrischer Fluss und Ladung

3.b.β Electric Flux and Charge

Aus $\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r})$, (3.1) folgt

From $\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r})$, (3.1) one obtains

$$\int_V d^3r \operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) \tag{3.5}$$

und damit mit dem Gaußschen Satz (B.59)

and therefore with the divergence theorem (B.59)

$$\int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi q(V), \tag{3.6}$$

das heißt der elektrische Fluß des Feldes $\mathbf{E}$ durch die Oberfläche ist das 4π-fache der Ladung q im Volumen V.

id est the electric flux of the field $\mathbf{E}$ through the surface equals 4π times the charge q in the volume V.

Eine einfache Anwendung hat dies für das elektrische Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$ mit $r = |\mathbf{r}|$. Aus Symmetriegründen weist das elektrische Feld in Normalenrichtung $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{r}/r$

This has a simple application for the electric field of a rotational invariant charge distribution $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$ with $r = |\mathbf{r}|$. For reasons of symmetry the electric field points in radial direction, $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{r}/r$

$$4\pi r^2 E(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' d\Omega = (4\pi)^2 \int_0^r \rho(r') r'^2 dr', \tag{3.7}$$

so dass man für das Feld

so that one obtains

$$E(r) = \frac{4\pi}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \tag{3.8}$$

erhält.

for the field.

Als Spezialfall betrachten wir jetzt noch eine Punktladung q im Ursprung. Dann gilt

As a special case we consider a point charge in the origin. Then one has

$$4\pi r^2 E(r) = 4\pi q, \quad E(r) = \frac{q}{r^2}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3} q. \tag{3.9}$$

Das Potential hängt aus Symmetriegründen nur von r ab. Dann gilt

The potential depends only on r for reasons of symmetry. Then one obtains

$$\text{grad}\,\Phi(r) = \frac{\mathbf{r}}{r}\frac{d\Phi(r)}{dr} = -\mathbf{E}(\mathbf{r}), \tag{3.10}$$

woraus durch Integration

which after integration yields

$$\Phi(r) = \frac{q}{r} + \text{const.} \tag{3.11}$$

folgt.

3.b.γ Potential einer Ladungsverteilung

Wir gehen aus von Punktladungen q_i an Orten $\mathbf{r}_i$. Das zugehörige Potential und die Feldstärke erhält man aus (3.11) und (3.10) durch Verschieben von $\mathbf{r}$ um $\mathbf{r}_i$ zu

3.b.γ Potential of a Charge Distribution

We start out from point charges q_i at locations $\mathbf{r}_i$. The corresponding potential and the field is obtained from (3.11) und (3.10) by shifting $\mathbf{r}$ by $\mathbf{r}_i$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} \tag{3.12}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\,\text{grad}\,\Phi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}. \tag{3.13}$$

Wir gehen nun von den Punktladungen zu einer Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ über. Wir führen dabei den Übergang $\sum_i q_i f(\mathbf{r}_i) = \sum_i \Delta V \rho(\mathbf{r}_i) f(\mathbf{r}_i)$ nach $\int d^3r' \rho(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}')$ durch, was

We change now from point charges to the charge density $\rho(\mathbf{r})$. To do this we perform the transition from $\sum_i q_i f(\mathbf{r}_i) = \sum_i \Delta V \rho(\mathbf{r}_i) f(\mathbf{r}_i)$ to $\int d^3r' \rho(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}')$, which yields

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{3.14}$$

ergibt. Aus $\mathbf{E} = -\,\text{grad}\,\Phi$ und $\text{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho$ folgt die Poisson-Gleichung

From $\mathbf{E} = -\,\text{grad}\,\Phi$ and $\text{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho$ one obtains Poisson's equation

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}). \tag{3.15}$$

Man unterscheide $\triangle = \nabla\cdot\nabla$ und Δ =Delta. Wir machen auf (3.15) die Probe. Zunächst bilden wir

Please distinguish $\triangle = \nabla\cdot\nabla$ and Δ =Delta. We check eq. (3.15). First we determine

$$\nabla\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|^3} = \int d^3a\, \rho(\mathbf{r}+\mathbf{a}) \frac{\mathbf{a}}{a^3} \tag{3.16}$$

und

and

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3a (\nabla\rho(\mathbf{r}+\mathbf{a}))\cdot\frac{\mathbf{a}}{a^3} = \int_0^\infty da \int d\Omega_a \frac{\partial\rho(\mathbf{r}+\mathbf{a})}{\partial a} = \int d\Omega_a (\rho(\mathbf{r}+\infty\mathbf{e}_a) - \rho(\mathbf{r})) = -4\pi\rho(\mathbf{r}), \tag{3.17}$$

wenn ρ im Unendlichen verschwindet. Dabei haben wir das dreidimensionale Integral über a zerlegt in das Integral über den Radius a und den Raumwinkel Ω_a, $d^3a = a^2 da d\Omega_a$ (vergleiche Abschnitt 5).

assuming that ρ vanishes at infinity. The three-dimensional integral over a has been separated by the integral over the radius a and the solid angle Ω_a, $d^3a = a^2 da d\Omega$ (compare section 5).

Aus der Poisson-Gleichung folgt

From Poisson's equation one obtains

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \triangle \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\rho(\mathbf{r}) = -4\pi \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{3.18}$$

und aus der Gleichheit der Integranden

and from the equality of the integrands

$$\triangle \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{3.19}$$

3.c Coulombkraft und Feldenergie

Auf die Ladung q_i am Ort $\mathbf{r}_i$ wirkt die Kraft

$$\mathbf{K}_i = q_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r}_i). \tag{3.20}$$

Dabei ist $\mathbf{E}_i$ das elektrische Feld ohne das von der Ladung q_i selbst erzeugte. Damit folgt

$$\mathbf{K}_i = q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}. \tag{3.21}$$

Aus dieser Formel erkennt man auch die Definition der Ladungseinheit im Gaußschen Maßsystem: 1 $\mathrm{dyn}^{1/2}$ cm ist die Ladung, die auf eine gleiche Ladung in 1 cm Entfernung die Kraft 1 dyn ausübt.

Die potentielle Energie ist

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Phi_i(\mathbf{r}_i). \tag{3.22}$$

Der Faktor $1/2$ rührt daher, dass jedes Paar von Ladungen in der Summe zweimal auftritt. So ist die Wechselwirkungsenergie zwischen Ladung 1 und Ladung 2 sowohl in $i = 1, j = 2$ wie auch in $i = 2, j = 1$ enthalten. Daher ist durch 2 zu dividieren. Dabei ist in Φ_i ebenfalls der von q_i herrührende Beitrag zum Potential nicht enthalten. Die Kraft folgt daraus wie üblich zu

$$\mathbf{K}_i = -\operatorname{grad}_{\mathbf{r}_i} U. \tag{3.23}$$

Im Kontinuum erhält man unter Verwendung von (B.62)

$$U = \frac{1}{2} \int d^3 r \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} \int d^3 r \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) - \frac{1}{8\pi} \int d^3 r \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}), \tag{3.24}$$

wobei jetzt der Beitrag der Ladungsdichte zu Φ am gleichen Ort nicht mehr auszunehmen ist, da er für eine kontinuierliche Verteilung vernachlässigbar ist. F schließe alle Ladungen ein und sei etwa eine Kugel vom Radius R. Im Limes $R \to \infty$ geht $\Phi \propto 1/R$, $E \propto 1/R^2$, $\int_F \propto 1/R \to 0$. Man erhält dann die elektrostatische Energie

$$U = \frac{1}{8\pi} \int d^3 r E^2(\mathbf{r}) = \int d^3 r \, u(\mathbf{r}) \tag{3.25}$$

mit der Energiedichte

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} E^2(\mathbf{r}). \tag{3.26}$$

3.c Coulomb Force and Field Energy

The force acting on the charge q_i at $\mathbf{r}_i$ is

$$\mathbf{K}_i = q_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r}_i). \tag{3.20}$$

Here $\mathbf{E}_i$ is the electric field without that generated by the charge q_i itself. Then one obtains

$$\mathbf{K}_i = q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}. \tag{3.21}$$

From this equation one realizes the definition of the unit of charge in Gauss's units, 1 $\mathrm{dyn}^{1/2}$ cm is the charge, which exerts on the same amount of charge in the distance of 1 cm the force 1 dyn.

The potential energy is

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Phi_i(\mathbf{r}_i). \tag{3.22}$$

The factor $1/2$ is introduced since each pair of charges appears twice in the sum. E.g., the interaction energy between charge 1 and charge 2 is contained both in $i = 1, j = 2$ and $i = 2, j = 1$. Thus we have to divide by 2. The contribution from q_i is excluded from the potential Φ_i. The force is then as usually

$$\mathbf{K}_i = -\operatorname{grad}_{\mathbf{r}_i} U. \tag{3.23}$$

In the continuum one obtains by use of (B.62)

$$U = \frac{1}{2} \int d^3 r \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} \int d^3 r \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) - \frac{1}{8\pi} \int d^3 r \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}), \tag{3.24}$$

where no longer the contribution from the charge density at the same location has to be excluded from Φ, since it is negligible for a continuous distribution. F should include all charges and may be a sphere of radius R. In the limit $R \to \infty$ one obtains $\Phi \propto 1/R$, $E \propto 1/R^2$, $\int_F \propto 1/R \to 0$. Then one obtains the electrostatic energy

$$U = \frac{1}{8\pi} \int d^3 r E^2(\mathbf{r}) = \int d^3 r \, u(\mathbf{r}) \tag{3.25}$$

with the energy density

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} E^2(\mathbf{r}). \tag{3.26}$$

Klassischer Elektronenradius Als Beispiel betrachten wir den "klassischen Elektronenradius" R_0: Man nimmt an, die Ladung sei auf einer Kugelschale vom Radius R_0 gleichmäßig verteilt. Die elektrische Feldenergie stimme mit der Energie $\mathrm{m_0 c^2}$ überein, wobei $\mathrm{m_0}$ die Elektronenmasse ist.

$$\frac{1}{8\pi}\int_{R_0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e_0}}{r^2}\right)^2 r^2 dr d\Omega = \frac{\mathrm{e_0^2}}{2R_0} = \mathrm{m_0 c^2} \tag{3.27}$$

ergibt $R_0 = 1.4 \cdot 10^{-13}$ cm. Die Annahme einer homogenen Ladungsverteilung in der Kugel ergibt ein etwas anderes Ergebnis.

Aus hochenergetischen Streuprozessen weiß man allerdings, dass die Ausdehnung des Elektrons um mindestens einen Faktor 100 kleiner sein muss, obige Annahme also unzutreffend ist.

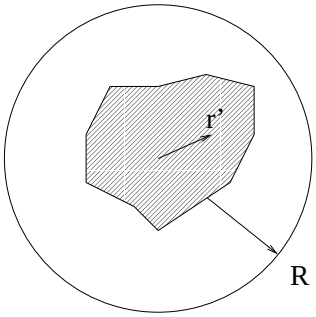
Classical Radius of the Electron As an example we consider the "classical radius of an electron" R_0: One assumes that the charge is homogeneously distributed on the surface of the sphere of radius R. The electric field energy should equal the energy $\mathrm{m_0 c^2}$, where $\mathrm{m_0}$ is the mass of the electron.

yields $R_0 = 1.4 \cdot 10^{-13}$ cm. The assumption of a homogeneous distribution of the charge inside the sphere yields a slightly different result.

From scattering experiments at high energies one knows that the extension of the electron is at least smaller by a factor of 100, thus the assumption made above does not apply.

4 Elektrischer Dipol und Quadrupol

Gegeben sei eine Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}')$ innerhalb einer Kugel vom Radius R um den Ursprung. Außerhalb sei $\rho(\mathbf{r}') = 0$.



4 Electric Dipole and Quadrupole

A charge distribution $\rho(\mathbf{r}')$ inside a sphere of radius R around the origin is given. We assume $\rho(\mathbf{r}') = 0$ outside the sphere.

4.a Das Feld für $r > R$

Das Potential der Ladungsverteilung ist

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{4.1}$$

Wir führen nun eine Taylor-Entwicklung nach $\mathbf{r}'$, das heißt nach den drei Variabeln x_1', x_2' und x_3' durch

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-\mathbf{r}'\nabla)^l}{l!} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - (\mathbf{r}'\nabla)\frac{1}{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{r}'\nabla)(\mathbf{r}'\nabla)\frac{1}{r} - \ldots \tag{4.2}$$

Als erstes müssen wir den Gradienten von $1/r$ berechnen

$$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \text{ da } \nabla f(r) = \frac{\mathbf{r}}{r} f'(r), \text{ since} \tag{4.3}$$

löse (B.39, B.42). Daraus folgt dann

$$(\mathbf{r}'\nabla)\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \tag{4.4}$$

Als nächstes berechnen wir (B.47)

$$\nabla\frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3}\,\mathrm{grad}\,(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{\mathbf{c}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \tag{4.5}$$

unter Verwendung von (B.27) und Lösung von (B.37, B.39). Damit erhalten wir die Taylor-Entwicklung

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2}{2r^5} + \ldots \tag{4.6}$$

Wir formen zunächst noch $3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2$ um

$$3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2 = x_\alpha' x_\beta' (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha,\beta}) = (x_\alpha' x_\beta' - \frac{1}{3} r'^2 \delta_{\alpha,\beta})(3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha,\beta}) \tag{4.7}$$

4.a The Field for $r > R$

The potential of the charge distribution is

We perform a Taylor-expansion in $\mathbf{r}'$, that is in the three variables x_1', x_2' und x_3'

At first we have to calculate the gradient of $1/r$

solve (B.39, B.42). Then one obtains

Next we calculate (B.47)

using (B.27) and the solutions of (B.37, B.39). Then we obtain the Taylor-expansion

At first we transform $3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2$

wegen $\delta_{\alpha,\beta}(3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha,\beta} r^2) = 3x_\alpha x_\alpha - r^2\delta_{\alpha,\alpha} = 0$. Hier und auch im Folgenden verwenden wir die Summationskonvention: Über alle Indices (von Komponenten), die zweimal in einem Produkt auftreten, wird summiert, in (4.7) also über α und β.

because of $\delta_{\alpha,\beta}(3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha,\beta} r^2) = 3x_\alpha x_\alpha - r^2\delta_{\alpha,\alpha} = 0$. Here and in the following we use the summation convention, that is we sum over all indices (of components), which appear twice in a product in (4.7), that is over α and β.

Wir führen nun die Größen

We now introduce the quantities

$$q = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \qquad \text{Ladung / charge} \tag{4.8}$$

$$\mathbf{p} = \int d^3r' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \qquad \text{Dipolmoment / dipolar moment} \tag{4.9}$$

$$Q_{\alpha,\beta} = \int d^3r' (x'_\alpha x'_\beta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha,\beta} r'^2)\rho(\mathbf{r}') \qquad \text{Komponenten des Quadrupolmoments / components of the quadrupolar moment} \tag{4.10}$$

ein und erhalten damit die Entwicklung für das Potential und die elektrische Feldstärke

and obtain the expansion for the potential and the electric field

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3} + Q_{\alpha,\beta}\frac{3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha,\beta}}{2r^5} + \mathrm{O}(\frac{1}{r^4}) \tag{4.11}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q\mathbf{r}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{p}r^2}{r^5} + \mathrm{O}(\frac{1}{r^4}) \tag{4.12}$$

4.b Transformationseigenschaften

Die Multipolmomente sind definiert bezüglich eines vorgegebenen Punktes, zum Beispiel des Ursprungs. Verschiebt man den Bezugspunkt um $\mathbf{a}$, das heißt $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}' - \mathbf{a}$, so findet man mit $\rho_1(\mathbf{r}'_1) = \rho(\mathbf{r}')$

4.b Transformation Properties

The multipole moments are defined with respect to a given point, for example with respect to the origin. If one shifts the point of reference by $\mathbf{a}$, that is $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}' - \mathbf{a}$, then one finds with $\rho_1(\mathbf{r}'_1) = \rho(\mathbf{r}')$

$$q_1 = \int d^3r'_1 \rho_1(\mathbf{r}'_1) = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') = q \tag{4.13}$$

$$\mathbf{p}_1 = \int d^3r'_1 \mathbf{r}'_1 \rho_1(\mathbf{r}'_1) = \int d^3r' (\mathbf{r}' - \mathbf{a})\rho(\mathbf{r}') = \mathbf{p} - \mathbf{a}q. \tag{4.14}$$

Die Gesamtladung ist unabhängig vom Bezugspunkt. Das Dipolmoment ist unabhängig vom Bezugspunkt, falls $q = 0$ (reiner Dipol), sonst hängt es vom Bezugspunkt ab. Ähnlich findet man, dass das Quadrupolmoment unabhängig vom Bezugspunkt ist, falls $q = 0$ und $\mathbf{p} = 0$ (reiner Quadrupol).

The total charge is independent of the point of reference. The dipolar moment is independent of the point of reference if $q = 0$ (pure dipol), otherwise it depends on the point of reference. Similarly one finds, that the quadrupolar moment is independent of the point of reference, if $q = 0$ and $\mathbf{p} = 0$ (pure quadrupole).

Unter Drehung $x'_{1,\alpha} = D_{\alpha,\beta}x'_\beta$ ist q invariant (Skalar), wobei D eine Drehmatrix sei, also eine orthogonale Transformation beschreibe. Der Dipol $\mathbf{p}$ transformiert sich wie ein Vektor

The charge q is invariant under rotation (scalar) $x'_{1,\alpha} = D_{\alpha,\beta}x'_\beta$, where D is a rotation matrix, which describes an orthogonal transformation. The dipole $\mathbf{p}$ transforms like a vector

$$p_{1,\alpha} = \int d^3r' D_{\alpha,\beta} x'_\beta \rho(\mathbf{r}') = D_{\alpha,\beta} p_\beta \tag{4.15}$$

und der Quadrupol Q wie ein Tensor zweiter Stufe

and the quadrupole Q like a tensor of rank 2

$$Q_{1,\alpha,\beta} = \int d^3r' (D_{\alpha,\gamma}x'_\gamma D_{\beta,\delta}x'_\delta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha,\beta} r'^2)\rho(\mathbf{r}'). \tag{4.16}$$

Beachtet man, dass auf Grund der Orthogonalität von D

Taking into account, that due to the orthogonality of D

$$\delta_{\alpha,\beta} = D_{\alpha,\gamma} D_{\beta,\gamma} = D_{\alpha,\gamma} \delta_{\gamma,\delta} D_{\beta,\delta}, \tag{4.17}$$

so folgt

it follows that

$$Q_{1,\alpha,\beta} = D_{\alpha,\gamma} D_{\beta,\delta} Q_{\gamma,\delta}, \tag{4.18}$$

also das Transformationsgesetz für Tensoren zweiter Stufe.

that is the transformation law for tensors of second rank.

4.c Dipol

4.c Dipole

Der Prototyp eines Dipols besteht aus einer Ladung q am Ort $\mathbf{r}_0 + \mathbf{a}$ und einer entgegengesetzten Ladung $-q$ am Ort $\mathbf{r}_0$. Das Dipolmoment beträgt dann

The prototype of a dipole consists of two charges of opposite sign, q at $\mathbf{r}_0 + \mathbf{a}$ and $-q$ at $\mathbf{r}_0$.

$$\mathbf{p} = q\mathbf{a}. \tag{4.19}$$

Als Ladungsverteilung ergibt sich dann

Therefore the corresponding charge distribution is

$$\rho(\mathbf{r}) = q(\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{a}) - \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)). \tag{4.20}$$

Wir führen nun eine Taylorentwicklung nach $\mathbf{a}$ durch

We perform now the Taylor expansion in $\mathbf{a}$

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - q\mathbf{a} \cdot \nabla \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \frac{q}{2}(\mathbf{a} \cdot \nabla)^2 \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \ldots - q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \tag{4.21}$$

wobei sich der erste mit dem letzten Term weghebt. Wir führen nun den Limes $\mathbf{a} \to 0$ durch, wobei wir das Produkt $q\mathbf{a} = \mathbf{p}$ festhalten. Dann bleibt als Ladungsverteilung eines Dipols $\mathbf{p}$ am Ort $\mathbf{r}_0$

where the first and the last term cancel. We consider now the limit $\mathbf{a} \to 0$, where the product $q\mathbf{a} = \mathbf{p}$ is kept fixed. Then we obtain the charge distribution of a dipole $\mathbf{p}$ at location $\mathbf{r}_0$

$$\rho(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \tag{4.22}$$

und sein Potential

and its potential

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\mathbf{p} \cdot \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \operatorname{grad}' \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) = \mathbf{p} \cdot \int d^3r' \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \\ &= \mathbf{p} \cdot \int d^3r' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}, \end{aligned} \tag{4.23}$$

wobei die Gleichungen (B.61) verwendet und (B.50) gelöst wurden.

where equation (B.61) is used and (B.50) has to be solved.

4.d Quadrupol

4.d Quadrupole

Der Quadrupol wird durch die zweiten Momente der Ladungsverteilung beschrieben.

The quadrupole is described by the second moment of the charge distribution.

4.d.α Symmetrien

4.d.α Symmetries

Q ist ein symmetrischer Tensor

Q is a symmetric tensor

$$Q_{\alpha,\beta} = Q_{\beta,\alpha}. \tag{4.24}$$

Er lässt sich daher ähnlich wie der Trägheitstensor durch eine orthogonale Transformation auf Diagonalform bringen. Weiterhin folgt aus der Definition (4.10)

It can be diagonalized by an orthogonal transformation similarly as the tensor of inertia. Further from definition (4.10) it follows that

$$Q_{\alpha,\alpha} = 0, \tag{4.25}$$

das heißt die Spur des Quadrupol-Tensors verschwindet. Daher hat der Tensor nicht sechs, sondern nur fünf unabhängige Komponenten.

that is the trace of the quadrupole tensor vanishes. Thus the tensor does not have six, but only five independent components.

4.d.β Symmetrischer Quadrupol

Ein Spezialfall ist der symmetrische Quadrupol. Seine Ladungsverteilung hängt nur von z und dem Abstand von der z-Achse ab, $\rho = \rho(z, \sqrt{x^2+y^2})$. Für ihn gilt

4.d.β Symmetric Quadrupole

A special case is the symmetric quadrupole. Its charge distribution depends only on z and on the distance from the z-axis, $\rho = \rho(z, \sqrt{x^2+y^2})$. It obeys

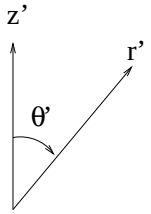
$$Q_{\mathrm{x,y}} = Q_{\mathrm{x,z}} = Q_{\mathrm{y,z}} = 0, \tag{4.26}$$

weil $\rho(x,y,z) = \rho(-x,y,z) = \rho(x,-y,z)$. Weiter ist

because $\rho(x,y,z) = \rho(-x,y,z) = \rho(x,-y,z)$. Furthermore one has

$$Q_{\mathrm{x,x}} = Q_{\mathrm{y,y}} = -\frac{1}{2}Q_{\mathrm{z,z}} =: -\frac{1}{3}\hat{Q}. \tag{4.27}$$

Die erste Gleichung folgt aus $\rho(x,y,z)=\rho(y,x,z)$, die zweite daraus, dass die Spur von Q verschwindet. Das letzte Gleichheitszeichen gibt die Definition von $\hat{Q}$ an.



The first equality follows from $\rho(x,y,z) = \rho(y,x,z)$, the second one from the vanishing of the trace of Q. The last equality-sign gives the definition of $\hat{Q}$.

Man findet

One finds

$$\hat{Q} = \frac{3}{2}Q_{\mathrm{z,z}} = \int d^3r' (\frac{3}{2}z'^2 - \frac{1}{2}r'^2)\rho(\mathbf{r}') = \int d^3r' r'^2 P_2(\cos\theta')\rho(\mathbf{r}') \tag{4.28}$$

mit dem Legendre-Polynom $P_2(\xi) = \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}$. Auf die Legendre-Polynome werden wir im nächsten Abschnitt und im Anhang C noch zurückkommen.

with the Legendre polynomial $P_2(\xi) = \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}$. We will return to the Legendre polynomials in the next section and in appendix C.

Als Beispiel betrachten wir noch den gestreckten Quadrupol mit zwei Ladungen q an den Orten $\pm a\mathbf{e}_\mathrm{z}$ und einer Ladung $-2q$ am Ursprung. Wir finden $\hat{Q} = 2qa^2$. Die einzelnen Ladungen tragen zum Quadrupolpotential

As an example we consider the stretched quadrupole with two charges q at $\pm a\mathbf{e}_\mathrm{z}$ and a charge $-2q$ in the origin. Then we obtain $\hat{Q} = 2qa^2$. The different charges contribute to the potential of the quadrupole

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{3}\hat{Q}\frac{3x^2-r^2}{2r^5} - \frac{1}{3}\hat{Q}\frac{3y^2-r^2}{2r^5} + \frac{2}{3}\hat{Q}\frac{3z^2-r^2}{2r^5} = \frac{\hat{Q}P_2(\cos\theta)}{r^3} \tag{4.29}$$

bei.

.

4.e Energie, Kraft und Drehmoment auf einen Multipol im äußeren Feld

4.e Energy, Force and Torque on a Multipole in an external Field

Eine Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$, die um den Ursprung lokalisiert sei, sei in einem äußeren elektrischen Potential $\Phi_\mathrm{a}(\mathbf{r})$, das etwa von einer entfernten Ladungsverteilung ρ_a erzeugt sei. Die Wechselwirkungsenergie beträgt dann

A charge distribution $\rho(\mathbf{r})$ localized around the origin is considered in an external electric potential $\Phi_\mathrm{a}(\mathbf{r})$, which may be generated by an external charge distribution ρ_a. The interaction energy is then given by

$$U = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \Phi_\mathrm{a}(\mathbf{r}). \tag{4.30}$$

Hier tritt kein Faktor 1/2 vor dem Integral auf, wie man es wegen (3.24) annehmen könnte, da zum Integral über $\rho(\mathbf{r})\Phi_\mathrm{a}(\mathbf{r})$ noch ein zweiter Beitrag mit dem Integral über $\rho_\mathrm{a}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})$ hinzutritt, der noch einmal den gleichen Beitrag liefert. Wir entwickeln nun das äußere Potential und erhalten für die Wechselwirkungsenergie

No factor 1/2 appears in front of the integral, which might be expected in view of this factor in (3.24), since besides the integral over $\rho(\mathbf{r})\Phi_\mathrm{a}(\mathbf{r})$ there is a second one over $\rho_\mathrm{a}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})$, which yields the same contribution. We now expand the external potential and obtain for the interaction energy

$$\begin{aligned} U &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \left\{ \Phi_\mathrm{a}(0) + \mathbf{r}\nabla\Phi_\mathrm{a}|_{r=0} + \frac{1}{2} x_\alpha x_\beta \, \nabla_\alpha \nabla_\beta \Phi_\mathrm{a}|_{r=0} + \ldots \right\} \\ &= q\Phi_\mathrm{a}(0) + \mathbf{p}\cdot\nabla\Phi_\mathrm{a}|_{r=0} + \frac{1}{2}\left(Q_{\alpha,\beta} + \frac{1}{3}\delta_{\alpha,\beta} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) r^2 \right) \nabla_\alpha \nabla_\beta \Phi_\mathrm{a}|_{r=0} + \ldots \end{aligned} \tag{4.31}$$

Der Beitrag proportional zum Integral über $\rho(\mathbf{r})r^2$ verschwindet, da $\nabla_\alpha\nabla_\alpha\Phi_\mathrm{a} = \triangle\Phi_\mathrm{a} = -4\pi\rho_\mathrm{a}(\mathbf{r}) = 0$, da sich am Ursprung keine Ladungen befinden, die Φ_a erzeugen. Damit bleibt für das Wechselwirkungs-Potential

The contribution proportional to the integral over $\rho(\mathbf{r})r^2$ vanishes, since $\nabla_\alpha\nabla_\alpha\Phi_\mathrm{a} = \triangle\Phi_\mathrm{a} = -4\pi\rho_\mathrm{a}(\mathbf{r}) = 0$, since there are no charges at the origin, which generate Φ_a. Therefore we are left with the potential of interaction

$$U = q\Phi_\mathrm{a}(0) - \mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_\mathrm{a}(0) + \frac{1}{2} Q_{\alpha,\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \Phi_\mathrm{a} + \ldots \tag{4.32}$$

Wir können daraus zum Beispiel die potentielle Energie zweier Dipole, $\mathbf{p}_\mathrm{b}$ im Ursprung und $\mathbf{p}_\mathrm{a}$ bei $\mathbf{r}_0$ bestimmen. Der Dipol $\mathbf{p}_\mathrm{a}$ erzeugt das Potential

For example we can now determine the potential energy between two dipoles, $\mathbf{p}_\mathrm{b}$ in the origin and $\mathbf{p}_\mathrm{a}$ at $\mathbf{r}_0$. The dipole $\mathbf{p}_\mathrm{a}$ generates the potential

$$\Phi_\mathrm{a}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}_\mathrm{a}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}. \tag{4.33}$$

Die Wechselwirkungsenergie ergibt sich dann zu (vgl. B.47)

Then the interaction energy yields (compare B.47)

$$U_\mathrm{a,b} = \mathbf{p}_\mathrm{b}\cdot\nabla\Phi_\mathrm{a}|_{r=0} = \frac{\mathbf{p}_\mathrm{a}\cdot\mathbf{p}_\mathrm{b}}{r_0^3} - \frac{3(\mathbf{p}_\mathrm{a}\cdot\mathbf{r}_0)(\mathbf{p}_\mathrm{b}\mathbf{r}_0)}{r_0^5}. \tag{4.34}$$

Die Kraft auf einen Dipol im Ursprung ergibt sich zu

The force on the dipole in the origin is then given by

$$\mathbf{K} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}_\mathrm{a}(\mathbf{r}) = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{E}_\mathrm{a}(0) + x_\alpha \nabla_\alpha \mathbf{E}_\mathrm{a}|_{r=0} + \ldots) = q\mathbf{E}_\mathrm{a}(0) + (\mathbf{p}\cdot\,\mathrm{grad}\,)\mathbf{E}_\mathrm{a}(0) + \ldots \tag{4.35}$$

Das Drehmoment auf einen Dipol im Ursprung ergibt sich zu

The torque on a dipole in the origin is given by

$$\mathbf{M}_\mathrm{mech} = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \times \mathbf{E}_\mathrm{a}(\mathbf{r}') = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_\mathrm{a}(0) + \ldots \tag{4.36}$$

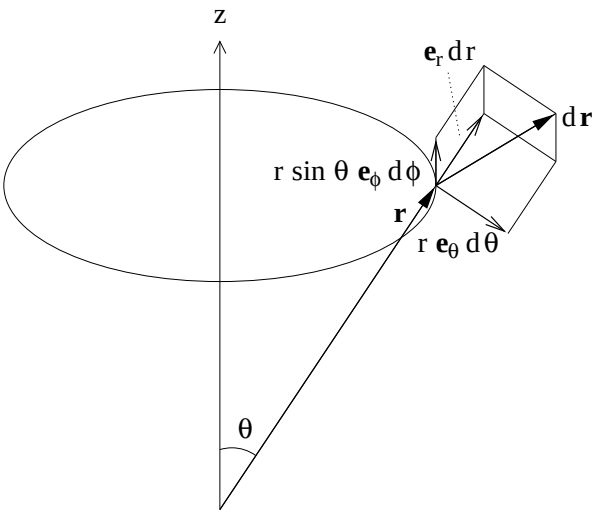
5 Multipol-Entwicklung in Kugelkoordinaten

5.a Poisson-Gleichung in Kugelkoordinaten

Wir leiten zunächst den Ausdruck für den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

$$x = r\sin\theta\cos\phi \tag{5.1}$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi \tag{5.2}$$
$$z = r\cos\theta \tag{5.3}$$

her. Dabei benützen wir zunächst nur, dass es sich dabei um krummlinige Koordinaten handelt, die sich unter rechtem Winkel schneiden, so dass wir



. Initially we use only that we deal with curvilinear coordinates which intersect at right angles, so that we may write

$$d\mathbf{r} = g_r\mathbf{e}_r dr + g_\theta\mathbf{e}_\theta d\theta + g_\phi\mathbf{e}_\phi d\phi \tag{5.4}$$

schreiben können, wobei die $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ und $\mathbf{e}_\phi$ eine orthonormierte ortsabhängige Basis bilden. Man findet leicht, dass

where the $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ and $\mathbf{e}_\phi$ constitute an orthonormal space dependent basis. Easily one finds

$$g_r = 1, \quad g_\theta = r, \quad g_\phi = r\sin\theta. \tag{5.5}$$

Das Volumenelement ist gegeben durch

The volume element is given by

$$d^3r = g_r dr g_\theta d\theta g_\phi d\phi = r^2 dr\sin\theta d\theta d\phi = r^2 dr d\Omega \tag{5.6}$$

mit dem Raumwinkelelement

with the element of the solid angle

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi. \tag{5.7}$$

5.a.α Der Gradient

Zur Berechnung des Gradienten betrachten wir das Differential einer Funktion $\Phi(\mathbf{r})$

5.a.α The Gradient

In order to determine the gradient we consider the differential of the function $\Phi(\mathbf{r})$

$$d\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\partial\Phi}{\partial r}dr + \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\Phi}{\partial\phi}d\phi, \tag{5.8}$$

5 Multipole Expansion in Spherical Coordinates

5.a Poisson-Equation in Spherical Coordinates

We first derive the expression for the Laplacian operator in spherical coordinates

die mit $(\operatorname{grad}\Phi)\cdot d\mathbf{r}$ übereinstimmen muss. Aus der Entwicklung des Vektorfeldes in seine Komponenten

which coincides with $(\operatorname{grad}\Phi)\cdot d\mathbf{r}$. From the expansion of the vector field in its components

$$\operatorname{grad}\Phi = (\operatorname{grad}\Phi)_r\mathbf{e}_r + (\operatorname{grad}\Phi)_\theta\mathbf{e}_\theta + (\operatorname{grad}\Phi)_\phi\mathbf{e}_\phi \tag{5.9}$$

und (5.4) folgt dann

and (5.4) it follows that

$$d\Phi(\mathbf{r}) = (\operatorname{grad}\Phi)_r g_r dr + (\operatorname{grad}\Phi)_\theta g_\theta d\theta + (\operatorname{grad}\Phi)_\phi g_\phi d\phi, \tag{5.10}$$

woraus wir

from which we obtain

$$(\operatorname{grad}\Phi)_r = \frac{1}{g_r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad (\operatorname{grad}\Phi)_\theta = \frac{1}{g_\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \quad (\operatorname{grad}\Phi)_\phi = \frac{1}{g_\phi}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \tag{5.11}$$

für die Komponenten des Gradienten erhalten.

for the components of the gradient.

5.a.β Die Divergenz

Zur Berechnung der Divergenz verwenden wir den Gaußschen Satz (B.59). Wir integrieren die Divergenz von $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ über ein Volumen begrenzt durch die Koordinaten $r, r+\Delta r$, $\theta, \theta+\Delta\theta$, $\phi, \phi+\Delta\phi$. Wir erhalten

5.a.β The Divergence

In order to calculate the divergence we use the divergence theorem (B.59). We integrate the divergence of $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ in a volume limited by the coordinates $r, r+\Delta r$, $\theta, \theta+\Delta\theta$, $\phi, \phi+\Delta\phi$. We obtain

$$\begin{aligned}
\int d^3r \operatorname{div}\mathbf{A} &= \int g_r g_\theta g_\phi \operatorname{div}\mathbf{A}\, dr d\theta d\phi \\
= \int \mathbf{A}\cdot d\mathbf{f} &= \int g_\theta d\theta g_\phi d\phi A_r\big|_r^{r+\Delta r} + \int g_r dr g_\phi d\phi A_\theta\big|_\theta^{\theta+\Delta\theta} + \int g_r dr g_\theta d\theta A_\phi\big|_\phi^{\phi+\Delta\phi} \\
&= \int \left[\frac{\partial}{\partial r}(g_\theta g_\phi A_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(g_r g_\phi A_\theta) + \frac{\partial}{\partial\phi}(g_r g_\theta A_\phi)\right] dr d\theta d\phi
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Da die Identität für beliebig kleine Volumina zutrifft, müssen die Integranden auf der rechten Seite der ersten Zeile und auf der dritten Zeile übereinstimmen. Daraus folgt

Since the identity holds for arbitrarily small volumina the integrands on the right-hand side of the first line and on the third line have to agree which yields

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{g_r g_\theta g_\phi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(g_\theta g_\phi A_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(g_r g_\phi A_\theta) + \frac{\partial}{\partial\phi}(g_r g_\theta A_\phi)\right]. \tag{5.13}$$

5.a.γ Der Laplace-Operator

Durch Bildung von $\triangle\Phi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi$ erhalten wir schließlich

5.a.γ The Laplacian

Using $\triangle\Phi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi$ we obtain finally

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{g_r g_\theta g_\phi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{g_\theta g_\phi}{g_r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{g_r g_\phi}{g_\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{g_r g_\theta}{g_\phi}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right)\right]. \tag{5.14}$$

Diese Formel gilt noch generell für orthogonale krummlinige Koordinaten (wenn wir sie mit r, θ, ϕ bezeichnen). Setzen wir nun die Werte für g ein, so folgt für sphärische Koordinaten

This equation holds generally for curvilinear orthogonal coordinates (if we denote them by r, θ, ϕ). Substituting the values for g we obtain for spherical coordinates

$$\triangle\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2}\triangle_\Omega\Phi, \tag{5.15}$$

$$\triangle_\Omega\Phi = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}. \tag{5.16}$$

Der Operator $\triangle_\Omega$ wirkt nur auf die beiden Winkel θ und ϕ, aber nicht auf den Abstand r. Er wird auch Laplace-Operator auf der Kugel genannt.

The operator $\triangle_\Omega$ acts only on the two angels θ and ϕ, but not on the distance r. Therefore it is also called Laplacian on the sphere.

5.b Kugelflächenfunktionen

Wie wir im Anhang C näher ausführen, gibt es einen vollständigen Satz orthonormierter Funktionen $Y_{l,m}(\theta,\phi)$, $l = 0,1,2,...$, $m = -l,-l+1,...l$, die der Gleichung

5.b Spherical Harmonics

As will be explained in more detail in appendix C there is a complete set of orthonormal functions $Y_{l,m}(\theta,\phi)$, $l = 0,1,2,...$, $m = -l,-l+1,...l$, which obey the equation

$$\triangle_\Omega Y_{l,m}(\theta,\phi) = -l(l+1)Y_{l,m}(\theta,\phi) \tag{5.17}$$

genügen. Diese heißen Kugelflächenfunktionen. Vollständigkeit heißt: Ist $f(\theta,\phi)$ auf der Kugel differenzierbar und sind die Ableitungen beschränkt, so lässt sich $f(\theta,\phi)$ darstellen als konvergente Summe

. They are called spherical harmonics. Completeness means: If $f(\theta,\phi)$ is differentiable on the sphere and its derivatives are bounded, then $f(\theta,\phi)$ can be represented as a convergent sum

$$f(\theta,\phi) = \sum_{l,m} \hat{f}_{l,m} Y_{l,m}(\theta,\phi). \tag{5.18}$$

Daher führen wir jetzt die entsprechende Entwicklung für $\Phi(\mathbf{r})$ und $\rho(\mathbf{r})$ durch

Therefore we perform the corresponding expansion for $\Phi(\mathbf{r})$ and $\rho(\mathbf{r})$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \hat{\Phi}_{l,m}(r) Y_{l,m}(\theta,\phi), \tag{5.19}$$

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \hat{\rho}_{l,m}(r) Y_{l,m}(\theta,\phi). \tag{5.20}$$

Die Kugelflächenfunktionen sind orthonormal, das heißt, das Integral über den Raumwinkel ergibt

The spherical harmonics are orthonormal, that is, the integral over the solid angle yields

$$\int d\Omega Y^*_{l,m}(\theta,\phi) Y_{l',m'}(\theta,\phi) = \int d\phi \sin\theta d\theta Y^*_{l,m}(\theta,\phi) Y_{l',m'}(\theta,\phi) = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'}. \tag{5.21}$$

Diese Orthogonalitätsbeziehung können wir zur Berechnung der $\hat{\Phi}$ und $\hat{\rho}$ verwenden

This orthogonality relation can be used for the calculation of $\hat{\Phi}$ and $\hat{\rho}$

$$\begin{aligned} \int d\phi \sin\theta d\theta Y^*_{l,m}(\theta,\phi)\rho(\mathbf{r}) &= \sum_{l',m'} \hat{\rho}_{l',m'}(r) \int d\phi \sin\theta d\theta Y^*_{l,m}(\theta,\phi) Y_{l',m'}(\theta,\phi) \\ = \sum_{l',m'} \hat{\rho}_{l',m'}(r)\delta_{l,l'}\delta_{m,m'} &= \hat{\rho}_{l,m}(r). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Wir geben hier einige der Kugelflächenfunktionen an

We list some of the spherical harmonics

$$Y_{0,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \tag{5.23}$$

$$Y_{1,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \tag{5.24}$$

$$Y_{1,\pm1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi} \tag{5.25}$$

$$Y_{2,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) \tag{5.26}$$

$$Y_{2,\pm 1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi} \tag{5.27}$$

$$Y_{2,\pm 2}(\theta,\phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}. \tag{5.28}$$

Allgemein ist

In general one has

$$Y_{l,m}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{5.29}$$

mit den zugeordneten Legendre-Funktionen

with the associated Legendre functions

$$P_l^m(\xi) = \frac{(-)^m}{2^l l!}(1-\xi^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}}(\xi^2-1)^l. \tag{5.30}$$

Generell ist $Y_{l,m}$ das Produkt aus $(\sin\theta)^{|m|}e^{im\phi}$ und einem Polynom der Ordnung $l-|m|$ in $\cos\theta$. Je nachdem, ob $l-|m|$ gerade oder ungerade ist, handelt es sich dabei um ein gerades oder ungerades Polynom in $\cos\theta$. Es gilt die Symmetrie-Beziehung

Generally $Y_{l,m}$ is a product of $(\sin\theta)^{|m|}e^{im\phi}$ and a polynomial of order $l-|m|$ in $\cos\theta$. If $l-|m|$ is even (odd), then this polynomial is even (odd) in $\cos\theta$. There is the symmetry relation

$$Y_{l,-m}(\theta,\phi) = (-)^m Y_{l,m}^*(\theta,\phi). \tag{5.31}$$

5.c Radialgleichung und Multipol-Momente

Unter Verwendung der Entwicklung von Φ und ρ nach den Kugelflächenfunktionen lautet die Poisson-Gleichung nun

5.c Radial Equation and Multipole Moments

Using the expansion of Φ and ρ in spherical harmonics the Poisson equation reads

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l,m}\left(\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\hat{\Phi}_{l,m}(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2}\hat{\Phi}_{l,m}(r)\right)Y_{l,m}(\theta,\phi) = -4\pi\sum_{l,m}\hat{\rho}_{l,m}(r)Y_{l,m}(\theta,\phi). \tag{5.32}$$

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten von $Y_{l,m}$ erhalten wir die Radialgleichungen

Equating the coefficients of $Y_{l,m}$ we obtain the radial equations

$$\hat{\Phi}''_{l,m}(r) + \frac{2}{r}\hat{\Phi}'_{l,m}(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\hat{\Phi}_{l,m}(r) = -4\pi\hat{\rho}_{l,m}(r). \tag{5.33}$$

Die Lösung der homogenen Gleichung lautet

The solution of the homogeneous equation reads

$$\hat{\Phi}_{l,m}(r) = a_{l,m}r^l + b_{l,m}r^{-l-1}. \tag{5.34}$$

Für die inhomogene Gleichung macht man nun wie üblich den Ansatz (ich lasse im Moment die Indices l und m weg.)

For the inhomogeneous equation we introduce the conventional ansatz (at present I suppress the indices l and m.)

$$\hat{\Phi} = a(r)r^l + b(r)r^{-l-1}. \tag{5.35}$$

Dann folgt

Then one obtains

$$\hat{\Phi}' = a'(r)r^l + b'(r)r^{-l-1} + la(r)r^{l-1} - (l+1)b(r)r^{-l-2}. \tag{5.36}$$

Wir fordern nun wie üblich

As usual we require

$$a'(r)r^l + b'(r)r^{-l-1} = 0 \tag{5.37}$$

und erhalten dann für die zweite Ableitung

and obtain for the second derivative

$$\hat{\Phi}'' = la'(r)r^{l-1} - (l+1)b'(r)r^{-l-2} + l(l-1)a(r)r^{l-2} + (l+1)(l+2)b(r)r^{-l-3}. \tag{5.38}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Radialgleichung ein, so heben sich die Anteile, die a und b ohne Ableitung enthalten, weg. Es bleibt

After substitution into the radial equation the contributions which contain a and b without derivative cancel. We are left with

$$la'(r)r^{l-1} - (l+1)b'(r)r^{-l-2} = -4\pi\hat{\rho}, \tag{5.39}$$

Aus den Gleichungen (5.37) und (5.39) folgt dann durch Auflösen nach a' und b'

From the equations (5.37) and (5.39) one obtains by solving for a' and b'

$$\frac{da_{l,m}(r)}{dr} = -\frac{4\pi}{2l+1} r^{1-l}\hat{\rho}_{l,m}(r), \tag{5.40}$$

$$\frac{db_{l,m}(r)}{dr} = \frac{4\pi}{2l+1} r^{l+2}\hat{\rho}_{l,m}(r). \tag{5.41}$$

Wir integrieren nun die Gleichungen

Now we integrate these equations

$$a_{l,m}(r) = \frac{4\pi}{2l+1}\int_r^\infty dr' r'^{1-l}\hat{\rho}_{l,m}(r') \tag{5.42}$$

$$b_{l,m}(r) = \frac{4\pi}{2l+1}\int_0^r dr' r'^{l+2}\hat{\rho}_{l,m}(r'). \tag{5.43}$$

Addieren wir eine Konstante zu $a_{l,m}(r)$, so ist dies auch eine Lösung der Poisson-Gleichung, da $r^l Y_{l,m}(\theta,\phi)$ homogene Lösung der Poisson-Gleichung ist. Wir wünschen aber eine Lösung, die für großes r abfällt. Daher wählen wir $a_{l,m}(\infty) = 0$. Addieren wir eine Konstante zu $b_{l,m}$, so ist das eine Lösung für $r \neq 0$. Für $r = 0$ hingegen erhält man eine Singularität, die die Poisson-Gleichung nicht erfüllt. Daher muss man $b_{l,m}(0) = 0$ setzen.

If we add a constant to $a_{l,m}(r)$, then this is a solution of the Poisson-equation too, since $r^l Y_{l,m}(\theta,\phi)$ is a homogeneous solution of the Poisson-equation. We request a solution, which decays for large r. Therefore we choose $a_{l,m}(\infty) = 0$. If we add a constant to $b_{l,m}$, then this is a solution for $r \neq 0$. For $r = 0$ however, one obtains a singularity, which does not fulfil the Poisson-equation. Therefore $b_{l,m}(0) = 0$ is required.

Wir können nun die Entwicklungs-Koeffizienten $\hat{\rho}_{l,m}$ einsetzen und erhalten

We may now insert the expansion coefficients $\hat{\rho}_{l,m}$ and obtain

$$a_{l,m}(r) = \frac{4\pi}{2l+1}\int_{r'>r} d^3r' r'^{-1-l} Y^*_{l,m}(\theta',\phi')\rho(\mathbf{r}') \tag{5.44}$$

$$b_{l,m}(r) = \frac{4\pi}{2l+1}\int_{r'<r} d^3r' r'^{l} Y^*_{l,m}(\theta',\phi')\rho(\mathbf{r}'). \tag{5.45}$$

Wir können nun die Ausdrücke für $a_{l,m}$ und $b_{l,m}$ in (5.19) und (5.35) einsetzen. Die r- und r'-Abhängigkeit ergibt sich für $r < r'$ aus dem a-Term zu r^l/r'^{l+1} und für $r > r'$ aus dem b-Term zu r'^l/r^{l+1}. Dies fasst man zusammen, indem man mit $r_>$ den größeren, mit $r_<$ den kleineren der beiden Radien r und r' bezeichnet. Dann folgt

We may now insert the expressions for $a_{l,m}$ und $b_{l,m}$ into (5.19) and (5.35). The r- und r'-dependence is obtained for $r < r'$ from the a-term as r^l/r'^{l+1} and for $r > r'$ from the b-term as r'^l/r^{l+1}. This can be put together, if we denote by $r_>$ the larger, by $r_<$ the smaller of both radii r and r'. Then one has

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}\int d^3r' \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\rho(\mathbf{r}')Y^*_{l,m}(\theta',\phi')Y_{l,m}(\theta,\phi). \tag{5.46}$$

Ist $\rho(\mathbf{r}') = 0$ für $r' > R$, dann folgt für $r > R$

If $\rho(\mathbf{r}') = 0$ for $r' > R$, then one obtains for $r > R$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l,m}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}q_{l,m}\frac{Y_{l,m}(\theta,\phi)}{r^{l+1}} \tag{5.47}$$

mit den Multipolmomenten

$$q_{l,m} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int d^3r' r'^l Y^*_{l,m}(\theta', \phi')\rho(\mathbf{r}'). \tag{5.48}$$

Für $l = 0$ erhalten wir das "Monopolmoment" Ladung, für $l = 1$ haben wir die Komponenten des Dipol-Moments, für $l = 2$ die Komponenten des Quadrupolmoments. Speziell für $m = 0$ hat man

with the multipole moments

For $l = 0$ one obtains the "monopole moment" charge, for $l = 1$ the components of the dipole moment, for $l = 2$ the components of the quadrupole moment. In particular for $m = 0$ one has

$$q_{0,0} = \sqrt{4\pi} \int d^3r' \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \rho(\mathbf{r}') = q \tag{5.49}$$

$$q_{1,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int d^3r' \sqrt{\frac{3}{4\pi}} r' \cos\theta' \rho(\mathbf{r}') = \int d^3r' z' \rho(\mathbf{r}') = p_z \tag{5.50}$$

$$q_{2,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \int d^3r' \sqrt{\frac{5}{4\pi}} r'^2 (\frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2})\rho(\mathbf{r}') = \int d^3r' (\frac{3}{2} z'^2 - \frac{1}{2} r'^2)\rho(\mathbf{r}') = \frac{3}{2} Q_{zz}. \tag{5.51}$$

5.d Punktladung am Ort r′, zylindersymmetrische Ladungsverteilung

Wir betrachten jetzt noch den Fall einer Punktladung q am Ort $\mathbf{r}'$. Wir können ausgehen von dem bekannten Potential

5.d Point Charge at r′, Cylindric Charge Distribution

Finally we consider the case of a point charge q located at $\mathbf{r}'$. We start from the potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{q}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\psi}}. \tag{5.52}$$

Dabei ist ψ der Winkel zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$. Wir entwickeln nun nach $r_</r_>$

Here ψ is the angle between $\mathbf{r}$ and $\mathbf{r}'$. We expand in $r_</r_>$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r_> \sqrt{1 + (\frac{r_<}{r_>})^2 - 2\frac{r_<}{r_>}\cos\psi}} = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\psi). \tag{5.53}$$

Dabei bezeichnet man $P_l(\xi)$ als Legendre-Polynome. Für $\cos\psi = \pm 1$ sieht man sofort aus der Entwicklung von $1/(r_> \mp r_<)$, dass $P_l(1) = 1$ und $P_l(-1) = (-)^l$ gilt.

The $P_l(\xi)$ are called Legendre-polynomials. For $\cos\psi = \pm 1$ one sees immediately from the expansion of $1/(r_> \mp r_<)$, that $P_l(1) = 1$ and $P_l(-1) = (-)^l$ hold.

Wir können andererseits auch mit (5.46) arbeiten und finden

On the other hand we may work with (5.46) and find

$$\Phi(\mathbf{r}) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{l,m}(\theta, \phi) Y^*_{l,m}(\theta', \phi'). \tag{5.54}$$

Durch Vergleich findet man das Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen

By comparison we obtain the addition theorem for spherical harmonics

$$P_l(\cos\psi) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{l,m}(\theta, \phi) Y^*_{l,m}(\theta', \phi'), \tag{5.55}$$

wobei sich der Winkel ψ zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ ausdrücken lässt durch $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = rr' \cos\psi$ und unter Verwendung von (5.1-5.3)

where the angle ψ between $\mathbf{r}$ and $\mathbf{r}'$ can be expressed by $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = rr' \cos\psi$ and by use of (5.1-5.3)

$$\cos\psi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi'). \tag{5.56}$$

Wir betrachten jetzt noch den Spezialfall $\theta' = 0$, das heißt $\psi = \theta$. Dann verschwinden alle $Y_{l,m}(\theta', \phi')$ wegen der Faktoren $\sin\theta'$ außer denen für $m = 0$ und das Additions-Theorem reduziert sich auf

We consider now the special case $\theta' = 0$, that is $\psi = \theta$. Then all $Y_{l,m}(\theta', \phi')$ vanish because of the factors $\sin\theta'$ with the exception of the term for $m = 0$ and the addition theorem is reduced to

$$P_l(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2l+1} Y_{l,0}(\theta) Y_{l,0}(0) = P_l^0(\cos\theta) P_l^0(1). \tag{5.57}$$

Aus der Darstellung (5.30) $P_l^0(\xi) = 1/(2^l l!) d^l(\xi^2-1)^l/d\xi^l$ folgt für $\xi = 1$ und Zerlegen $(\xi^2-1)^l = (\xi+1)^l(\xi-1)^l$ das Ergebnis $P_l^0(1) = [(\xi+1)^l/2^l]_{\xi=1}[d^l(\xi-1)^l/d\xi^l/l!]_{\xi=1} = 1$. Damit haben wir gefunden, dass

From the representation (5.30) $P_l^0(\xi) = 1/(2^l l!) d^l(\xi^2-1)^l/d\xi^l$ one obtains for $\xi = 1$ and the decomposition $(\xi^2-1)^l = (\xi+1)^l(\xi-1)^l$ the result $P_l^0(1) = [(\xi+1)^l/2^l]_{\xi=1}[d^l(\xi-1)^l/d\xi^l/l!]_{\xi=1} = 1$. Thus we have

$$P_l^0(\xi) = P_l(\xi) \tag{5.58}$$

gilt.

.

Speziell für zylindersymmetrische Verteilungen $\rho(\mathbf{r})$, die also nur von r und θ, aber nicht von ϕ abhängen, gilt dann

In particular for a cylinder symmetric charge distribution $\rho(\mathbf{r})$, which therefore depends only on r and θ, but not on ϕ, one has

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_l \frac{P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}} q_{l,0} \tag{5.59}$$

mit den Momenten

with the moments

$$q_{l,0} = \int d^3r' r'^l P_l(\cos\theta') \rho(\mathbf{r}'). \tag{5.60}$$

Alle Momente mit $m \neq 0$ verschwinden für die zylindersymmetrische Verteilung.

All moments with $m \neq 0$ vanish for a cylinder symmetric distribution.

Aufgabe Berechnen Sie aus (5.1) bis (5.5) die Vektoren $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ und $\mathbf{e}_\phi$ und prüfen Sie nach, dass diese ein Orthonormalsystem bilden.

Exercise Calculate the vectors $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ and $\mathbf{e}_\phi$ from (5.1) to (5.5) and check, that they constitute an orthonormal basis.

Aufgabe Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes (B.56) die Rotation in Kugelkoordinaten

Exercise Calculate by means of Stokes' theorem (B.56) the curl in spherical coordinates

Aufgabe Berechnen Sie für Zylinderkoordinaten $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$ und z die metrischen Faktoren g_ρ, g_ϕ und g_z, das Volumenelement und Gradient und Divergenz.

Exercise Calculate for cylindric coordinates $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$ and z the metric factors g_ρ, g_ϕ and g_z, the volume element and gradient and divergence.

6 Elektrisches Feld in Materie

6.a Polarisation und dielektrische Verschiebung

Die bisher aufgestellten Feldgleichungen gelten auch in Materie. Auf ein äußeres elektrisches Feld reagiert die Materie im allgemeinen durch Polarisation. Die Elektronen verschieben sich gegenüber den Kernen, wodurch Dipole entstehen, oder bereits existierende Dipole von Molekülen oder Molekülgruppen richten sich gegen die thermische Bewegung aus. Ein elektrisches Feld bewirkt also die Verschiebung von Ladungen q_i vom Ort $\mathbf{r}_i$ zum Ort $\mathbf{r}_i + \mathbf{a}_i$, das heißt Dipole $\mathbf{p}_i = q_i\mathbf{a}_i$ werden induziert. Man erhält die Ladungsverteilung oder Polarisationsladungen (4.22)

$$\rho_{\mathrm{P}}(\mathbf{r}) = -\sum_i \mathbf{p}_i \,\mathrm{grad}\,\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i). \tag{6.1}$$

Führen wir eine Dipolmomentdichte $\mathbf{P}$ ein, die man als Polarisation bezeichnet,

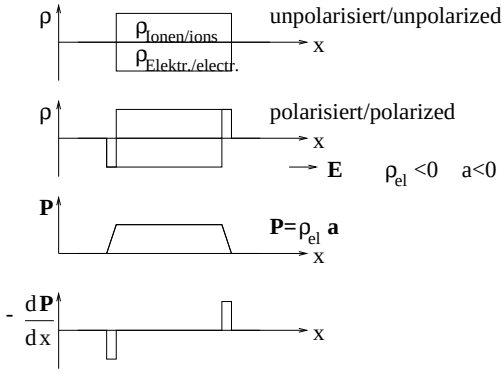
$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V}, \tag{6.2}$$

so folgt

$$\rho_{\mathrm{P}}(\mathbf{r}) = -\int d^3r'\mathbf{P}(\mathbf{r}')\,\mathrm{grad}\,\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\,\mathrm{div}\left(\int d^3r'\mathbf{P}(\mathbf{r}')\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right) = -\,\mathrm{div}\,\mathbf{P}(\mathbf{r}). \tag{6.3}$$

Wir veranschaulichen diese Gleichung. Wir gehen aus von einem Festkörper, in dem sich (auf einer Skala groß gegen den Atomabstand) die Ladungen der Ionen und Elektronen kompensieren (oberste Figur).

Legt man ein Feld $\mathbf{E}$ an, so verschieben sich die Elektronen gegenüber den Ionen (zweite Figur). Im Inneren hat man Ladungskompensation. Nur am Rand bleiben Netto-Ladungen übrig. Im dritten Bild ist die Polarisation $\mathbf{P} = \rho_{\mathrm{el}}\mathbf{a}$ aufgezeichnet, wobei diese am Rand stetig ausgeschmiert wurde.



6 Electric Field in Matter

6.a Polarization and Dielectric Displacement

The field equations given by now are also valid in matter. In general matter reacts in an external electric field by polarization. The electrons move with respect to the positively charged nuclei, thus generating dipoles, or already existing dipoles of molecules or groups of molecules order against thermal disorder. Thus an electric field displaces the charges q_i from $\mathbf{r}_i$ to $\mathbf{r}_i + \mathbf{a}_i$, that is dipoles $\mathbf{p}_i = q_i\mathbf{a}_i$ are induced. One obtains a charge distribution or polarization charges (4.22)

Introducing a density of dipole moments $\mathbf{P}$ called polarization

one obtains

Let us visualize this equation. We start out from a solid body, in which the charges of the ions and electrons (on a scale large in comparison to the distance between the atoms) compensate (upper figure).

If one applies a field $\mathbf{E}$ then the electrons move against the ions (second figure). Inside the bulk the charges compensate. Only at the boundaries a net-charge is left. In the third figure the polarization $\mathbf{P} = \rho_{\mathrm{el}}\mathbf{a}$ is shown, which has been continuously smeared at the boundary.

Im letzten Bild ist die Ableitung $-d\mathbf{P}/dx$ aufgetragen. Man sieht, dass die das letzte Bild mit der Ladungsdichte im zweiten übereinstimmt.

The last figure shows the derivative $-d\mathbf{P}/dx$. One sees, that this picture agrees with the charge distribution in the second one.

Damit setzt sich die Ladungsdichte ρ zusammen aus einer freibeweglichen Ladungsdichte ρ_f und der Polarisations-Ladungsdichte ρ_P (erstere kann zum Beispiel die Ladungsdichte sein, die auf eine Kondensatorplatte aufgebracht wird)

Thus the charge density ρ consists of the free moving charge density ρ_f and the charge density of the polarization ρ_P (the first one may be the charge density on the plates of a condensator)

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + \rho_\mathrm{P}(\mathbf{r}) = \rho_\mathrm{f}(\mathbf{r}) - \operatorname{div}\mathbf{P}(\mathbf{r}). \tag{6.4}$$

Damit führt man in der Maxwellgleichung

Thus one introduces in Maxwell's equation

$$\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}) = 4\pi\rho_\mathrm{f}(\mathbf{r}) - 4\pi\operatorname{div}\mathbf{P}(\mathbf{r}) \tag{6.5}$$

die dielektrische Verschiebung $\mathbf{D}$ ein

the dielectric displacement $\mathbf{D}$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + 4\pi\mathbf{P}(\mathbf{r}), \tag{6.6}$$

so dass

so that

$$\operatorname{div}\mathbf{D}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho_\mathrm{f}(\mathbf{r}) \tag{6.7}$$

gilt. Für den Fluss der dielektrischen Verschiebung durch die Oberfläche eines Volumens erhält man dann die freibewegliche Ladung $q_\mathrm{f}(V)$ in diesem Volumen

holds. The flux of the dielectric displacement through the surface of a volume yields the free charge q_f inside this volume

$$\int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r}) = 4\pi q_\mathrm{f}(V). \tag{6.8}$$

Für viele Substanzen sind bei nicht zu großer Feldstärke $\mathbf{P}$ und $\mathbf{E}$ in guter Näherung proportional

For many substances $\mathbf{P}$ and $\mathbf{E}$ are within good approximation proportional as long as the field intensity $\mathbf{E}$ is not too large

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \chi_\mathrm{e}\mathbf{E}(\mathbf{r}) \qquad \chi_\mathrm{e} \begin{matrix}\text{elektrische Suszeptibilität}\\ \text{electric susceptibility}\end{matrix} \tag{6.9}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}) \qquad \epsilon \begin{matrix}\text{(relative) Dielektrizitätskonstante}\\ \text{relative dielectric constant}\end{matrix} \tag{6.10}$$

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_\mathrm{e}. \tag{6.11}$$

χ_e und ϵ sind Tensoren für anisotrope Materialien, sonst Skalare. Bei Ferroelektrika ist $\mathbf{P}$ bereits für $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ von $\mathbf{0}$ verschieden. Allerdings ist die Polarisationsladung meist durch Oberflächenladungen kompensiert. Doch wird sie offensichtlich, wenn die Polarisation durch äußere Änderungen verändert wird, zum Beispiel durch Druck beim Quarz (Piezoelektrizität) oder Temperaturveränderung.

χ_e and ϵ are tensors for anisotropic matter, otherwise scalars. For ferroelectrica $\mathbf{P}$ is different from $\mathbf{0}$ already for $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. However, in most cases it is compensated by surface charges. But it is observed, when the polarization is varied by external changes like pressure in the case of quartz (piezo-electricity) or under change of temperature.

Im Gaußschen System sind die Dimensionen von $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ und $\mathbf{P}$ übereinstimmend $\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}$. Im SI-System wird aber $\mathbf{E}$ in V/m, $\mathbf{D}$ und $\mathbf{P}$ in $\mathrm{As/m}^2$ gemessen. Da das SI-System ein rationales Maßsystem ist, das Gaußsche ein irrationales, unterscheiden sich die Umrechnungsfaktor für $\mathbf{D}$ und $\mathbf{P}$ um 4π.

In Gaussian units the dimensions of $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ und $\mathbf{P}$ agree to $\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}$. In the SI-system $\mathbf{E}$ is measured in V/m, $\mathbf{D}$ and $\mathbf{P}$ in $\mathrm{As/m}^2$. Since the SI-system is a rational system of units, the Gaussian an irrational one, the conversion factors for $\mathbf{D}$ and $\mathbf{P}$ differ by a factor 4π.

Dementsprechend unterscheiden sich auch die χ_e in beiden Systemen um einen Faktor 4π. Dagegen sind die relativen Dielektrizitätskonstanten ϵ identisch. Genaueres findet sich im Anhang A.

6.b Grenzflächen zwischen Dielektrika

Wir betrachten nun die Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika oder Dielektrikum und Vakuum. Aus der Maxwellgleichung $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}$ folgt, dass die Komponenten des elektrischen Feldes tangential zur Grenzfläche in beiden Dielektrika übereinstimmen

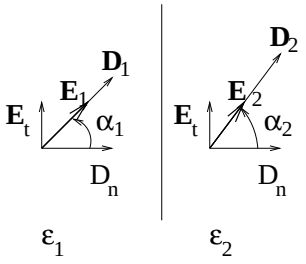
$$\mathbf{E}_{1,\mathrm{t}} = \mathbf{E}_{2,\mathrm{t}}. \tag{6.12}$$

Um dies zu sehen, muss man nur ein Linienintegral $\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$, das parallel zur Grenzfläche in einem Dielektrikum hin, im anderen zurückführt, ausführen und in das Flächenintegral $\int d\mathbf{f} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ überführen. Man sieht dann, dass das Linienintegral verschwindet. Sind die Integrationswege in den beiden Dielektrika infinitesimal benachbart, so folgt, da das für beliebige Wege gilt, dass $\mathbf{E}_\mathrm{t}$ in beiden Dielektrika übereinstimmen muss.

Andererseits können wir ein "Gaußsche Dose" einführen, deren Deckfläche infinitesimal von der Grenzfläche entfernt in einem Dielektrikum und deren Grundfläche ebenfalls infinitesimal von der Grenzfläche im anderen Dielektrikum verläuft. Sind auf der Grenzfläche keine freibeweglichen Ladungen, so gilt $\int_V d^3r\,\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 0$, was dazu führt, dass man auf der Oberfläche $\int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{D} = 0$ hat. Rückt man die Oberfläche nun an die Grenzfläche heran, so folgt die Stetigkeit der Normalkomponenten von $\mathbf{D}$

$$D_{1,\mathrm{n}} = D_{2,\mathrm{n}}. \tag{6.13}$$

Schließt das elektrische Feld (in isotropen Dielektrika) mit der Flächennormalen die Winkel α_1 und α_2 ein, so gilt



$$E_1 \sin\alpha_1 = E_2 \sin\alpha_2 \tag{6.14}$$

$$D_1 \cos\alpha_1 = D_2 \cos\alpha_2 \tag{6.15}$$

Consequently the χ_e differ in both systems by a factor 4π. However, the relative dielectric constants ϵ are identical. For more details see appendix A.

6.b Boundaries between Dielectric Media

We now consider the boundary between two dielectric media or a dielectric material and vacuum. From Maxwell's equation $\mathrm{curl}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}$ it follows that the components of the electric field parallel to the boundary coincides in both dielectric media

In order to see this one considers the line integral $\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$ along the closed contour which runs tangential to the boundary in one dielectric and returns in the other one, and transforms it into the integral $\int d\mathbf{f} \cdot \mathrm{curl}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ over the enclosed area. One sees, that the integral over the contour vanishes. If the paths of integration in both dielectrica are infinitesimally close to each other, then $\mathbf{E}_\mathrm{t}$ vanishes, since the integral over the contour vanishes for arbitrary paths.

On the other hand we may introduce a "pill box", whose covering surface is in one medium, the basal surface in the other one, both infinitesimally separated from the boundary. If there are no free charges at the boundary, then $\int_V d^3r\,\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 0$, so that the integral $\int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{D} = 0$ over the surface vanishes. If the surface approaches the boundary, then it follows, that the normal component of $\mathbf{D}$ is continuous

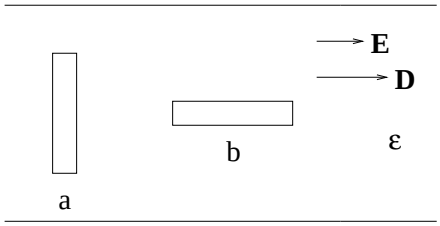
If the angle between the electric field (in an isotropic medium) and the normal to the boundary are α_1 and α_2 then one has

$$\frac{\tan\alpha_1}{\epsilon_1} = \frac{\tan\alpha_2}{\epsilon_2}. \tag{6.16}$$

Wir betrachten jetzt einen Hohlraum im Dielektrikum. Ist der Hohlraum sehr dünn in Richtung des Feldes (a) und in beiden dazu senkrechten Richtungen vergleichsweise sehr ausgedehnt, dann stimmt die dielektrische Verschiebung **D** im Hohlraum und im Dielektrikum überein.

We now consider a cavity in a dielectric medium. If the cavity is very thin in the direction of the field (a) and large in perpendicular direction like a pill box then the displacement **D** agrees in the medium and the cavity.

Handelt es sich dabei um einen sehr langgestreckten Hohlraum in Richtung des Feldes (b), so muss der Abfall des Potentials in dieser langgestreckten Richtung übereinstimmen, so dass im Inneren und im Äußeren des Hohlraums das elektrische Feld **E** übereinstimmt.



If on the other hand the cavity has the shape of a slot very long in the direction of the field (b), then the variation of the potential along this direction has to agree, so that inside and outside the cavity **E** coincides.

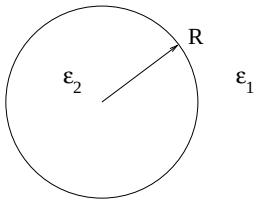
Daneben treten vor allem an den Rändern auch Streufelder auf. Es ist für Ellipsoide möglich, das Feld im Innern eines Hohlraums exakt zu berechnen. Siehe zum Beispiel im Buch von Becker und Sauter. Das Feld im Inneren des Ellipsoids ist homogen. Für die Kugel führen wir die Berechnung anschließend durch.

At the edges of the cavities will be scattered fields. It is possible to calculate the field exactly for ellipsoidal cavities. See for example the book by Becker and Sauter. The field is homogeneous inside the ellipsoid. The calculation for a sphere is given below.

6.c Dielektrische Kugel im homogenen elektrischen Feld

6.c Dielectric Sphere in a Homogeneous Electric Field

Wir betrachten eine dielektrische Kugel mit Radius R und Dielektrizitätskonstante ϵ_2, die in ein anderes Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante ϵ_1 eingebettet ist. Im Dielektrikum 1 herrsche in sehr großer Entfernung ein homogenes Feld



We consider a dielectric sphere with radius R and dielectric constant ϵ_2 inside a medium with dielectric constant ϵ_1. The electric field in the medium 1 be homogeneous at large distances

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1 = E_1\mathbf{e}_z \quad r \gg R. \tag{6.17}$$

Daraus folgt das Potential

Thus one obtains for the potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{r} = -E_1 r\cos\theta \quad r \gg R. \tag{6.18}$$

Da $\cos\theta$ das Legendre-Polynom $P_1(\cos\theta)$ ist, führt der Ansatz

Since $\cos\theta$ is the Legendre-polynomial $P_1(\cos\theta)$, the ansatz

$$\Phi(\mathbf{r}) = f(r)\cos\theta \tag{6.19}$$

zum Erfolg. Die Lösung der homogenen Poisson-Gleichung $\triangle(f(r)\cos\theta) = 0$ ist eine Linearkombination (5.34) aus $f(r) = r$ (homogenes Feld) und $f(r) = 1/r^2$ (Dipolfeld). Da am Ursprung kein makroskopischer Dipol sitzt, können wir ansetzen

is successful. The solution of the homogeneous Poisson equation $\triangle(f(r)\cos\theta) = 0$ is a linear combination (5.34) of $f(r) = r$ (homogeneous field) and $f(r) = 1/r^2$ (dipolar field). Since there is no dipole at the origin we may assume

$$\Phi(\mathbf{r}) = \cos\theta \cdot \begin{cases} -E_2 r & r \le R \\ -E_1 r + p/r^2 & r \ge R \end{cases} . \tag{6.20}$$

An der Grenzfläche gilt $\Phi(R+0) = \Phi(R-0)$, was identisch ist mit $\mathbf{E}_{1,\mathrm{t}} = \mathbf{E}_{2,\mathrm{t}}$ und auf

At the boundary one has $\Phi(R+0) = \phi(R-0)$, which is identical to $\mathbf{E}_{1,\mathrm{t}} = \mathbf{E}_{2,\mathrm{t}}$ and leads to

$$-E_1 R + \frac{p}{R^2} = -E_2 R \tag{6.21}$$

führt. Die Bedingung $D_{1,\mathrm{n}} = D_{2,\mathrm{n}}$ führt mit $D_{\mathrm{n}} = -\epsilon\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ auf

. The condition $D_{1,\mathrm{n}} = D_{2,\mathrm{n}}$ together with $D_{\mathrm{n}} = -\epsilon\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ yields

$$\epsilon_1(E_1 + \frac{2p}{R^3}) = \epsilon_2 E_2. \tag{6.22}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man

From these two equations one obtains

$$E_2 = \frac{3\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} E_1 \tag{6.23}$$

$$p = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} R^3 E_1. \tag{6.24}$$

Speziell für die dielektrische Kugel ($\epsilon_2 = \epsilon$) im Vakuum ($\epsilon_1 = 1$) folgt

. One obtains in particular for the dielectric sphere ($\epsilon_2 = \epsilon$) in the vacuum ($\epsilon_1 = 1$)

$$E_2 = \frac{3}{2+\epsilon} E_1, \quad p = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} R^3 E_1. \tag{6.25}$$

Die Polarisation im Inneren der Kugel bewirkt eine Veränderung des mittleren elektrischen Felds um

The polarization inside the sphere changes the average field by

$$\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \frac{1-\epsilon}{2+\epsilon} E_1 \mathbf{e}_{\mathrm{z}} = -\frac{4\pi}{3}\mathbf{P}. \tag{6.26}$$

Für eine Hohlkugel ($\epsilon_2 = 1$) im Dielektrikum ($\epsilon_1 = \epsilon$) erhält man dagegen

However, for a spherical cavity ($\epsilon_2 = 1$) in a dielectric medium ($\epsilon_1 = \epsilon$) one obtains

$$E_2 = \frac{3\epsilon}{1+2\epsilon} E_1. \tag{6.27}$$

6.d Dielektrizitätskonstante nach Clausius und Mosotti

Clausius und Mosotti leiten die Dielektrizitätskonstante aus der Polarisierbarkeit α der Moleküle (Atome) wie folgt her: Im Feld $\mathbf{E}_{\mathrm{eff}}$ ist das mittlere Dipolmoment

6.d Dielectric Constant according to Clausius and Mosotti

Clausius and Mosotti derive the dielectric constant from the polarizability α of molecules (atoms) as follows: The average dipole moment in the field $\mathbf{E}_{\mathrm{eff}}$ is

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_{\mathrm{eff}}. \tag{6.28}$$

Bei einer Dichte der Dipole (Atome) n ergibt sich die Polarisation

The density n of the dipoles (atoms) yields the polarization

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p} = n\alpha\mathbf{E}_{\mathrm{eff}}. \tag{6.29}$$

Wir müssen daher das effektive Feld $\mathbf{E}_{\mathrm{eff}}$ bestimmen, das auf den Dipol wirkt.

Therefore we have to determine the effective field $\mathbf{E}_{\mathrm{eff}}$, which acts on the dipole.

Dazu schneiden wir eine Kugel vom Radius R aus der Materie um den Dipol heraus. Diese Dipole erzeugen, wie wir am Beispiel der dielektrischen Kugel im Vakuum aus (6.26) sehen, ein mittleres Feld

For this purpose we cut a sphere of radius R out of the matter around the dipole. These dipoles generate, as we have seen in the example of the dielectric sphere in the vacuum (6.26) an average field

$$\bar{\mathbf{E}}_{\mathrm{P}} = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = -\frac{4\pi}{3}\mathbf{P}. \tag{6.30}$$

Dieses Feld fehlt nach dem Herausschneiden der Kugel. Dafür ist das schnell veränderliche Feld der einzelnen Dipole innerhalb der Kugel zu addieren (mit Ausnahme des Dipols, an dessen Stelle das Feld bestimmt werden soll)

This field is missing after we have cut out the sphere. Instead the rapidly varying field of the dipoles inside the sphere has to be added (with the exception of the field of the dipole at the location, where the field has to be determined)

$$\mathbf{E}_{\mathrm{eff}} = \mathbf{E} - \bar{\mathbf{E}}_{\mathrm{P}} + \sum_i \frac{-\mathbf{p}_i r_i^2 + 3(\mathbf{p}_i\mathbf{r}_i)\mathbf{r}_i}{r_i^5}. \tag{6.31}$$

Die Summe hängt von der Anordnung der Dipole (Kristallstruktur) ab. Falls die Dipole auf einem kubischen Gitter sitzen, verschwindet die Summe, denn die Beiträge aus

The sum depends on the location of the dipoles (crystall structure). If the dipoles are located on a cubic lattice, then the sum vanishes, since the contributions from

$$\sum_{\alpha,\beta} \mathbf{e}_\alpha p_\beta \sum_i \frac{-\delta_{\alpha,\beta} r_i^2 + 3x_{i,\alpha}x_{i,\beta}}{r_i^5} \tag{6.32}$$

heben sich für $\alpha \neq \beta$ weg, wenn man die Beiträge jeweils für x_α und $-x_\alpha$ zusammenfasst, die für $\alpha = \beta$, wenn man die drei Beiträge, die man durch zyklisches Permutieren der drei Komponenten erhält, zusammenfasst. Damit bleibt für ein kubisches Gitter

cancel for $\alpha \neq \beta$, if one adds the contributions for x_α and $-x_\alpha$, those for $\alpha = \beta$, if one adds the three contributions obtained by cyclic permutation of the three components. Thus one obtains for the cubic lattice

$$\chi_{\mathrm{e}}\mathbf{E} = \mathbf{P} = n\alpha\mathbf{E}_{\mathrm{eff}} = n\alpha(\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P}) = n\alpha(1 + \frac{4\pi}{3}\chi_{\mathrm{e}})\mathbf{E}, \tag{6.33}$$

woraus

from which one obtains

$$\chi_{\mathrm{e}} = \frac{n\alpha}{1 - \frac{4\pi n\alpha}{3}} \quad \text{oder or} \quad \frac{4\pi}{3}n\alpha = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \tag{6.34}$$

folgt.

.

7 Elektrizität auf Leitern

7.a Elektrische Leiter

Innerhalb eines Leiters ist das elektrische Feld $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, da ein von Null verschiedenes Feld sofort die Ladungen verschieben würde. Das Potential ist daher in jedem Leiter konstant. Für den Leiter $\#i$ gilt daher $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_i$.

Außerhalb der Leiter ist der Potentialverlauf durch die Poisson-Gleichung gegeben

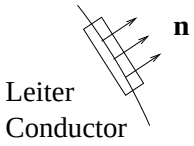
$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}) \quad \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{or}\end{matrix} \quad \operatorname{div}(\epsilon(\mathbf{r})\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r})) = -4\pi\rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}). \tag{7.1}$$

7.a.α Randbedingungen an der Leiteroberfläche

An der Leiteroberfläche hat man ein konstantes Potential (auch auf der Seite des Dielektrikums). Daher verschwinden die Komponenten von $\mathbf{E}$ tangential zur Oberfläche

$$\mathbf{E}_{\mathrm{t}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \tag{7.2}$$

Auf der Leiteroberfläche befinden sich in der Regel Influenzladungen. Wir bezeichnen die Oberflächenladungsdichte mit $\sigma(\mathbf{r})$.



Bei Integration über ein Stück der Oberfläche folgt dann

$$\int d\mathbf{f}\cdot\mathbf{E}_{\mathrm{a}}(\mathbf{r}) = 4\pi q = 4\pi\int df\,\sigma(\mathbf{r}). \tag{7.3}$$

Daher gilt für die Feldstärke $\mathbf{E}_{\mathrm{a}}$ an der Oberfläche im Außenraum

$$\mathbf{E}_{\mathrm{a}}(\mathbf{r}) = 4\pi\sigma(\mathbf{r})\mathbf{n}, \quad -\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 4\pi\sigma(\mathbf{r}). \tag{7.4}$$

Im allgemeinen wird sich die Ladungsdichte σ an der Oberfläche zusammensetzen aus der freibeweglichen σ_{f} auf der Leiteroberfläche und der Polarisationsladungsdichte σ_{P} auf dem Dielektrikum $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}) + \sigma_{\mathrm{P}}(\mathbf{r})$ mit

$$\mathbf{D}_{\mathrm{a}}(\mathbf{r}) = 4\pi\sigma_{\mathrm{f}}(\mathbf{r})\mathbf{n}, \tag{7.5}$$

woraus dann mit $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$

$$\sigma_{\mathrm{f}} = \epsilon(\sigma_{\mathrm{f}} + \sigma_{\mathrm{P}}), \quad \sigma_{\mathrm{P}} = (\frac{1}{\epsilon} - 1)\sigma_{\mathrm{f}} \tag{7.6}$$

folgt.

7 Electricity on Conductors

7.a Electric Conductors

The electric field vanishes within a conductor, $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, since a nonvanishing field would move the charges. Thus the potential within a conductor is constant. For the conductor $\#i$ one has $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_i$.

Outside the conductor the potential is given by Poisson's equation

7.a.α Boundary Conditions at the Surface of the Conductor

On the surface of the conductor one has a constant potential (on the side of the dielectric medium, too). Thus the components of $\mathbf{E}$ tangential to the surface vanish

In general there are charges at the surface of the conductor. We denote its density by $\sigma(\mathbf{r})$.

Integration over a small piece of the surface yields

Therefore the field $\mathbf{E}_{\mathrm{a}}$ obeys at the surface in the outside region

In general the charge density σ at the surface consists of the free charge density σ_{f} at the surface of the conductor and the polarization charge density σ_{P} on the dielectric medium $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}) + \sigma_{\mathrm{P}}(\mathbf{r})$ with

from which one obtains

.

7.a.β Kraft auf Leiter (im Vakuum)

Zunächst könnte man vermuten, die Kraft sei gegeben durch $\int df \mathbf{E}_\mathrm{a}\sigma(\mathbf{r})$. Dies ist aber falsch. Denn genau so könnte man argumentieren, man müsse das Feld im Leiter $\mathbf{E}_\mathrm{i} = \mathbf{0}$ einsetzen. Die Wahrheit liegt in der Mitte. Dies erkennt man, wenn man davon ausgeht, dass die Ladung nicht exakt auf der Oberfläche sitzt, sondern über eine Schichtdicke l verschmiert ist. Nehmen wir an innerhalb einer Schicht der Dicke a befindet sich die Ladung $s(a)\sigma(\mathbf{r})df$ mit $s(0) = 0$ und $s(l) = 1$, dann wirkt in der Tiefe a die Feldstärke $\mathbf{E}_\mathrm{i}(\mathbf{r}-a\mathbf{n}) = (1-s(a))\mathbf{E}_\mathrm{a}(\mathbf{r})$, da der Bruchteil $s(a)$ bereits abgeschirmt ist. Mit $\rho(\mathbf{r}-a\mathbf{n}) = s'(a)\sigma(\mathbf{r})$ folgt dann

$$\mathbf{K} = \int df\, da \rho(\mathbf{r}-a\mathbf{n})\mathbf{E}(\mathbf{r}-a\mathbf{n}) = \int df \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}_\mathrm{a}(\mathbf{r}) \int_0^l da s'(a)(1-s(a)). \tag{7.7}$$

Das Integral über a ergibt $(s(a) - s^2(a)/2)|_0^l = 1/2$, so dass wir schließlich die Kraft

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2}\int df \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}_\mathrm{a}(\mathbf{r}) \tag{7.8}$$

erhalten.

7.a.β Force acting on the Conductor (in Vacuo)

Initially one might guess, that the force on the conductor is given by $\int df \mathbf{E}_\mathrm{a}\sigma(\mathbf{r})$. This, however, is wrong. By the same token one could argue, that one has to insert the field inside the conductor $\mathbf{E}_\mathrm{i} = \mathbf{0}$ into the integral. The truth lies halfway. This becomes clear, if one assumes, that the charge is not exactly at the surface but smeared out over a layer of thickness l. If we assume that inside a layer of thickness a one has the charge $s(a)\sigma(\mathbf{r})df$ with $s(0) = 0$ and $s(l) = 1$, then the field acting at depth a is $\mathbf{E}_\mathrm{i}(\mathbf{r} - a\mathbf{n}) = (1 - s(a))\mathbf{E}_\mathrm{a}(\mathbf{r})$, since the fraction $s(a)$ is already screened. With $\rho(\mathbf{r} - a\mathbf{n}) = s'(a)\sigma(\mathbf{r})$ one obtains

The integral over a yields $(s(a) - s^2(a)/2)|_0^l = 1/2$, so that finally we obtain the force

.

7.b Kapazitäten

Wir betrachten jetzt mehrere Leiter eingebettet in das Vakuum oder in Dielektrika. Außerhalb der Leiter seien keine freibeweglichen Ladungsdichten, $\rho_\mathrm{f} = 0$. Die elektrischen Potentiale Φ_i der Leiter $\#i$ seien vorgegeben. Gesucht sind die freibeweglichen Ladungen q_i auf den Leitern. Da die Maxwell-Gleichungen linear sind (und wir annehmen, dass lineare Beziehungen $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ bestehen), können wir das Potential als Superposition von Lösungen Ψ_i schreiben

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_i \Phi_i \Psi_i(\mathbf{r}). \tag{7.9}$$

Dabei ist Ψ_i die Lösung, die auf dem Leiter $\#i$ den Wert 1, auf den anderen den Wert 0 annimmt

$$\Psi_i(\mathbf{r}) = \delta_{i,j} \quad \mathbf{r} \in \begin{matrix}\text{Leiter} \\ \text{conductor}\end{matrix} j. \tag{7.10}$$

Die Ladung auf dem Leiter $\#i$ ist dann gegeben durch

$$q_i = -\frac{1}{4\pi}\int_{F_i} df \epsilon \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_\mathrm{a} = \sum_j C_{i,j}\Phi_j \tag{7.11}$$

7.b Capacities

We now consider several conductors imbedded in the vacuum or in dielectric media. Outside the conductors there should be no free moving charge densities, $\rho_\mathrm{f} = 0$. The electric potentials Φ_i of the conductors $\#i$ should be given. We look for the free charges q_i at the conductors. Since Maxwell's equations are linear (and we assume, that there is a linear relation $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$) we may write the potential as a superposition of solutions Ψ_i

Ψ_i is the solution which assumes the value 1 at the conductor $\#i$, and 0 at all others

The charge on conductor $\#i$ is then given by

mit den Kapazitätskoeffizienten

with the capacity coefficients

$$C_{i,j} = -\frac{1}{4\pi} \int_{F_i} df\, \epsilon\, \frac{\partial \Psi_j}{\partial n}\bigg|_{\mathrm{a}} . \tag{7.12}$$

Im Gaußschen Maßsystem hat die Kapazität die Dimension Ladung/Spannung = Länge. Die Umrechnung in das SI-System geschieht mit dem Faktor $4\pi\epsilon_0$, so dass 1 cm $\hat{=}$ $1/9 \cdot 10^{-11}$ As/V = 10/9 pF (Picofarad).

The capacity has the dimension charge/(electric potential), which in Gaussian units is a length. The conversion into the SI-system is by the factor $4\pi\epsilon_0$, so that 1 cm $\hat{=}$ $1/9 \cdot 10^{-11}$ As/V = 10/9 pF (picofarad).

Die elektrostatische Energie ergibt sich aus

The electrostatic energy is obtained from

$$dU = \sum_i \Phi_i dq_i = \sum_{i,j} \Phi_i C_{i,j} d\Phi_j, \tag{7.13}$$

das heißt

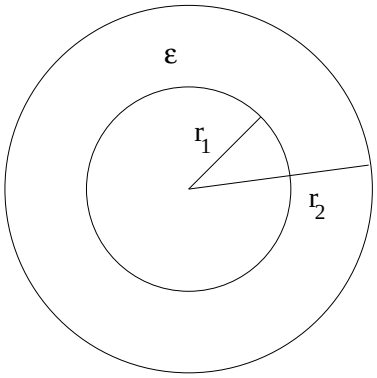
that is

$$\frac{\partial U}{\partial \Phi_j} = \sum_i C_{i,j} \Phi_i, \tag{7.14}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j} = C_{i,j} = \frac{\partial^2 U}{\partial \Phi_j \partial \Phi_i} = C_{j,i}, \tag{7.15}$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{i,j} \Phi_i \Phi_j = \frac{1}{2} \sum_i \Phi_i q_i \tag{7.16}$$

Als Beispiel betrachten wir den Kugelkondensator. Zwei konzentrische leitende Kugeln mit Radien r_1, r_2, wobei $r_1 < r_2$, seien mit den Ladungen q_1 und q_2 belegt. Der Außenraum sei Vakuum. Zwischen den beiden Kugeln sei ein Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante ϵ. Im Außenraum gilt dann



As an example we consider a spherical capacitor. Two concentric conducting spheres with radii r_1, r_2 with $r_1 < r_2$ carry the charges q_1 and q_2, resp. Outside be vacuum. Between the two spheres is a medium with dielectric constant ϵ. Then outside the spheres one has

$$\Phi(r) = \frac{q_1 + q_2}{r} \quad r \geq r_2. \tag{7.17}$$

Im Raum zwischen den beiden Kugeln hat man einen Abfall des Potentials der Form $q_1/(\epsilon r)$. Da das Potential bei $r = r_2$ stetig sein muss, folgt

The potential decays in the space between the two spheres like $q_1/(\epsilon r)$. Since the potential is continuous at $r = r_2$, it follows that

$$\Phi(r) = \frac{q_1}{\epsilon r} - \frac{q_1}{\epsilon r_2} + \frac{q_1 + q_2}{r_2} \quad r_1 \leq r \leq r_2. \tag{7.18}$$

In der kleineren Kugel ist das Potential konstant.

Inside the smaller sphere the potential is constant.

$$\Phi(r) = \frac{q_1}{\epsilon r_1} - \frac{q_1}{\epsilon r_2} + \frac{q_1 + q_2}{r_2} \quad r \leq r_1. \tag{7.19}$$

Daraus errechnen sich dann die Ladungen als Funktion der Potentiale $\Phi_i = \Phi(r_i)$

From this one calculates the charges as a function of the potentials $\Phi_i = \Phi(r_i)$

$$q_1 = \frac{\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1} (\Phi_1 - \Phi_2) \tag{7.20}$$

$$q_2 = \frac{\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1} (\Phi_2 - \Phi_1) + r_2 \Phi_2, \tag{7.21}$$

aus denen man die Kapazitätskoeffizienten unmittelbar ablesen kann. Falls das System neutral ist $q = q_1 = -q_2$, kann man q durch die Potentialdifferenz ausdrücken

from which the capacitor coefficients can be read off immediately. If the system is neutral, $q = q_1 = -q_2$, then q can be expressed by the difference of the potential

$$q = C(\Phi_1 - \Phi_2) \tag{7.22}$$

und bezeichnet C als die Kapazität. Für den Kugelkondensator finden wir $\Phi_2 = 0$ und $\Phi_1 = \frac{q_1}{\epsilon}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$, woraus die Kapazität

and one calls C the capacity. For the spherical capacitor one obtains $\Phi_2 = 0$ and $\Phi_1 = \frac{q_1}{\epsilon}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$, from which the capacity

$$C = \frac{\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1} \tag{7.23}$$

folgt.

is obtained.

Für eine einzelne Kugel können wir r_2 gegen ∞ gehen lassen und finden $C = \epsilon r_1$.

For a single sphere r_2 can go to ∞ and one finds $C = \epsilon r_1$.

Den Plattenkondensator mit Plattenabstand d erhalten wir, indem wir $r_2 = r_1 + d$ setzen und dann großes r_1 betrachten. Wir finden

We obtain the plate capacitor with a distance d between the plates, by putting $r_2 = r_1 + d$ in the limit of large r_1

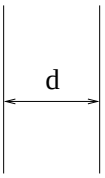
$$C = \frac{(r_1^2 + r_1 d)\epsilon}{d} = \frac{4\pi r_1^2 \epsilon}{d}(\frac{1}{4\pi} + \frac{d}{4\pi r_1}), \tag{7.24}$$

was für große r_1 gegen $\frac{\epsilon F}{4\pi d}$ mit der Fläche F geht. Daher erhält man für den Plattenkondensator

which approaches $\frac{\epsilon F}{4\pi d}$ for large r_1 with the area F. Therefore one obtains for the plate capacitor

$$C = \frac{\epsilon F}{4\pi d}. \tag{7.25}$$

Eine andere Überlegung ist die Folgende: Die Ladung q erzeugt einen Fluss $DF = 4\pi q$. Daher ist die Potentialdifferenz zwischen den beiden Platten $\Phi = \frac{D}{\epsilon} d = \frac{4\pi d}{\epsilon F} q$, woraus $C = q/\phi = \frac{\epsilon F}{4\pi d}$ folgt. Man beachte, dass wir hier mit q die freibewegliche Ladung bezeichnet haben.



A different consideration is the following: The charge q generates the flux $DF = 4\pi q$. Therefore the potential difference between the two plates is $\Phi = \frac{D}{\epsilon} d = \frac{4\pi d}{\epsilon F} q$, from which $C = q/\phi = \frac{\epsilon F}{4\pi d}$ follows. Be aware, that here we have denoted the free charge by q.

7.c Influenzladungen

Halten wir die Potentiale der Leiter auf 0, $\Phi_i = 0$ und haben wir eine freibewegliche Ladung q' am Ort $\mathbf{r}'$, so beschreiben wir das Potential

7.c Influence Charges

If we fix the potentials of all conductors to 0, $\Phi_i = 0$ in the presence of a free charge q' at $\mathbf{r}'$, then we write the potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')q' \tag{7.26}$$

mit der Greenschen Funktion G. Offensichtlich genügt diese der Gleichung

with the Green's function G. Apparently this function obeys the equation

$$\nabla(\epsilon(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{7.27}$$

für $\mathbf{r}$ außerhalb der Leiter. Für $\mathbf{r}$ auf den Leiteroberflächen ist $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$. Für eine Ladungsverteilung $\rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}')$ außerhalb der Leiter gilt dann nach dem Superpositionsprinzip

for $\mathbf{r}$ outside the conductor. For $\mathbf{r}$ at the surface of the conductors we have $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$. The superposition principle yields for a charge density $\rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}')$ located outside the conductors

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}') + \sum_i \Phi_i \Psi_i(\mathbf{r}), \tag{7.28}$$

wobei wir jetzt angenommen haben, dass die Leiter auf den Potentialen Φ_i liegen.

Wir zeigen nun, dass die Greensche Funktion symmetrisch ist, $G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G(\mathbf{r}',\mathbf{r})$. Zum Beweis gehen wir aus vom Integral über die Leiteroberflächen

where now we have assumed that the conductors have the potential Φ_i.

We now show, that the Green's function is symmetric, $G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G(\mathbf{r}',\mathbf{r})$. In order to show this we start from the integral over the surfaces of the conductors

$$\int d\mathbf{f}'' \cdot \{G(\mathbf{r}'',\mathbf{r})\epsilon(\mathbf{r}'')\nabla''G(\mathbf{r}'',\mathbf{r}') - \epsilon(\mathbf{r}'')[\nabla''G(\mathbf{r}'',\mathbf{r})]G(\mathbf{r}'',\mathbf{r}')\} = 0, \tag{7.29}$$

da G auf den Leiteroberflächen verschwindet. Das Flächenelement $d\mathbf{f}''$ weise in die Leiter. Wir erstrecken das Integral auch über eine Kugel vom Radius R, die alle Leiter einschließt. Wegen $G \sim 1/R$ und $\nabla''G \sim 1/R^2$ verschwindet das Oberflächenintegral für $R \to \infty$. Die Anwendung des Gaußschen Satzes liefert

since G vanishes at the surface of the conductors. The area element $d\mathbf{f}''$ is directed into the conductors. We perform the integral also over a sphere of radius R, which includes all conductors. Since $G \sim 1/R$ and since $\nabla''G \sim 1/R^2$ the surface integral vanishes for $R \to \infty$. Application of the divergence theorem yields

$$\int d^3r''\{G(\mathbf{r}'',\mathbf{r})\nabla''[\epsilon(\mathbf{r}'')\nabla''G(\mathbf{r}'',\mathbf{r}')] - \nabla''[\epsilon(\mathbf{r}'')\nabla''G(\mathbf{r}'',\mathbf{r})]G(\mathbf{r}'',\mathbf{r}')\} \tag{7.30}$$

$$= -4\pi \int d^3r''\{G(\mathbf{r}'',\mathbf{r})\delta^3(\mathbf{r}''-\mathbf{r}') - \delta^3(\mathbf{r}''-\mathbf{r})G(\mathbf{r}'',\mathbf{r}')\} \tag{7.31}$$

$$= -4\pi(G(\mathbf{r}',\mathbf{r}) - G(\mathbf{r},\mathbf{r}')) = 0. \tag{7.32}$$

Wir betrachten nun einige Beispiele:

We consider now a few examples:

7.c.α Leiterfreier Raum

Im leiterfreien Raum mit konstanter Dielektrizitätskonstante ϵ gilt

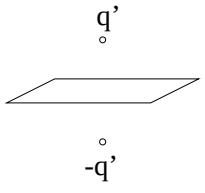
7.c.α Space free of Conductors

In a space with constant dielectric constant ϵ and without conductors one has

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{\epsilon|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{7.33}$$

7.c.β Leitende Ebene

Für eine leitende Ebene $z = 0$ ($\epsilon = 1$) löst man das Problem durch eine Spiegelladung. Befindet sich die gegebene Ladung q' am Ort $\mathbf{r}' = (x',y',z')$, so denke man sich eine zweite Ladung $-q'$ am Ort $\mathbf{r}'' = (x',y',-z')$. Diese kompensiert gerade das Potential an der Leiteroberfläche. Es folgt



7.c.β Conducting Plane

For a conducting plane $z = 0$ ($\epsilon = 1$) one solves the problem by mirror charges. If the given charge q' is located at $\mathbf{r}' = (x',y',z')$, then one should imagine a second charge $-q'$ at $\mathbf{r}'' = (x',y',-z')$. This mirror charge compensates the potential at the surface of the conductor. One obtains

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} & \begin{matrix}\text{für}\\ \text{for}\end{matrix} \ \operatorname{sign} z = \operatorname{sign} z' \\ 0 & \begin{matrix}\text{für}\\ \text{for}\end{matrix} \ \operatorname{sign} z = -\operatorname{sign} z'. \end{cases} \tag{7.34}$$

Als nächstes betrachten wir die Kraft, die auf die Ladung q' wirkt. Das Potential ist $\Phi(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r},\mathbf{r}')q'$. Dabei ist der Anteil $q'/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ das Potential von q' selbst, das auf q' keine Kraft ausübt. Der zweite Beitrag $-q'/|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|$ rührt dagegen von den Influenz-Ladungen auf der Metallebene her und bewirkt die Kraft

Next we consider the force which acts on the charge q'. The potential is $\Phi(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r},\mathbf{r}')q'$. The contribution $q'/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ is the potential of q' itself, that does not exert a force on q' . The second contribution $-q'/|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|$ comes, however, from the influence charges on the metal surface and exerts the force

$$\mathbf{K} = -q' \operatorname{grad} \frac{-q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} = -\frac{q'^2 \mathbf{e}_z}{4z'^2} \operatorname{sign} z'. \tag{7.35}$$

Weiter bestimmen wir die Influenz-Ladung auf der Platte. Bei $z = 0$ haben wir $4\pi \operatorname{sign} z' \mathbf{e}_z \sigma(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) = q' \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} - q' \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|^3}$. Daraus ergibt sich die Oberflächenladungsdichte

Further one determines the influence charge on the plate. At $z = 0$ one has $4\pi \operatorname{sign} z' \mathbf{e}_z \sigma(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) = q' \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} - q' \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|^3}$. From this one obtains the density of the surface charge

$$\sigma(\mathbf{r}) = -\frac{q'}{2\pi} \frac{|z'|}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2}^3} \tag{7.36}$$

Mit $df = \pi d(x^2 + y^2)$ folgt dann

With $df = \pi d(x^2 + y^2)$ one obtains

$$\int df \sigma(\mathbf{r}) = -\frac{q'|z'|}{2} \int_{z'^2}^{\infty} \frac{d(x^2 + y^2 + z'^2)}{(x^2 + y^2 + z'^2)^{3/2}} = -q'. \tag{7.37}$$

Die Kraft auf die Platte errechnet sich zu

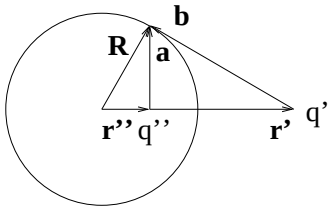
The force acting on the plate is obtained as

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \int df \mathbf{E}(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r}) = \frac{q'^2 z' |z'|}{2} \mathbf{e}_z \int \frac{d(x^2 + y^2 + z'^2)}{(x^2 + y^2 + z'^2)^3} = \frac{q'^2 \mathbf{e}_z}{4z'^2} \operatorname{sign} z'. \tag{7.38}$$

7.c.γ Leitende Kugel

7.c.γ Conducting Sphere

Wir betrachten eine Ladung q' am Ort $\mathbf{r}'$ in Gegenwart einer leitenden Kugel mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung. Es gibt dann einen Vektor $\mathbf{r}''$, so dass das Verhältnis der Abstände von allen Punkten $\mathbf{R}$ der Kugeloberfläche von $\mathbf{r}'$ und $\mathbf{r}''$ konstant ist. Es sei



We consider a charge q' located at $\mathbf{r}'$ in the presence of a conducting sphere with radius R and center in the origin. Then there is a vector $\mathbf{r}''$, so that the ratio of the distances of all points $\mathbf{R}$ on the surface of the sphere from $\mathbf{r}'$ and $\mathbf{r}''$ is constant. Be

$$a^2 := (\mathbf{R} - \mathbf{r}'')^2 = R^2 + r''^2 - 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'' \tag{7.39}$$

$$b^2 := (\mathbf{R} - \mathbf{r}')^2 = R^2 + r'^2 - 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}' \tag{7.40}$$

Diese Konstanz des Verhältnisses der Abstände ist erfüllt für $\mathbf{r}' \parallel \mathbf{r}''$ und

This constant ratio of the distances is fulfilled for $\mathbf{r} \parallel \mathbf{r}''$ and

$$\frac{R^2 + r''^2}{R^2 + r'^2} = \frac{r''}{r'}. \tag{7.41}$$

Dann gilt

Then one has

$$R^2 = r'r'' \quad \mathbf{r}'' = \frac{R^2}{r'^2} \mathbf{r}' \tag{7.42}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{r''}{r'} = \frac{R^2}{r'^2} = \frac{r''^2}{R^2}. \tag{7.43}$$

Man findet damit ein konstantes Potential auf der Kugel mit der Ladung q' am Ort $\mathbf{r}'$ und der Ladung $q'' = -q'R/r'$ am Ort r''

Thus one obtains a constant potential on the sphere with the charge q' at $\mathbf{r}'$ and the charge $q'' = -q'R/r'$ at r''

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{R/r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} & \text{für / for } \operatorname{sign}(r - R) = \operatorname{sign}(r' - R), \\ 0 & \text{sonst / otherwise} \end{cases} \tag{7.44}$$

Mit diesem G verschwindet das Potential auf der Kugel. Für $r' > R$ trägt sie die Ladung q'' und für $r' < R$ die Ladung $-q'$. Daher muss man für eine neutrale Kugel zum Potential Φ noch den Beitrag hinzufügen, der von einer gleichmäßig auf der Kugel verteilten Ladung $-q''$ beziehungsweise q' herrührt.

The potential on the sphere vanishes with this Green's function G. For $r' > R$ it carries the charge q'' and for $r' < R$ the charge $-q'$. Thus if the total charge on the sphere vanishes one has to add a potential Φ, which corresponds to a homogeneously distributed charge $-q''$ and q', resp.

8 Energie, Kräfte und Spannungen im Dielektrikum

8.a Elektrostatische Energie

Bei Verschiebung der Ladungsdichten $\delta\rho = \delta\rho_{\rm f} + \delta\rho_{\rm P}$ wird die elektrostatische Energie

$$\delta U = \int d^3r \delta\rho_{\rm f}\Phi + \int d^3r\delta\rho_{\rm P}\Phi \tag{8.1}$$

zugeführt. Gleichzeitig sind in der Materie zusätzliche innere Potentiale $\Phi_{\rm i}$ vorhanden, so dass die Polarisation im Gleichgewicht ist, das heißt

$$\delta U = \int d^3r\delta\rho_{\rm f}\Phi + \int d^3r\delta\rho_{\rm P}(\Phi + \Phi_{\rm i}). \tag{8.2}$$

Diese Potentiale müssen so beschaffen sein, dass $\delta U = 0$ für eine Variation der Polarisation gilt, damit die Polarisationen im Gleichgewicht sind

$$\Phi + \Phi_{\rm i} = 0. \tag{8.3}$$

Diese Überlegungen gelten bei adiabatisch geführten Prozessen und unter der Bedingung, dass keine mechanische Energie zugeführt wird. Die Materie muss sich also in einem kräftefreien Zustand (Gleichgewicht $\mathbf{k} = \mathbf{0}$) befinden oder sie muss festgehalten werden. Damit folgt mit (B.62)

$$\delta U = \int d^3r\,\delta\rho_{\rm f}\,\Phi = \frac{1}{4\pi}\int d^3r\,\mathrm{div}\,\delta\mathbf{D}\,\Phi = -\frac{1}{4\pi}\int d^3r\delta\mathbf{D}\cdot\,\mathrm{grad}\,\Phi = \frac{1}{4\pi}\int d^3r\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}, \tag{8.4}$$

ähnlich zum materiefreien Fall (3.25). Damit gilt für die Energiedichte bei fester Massendichte $\rho_{\rm m}$ (wir nehmen hier an, dass außer dem elektrischen Feld nur die Massendichte die Energiedichte festlegt; tatsächlich wird im Allgemeinen der Verzerrungszustand wesentlich sein)

$$du = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{D}. \tag{8.5}$$

Falls $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, so folgt

$$u = u_0(\rho_{\rm m}) + \frac{1}{4\pi}\int \epsilon(\rho_{\rm m})\mathbf{E}\cdot d\mathbf{E} = u_0(\rho_{\rm m}) + \frac{1}{8\pi}\epsilon(\rho_{\rm m})E^2 = u_0(\rho_{\rm m}) + \frac{D^2}{8\pi\epsilon(\rho_{\rm m})}, \tag{8.6}$$

da die Dielektrizitätskonstante im Allgemeinen von der Massendichte abhängt.

8 Energy, Forces and Stress in Dielectric Media

8.a Electrostatic Energy

By displacing the charge densities $\delta\rho = \delta\rho_{\rm f} + \delta\rho_{\rm P}$ the electrostatic energy

$$\delta U = \int d^3r \delta\rho_{\rm f}\Phi + \int d^3r\delta\rho_{\rm P}\Phi \tag{8.1}$$

will be added to the system. Simultaneously there are additional potentials $\Phi_{\rm i}$ in the matter guaranteeing, that the polarization is in equilibrium, i. e.

$$\delta U = \int d^3r\delta\rho_{\rm f}\Phi + \int d^3r\delta\rho_{\rm P}(\Phi + \Phi_{\rm i}). \tag{8.2}$$

These potentials are so that $\delta U = 0$ holds for a variation of the polarization, so that the polarizations are in equilibrium

$$\Phi + \Phi_{\rm i} = 0. \tag{8.3}$$

These considerations hold as long as the process is run adiabatically and under the condition, that no mechanical energy is added. Thus the matter is in a force-free state (equilibrium $\mathbf{k} = \mathbf{0}$) or it has to be under rigid constraints. Then one obtains with (B.62)

$$\delta U = \int d^3r\,\delta\rho_{\rm f}\,\Phi = \frac{1}{4\pi}\int d^3r\,\mathrm{div}\,\delta\mathbf{D}\,\Phi = -\frac{1}{4\pi}\int d^3r\delta\mathbf{D}\cdot\,\mathrm{grad}\,\Phi = \frac{1}{4\pi}\int d^3r\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}, \tag{8.4}$$

similarly to the matter-free case (3.25). Then one obtains for the density of the energy at fixed density of matter $\rho_{\rm m}$ (we assume that apart from the electric field only the density of matter determines the energy-density; in general, however, the state of distortion will be essential)

$$du = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{D}. \tag{8.5}$$

If $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, then one obtains

$$u = u_0(\rho_{\rm m}) + \frac{1}{4\pi}\int \epsilon(\rho_{\rm m})\mathbf{E}\cdot d\mathbf{E} = u_0(\rho_{\rm m}) + \frac{1}{8\pi}\epsilon(\rho_{\rm m})E^2 = u_0(\rho_{\rm m}) + \frac{D^2}{8\pi\epsilon(\rho_{\rm m})}, \tag{8.6}$$

since the dielectric constant depends in general on the density of mass.

8.b Kraftdichte im isotropen Dielektrikum

Wir können die Kraftdichte in einem Dielektrikum bestimmen, indem wir die Massen und freibeweglichen Ladungen von $\mathbf{r}$ nach $\mathbf{r} + \delta\mathbf{s}(\mathbf{r})$ verschieben und die Energieänderung δU bestimmen. Die dem System dabei zugeführte Energie ist

$$\delta U = \int d^3r\, \mathbf{k}_\mathrm{a}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{s}(\mathbf{r}), \tag{8.7}$$

wobei $\mathbf{k}_\mathrm{a}$ die von außen angreifende Kraftdichte ist. Im Gleichgewicht ist die entgegenwirkende innere elektrische und mechanische Kraftdichte $\mathbf{k}$

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = -\mathbf{k}_\mathrm{a}(\mathbf{r}), \tag{8.8}$$

so dass

$$\delta U = -\int d^3r\, \mathbf{k}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{s}(\mathbf{r}) \tag{8.9}$$

gelten muss. Wir bringen nun δU auf diese Form

$$\delta U = \int d^3r \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{D}} \cdot \delta\mathbf{D} + \left.\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}}\right|_{\mathbf{D}} \delta\rho_\mathrm{m} \right), \quad u = u(\mathbf{D}, \rho_\mathrm{m}). \tag{8.10}$$

Wegen $\partial u/\partial \mathbf{D} = \mathbf{E}/(4\pi)$ formen wir den ersten Term wie im vorhergehenden Abschnitt um in

$$\delta U = \int d^3r \left(\Phi(\mathbf{r}) \delta\rho_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + \left.\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}}\right|_{\mathbf{D}} \delta\rho_\mathrm{m} \right). \tag{8.11}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung $d\rho/dt = -\operatorname{div}\mathbf{j}$ leiten wir nun den Zusammenhang zwischen $\delta\rho$ und $\delta\mathbf{s}$ her. Man muss die Gleichung nur mit δt multiplizieren und berücksichtigen, dass $\mathbf{j}\delta t = \rho\mathbf{v}\delta t = \rho\delta\mathbf{s}$ gilt. Mit $(d\rho/dt)\delta t = \delta\rho$ erhalten wir

$$\delta\rho = -\operatorname{div}(\rho\delta\mathbf{s}). \tag{8.12}$$

Es folgt dann

$$\begin{aligned} \delta U &= -\int d^3r \left(\Phi(\mathbf{r}) \operatorname{div}(\rho_\mathrm{f}\delta\mathbf{s}) + \frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} \operatorname{div}(\rho_\mathrm{m}\delta\mathbf{s}) \right) \\ &= \int d^3r \left(\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r})\rho_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + \left(\operatorname{grad} \frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} \right) \rho_\mathrm{m}(\mathbf{r}) \right) \cdot \delta\mathbf{s}(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{8.13}$$

wobei beim Übergang zur letzten Zeile der Gaußsche Satz (B.62) verwendet wurde. Daraus folgt

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \rho_\mathrm{f}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) - \rho_\mathrm{m}(\mathbf{r}) \operatorname{grad}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} \right). \tag{8.14}$$

8.b Force Density in Isotropic Dielectric Matter

We may determine the force density in a dielectric medium by moving the masses and free charges from $\mathbf{r}$ to $\mathbf{r} + \delta\mathbf{s}(\mathbf{r})$ and calculating the change of energy δU. The energy added to the system is

$$\delta U = \int d^3r\, \mathbf{k}_\mathrm{a}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{s}(\mathbf{r}), \tag{8.7}$$

where $\mathbf{k}_\mathrm{a}$ is an external force density. The internal electric and mechanical force density $\mathbf{k}$ acting against it in equilibrium is

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = -\mathbf{k}_\mathrm{a}(\mathbf{r}), \tag{8.8}$$

so that

$$\delta U = -\int d^3r\, \mathbf{k}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{s}(\mathbf{r}) \tag{8.9}$$

holds. We bring now δU into this form

$$\delta U = \int d^3r \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{D}} \cdot \delta\mathbf{D} + \left.\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}}\right|_{\mathbf{D}} \delta\rho_\mathrm{m} \right), \quad u = u(\mathbf{D}, \rho_\mathrm{m}). \tag{8.10}$$

Since $\partial u/\partial \mathbf{D} = \mathbf{E}/(4\pi)$ we rewrite the first term as in the previous section

$$\delta U = \int d^3r \left(\Phi(\mathbf{r}) \delta\rho_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + \left.\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}}\right|_{\mathbf{D}} \delta\rho_\mathrm{m} \right). \tag{8.11}$$

From the equation of continuity $d\rho/dt = -\operatorname{div}\mathbf{j}$ we derive the relation between $\delta\rho$ and $\delta\mathbf{s}$. The equation has to be multiplied by δt and one has to consider, that $\mathbf{j}\delta t = \rho\mathbf{v}\delta t = \rho\delta\mathbf{s}$ holds. With $(d\rho/dt)\delta t = \delta\rho$ we obtain

$$\delta\rho = -\operatorname{div}(\rho\delta\mathbf{s}). \tag{8.12}$$

Then we obtain

$$\begin{aligned} \delta U &= -\int d^3r \left(\Phi(\mathbf{r}) \operatorname{div}(\rho_\mathrm{f}\delta\mathbf{s}) + \frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} \operatorname{div}(\rho_\mathrm{m}\delta\mathbf{s}) \right) \\ &= \int d^3r \left(\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r})\rho_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + \left(\operatorname{grad} \frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} \right) \rho_\mathrm{m}(\mathbf{r}) \right) \cdot \delta\mathbf{s}(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{8.13}$$

where the divergence theorem (B.62) has been used by the derivation of the last line. This yields

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \rho_\mathrm{f}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) - \rho_\mathrm{m}(\mathbf{r}) \operatorname{grad}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} \right). \tag{8.14}$$

Der erste Beitrag ist die Coulomb-Kraft auf die freien Ladungsträger. Den zweiten Beitrag formen wir noch um. Wir setzen (8.6) $u = u_0(\rho_\mathrm{m}) + D^2/(8\pi\epsilon(\rho_\mathrm{m}))$. Dann ist

The first contribution is the Coulomb-force on the free charges. The second contribution has to be rewritten. We substitute (8.6) $u = u_0(\rho_\mathrm{m}) + D^2/(8\pi\epsilon(\rho_\mathrm{m}))$. Then one has

$$\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} = \frac{du_0}{d\rho_\mathrm{m}} + \frac{1}{8\pi} D^2 \frac{d(1/\epsilon)}{d\rho_\mathrm{m}} = \frac{du_0}{d\rho_\mathrm{m}} - \frac{1}{8\pi} E^2 \frac{d\epsilon}{d\rho_\mathrm{m}}. \tag{8.15}$$

Der erste Term kann geschrieben werden

The first term can be written

$$-\rho_\mathrm{m} \operatorname{grad} \frac{du_0}{d\rho_\mathrm{m}} = -\operatorname{grad}\left(\rho_\mathrm{m} \frac{du_0}{d\rho_\mathrm{m}} - u_0\right) = -\operatorname{grad} P_0(\rho_\mathrm{m}), \tag{8.16}$$

wobei wir verwenden, dass $(du_0/d\rho_\mathrm{m}) \operatorname{grad} \rho_m = \operatorname{grad} u_0$. Hierbei ist P_0 der hydrostatische Druck der Flüssigkeit ohne elektrisches Feld

where we use that $(du_0/d\rho_\mathrm{m}) \operatorname{grad} \rho_m = \operatorname{grad} u_0$. Here P_0 is the hydrostatic pressure of the liquid without electric field

$$\mathbf{k}_{0,\mathrm{hydro}} = -\operatorname{grad} P_0(\rho_\mathrm{m}(\mathbf{r})). \tag{8.17}$$

Die auf das Volumen V wirkende hydrostatische Kraft kann dann umgeformt werden in ein Oberflächenintegral

The hydrostatic force acting on the volume V can be written in terms of a surface integral

$$\mathbf{K}_0 = -\int_V d^3r \operatorname{grad} P_0(\rho_\mathrm{m}(\mathbf{r})) = -\int_{\partial V} d\mathbf{f} P_0(\rho_\mathrm{m}(\mathbf{r})). \tag{8.18}$$

Dies ist eine Kraft, die auf die Oberfläche ∂V mit dem Druck P_0 wirkt. Es bleibt noch der elektrostriktive Anteil

This is a force which acts on the surface ∂V with the pressure P_0. There remains the electrostrictive contribution

$$\frac{1}{8\pi}\rho_\mathrm{m} \operatorname{grad}\left(E^2 \frac{d\epsilon}{d\rho_\mathrm{m}}\right) = \frac{1}{8\pi} \operatorname{grad}\left(E^2 \rho_\mathrm{m} \frac{d\epsilon}{d\rho_\mathrm{m}}\right) - \frac{1}{8\pi} E^2 \operatorname{grad}\epsilon, \tag{8.19}$$

wobei $(d\epsilon/d\rho_\mathrm{m}) \operatorname{grad}\rho_\mathrm{m} = \operatorname{grad}\epsilon$ verwendet wurde. Insgesamt ergibt sich dann die Kraftdichte zu

where $(d\epsilon/d\rho_\mathrm{m}) \operatorname{grad}\rho_\mathrm{m} = \operatorname{grad}\epsilon$ has been used. Then the total force density is

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \rho_\mathrm{f}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \operatorname{grad}\left(-P_0(\rho_\mathrm{m}) + \frac{1}{8\pi} E^2 \rho_\mathrm{m} \frac{d\epsilon}{d\rho_\mathrm{m}}\right) - \frac{1}{8\pi} E^2 \operatorname{grad}\epsilon. \tag{8.20}$$

Anwendungen:

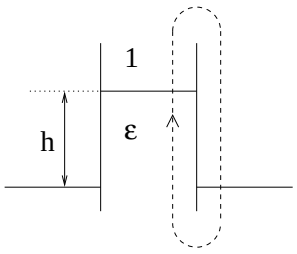
Applications:

Dielektrische Flüssigkeit zwischen zwei senkrechten Kondensatorplatten. Um welche Höhe h steht die Flüssigkeit zwischen den Kondensatorplatten höher als im feldfreien Raum? Wir führen dazu das Integral über einen geschlossenen Weg zwischen den Kondensatorplatten nach oben und außerhalb nach unten

Dielectric fluid between two vertical capacitor plates. What is the difference h in height between between the surface of a fluid between the plates of the capacitor and outside the capacitor? For this purpose we introduce the integral along a closed path which goes up between the plates of the capacitor and outside down

$$\oint \mathbf{k}\cdot d\mathbf{r} = \oint \operatorname{grad}\left(-P_0 + \frac{1}{8\pi} E^2 \rho_\mathrm{m} \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_\mathrm{m}}\right)\cdot d\mathbf{r} - \frac{1}{8\pi}\oint E^2 \operatorname{grad}\epsilon \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{8\pi} E^2(\epsilon - 1). \tag{8.21}$$

Dabei verschwindet das Integral des Gradienten über den geschlossenen Weg, während das Integral über $E^2 \operatorname{grad}\epsilon$ nur etwas an den beiden Punkten ergibt, an denen der Integrationsweg durch die Flüssigkeitsoberfläche tritt. Zusätzlich zu diesen Kräften kommt noch die Gravitationskraft. Beide müssen sich die Waage halten



The integral over the gradient along the closed path vanishes, whereas the integral of $E^2 \operatorname{grad}\epsilon$ yields a contribution at the two points where the path of integration intersects the surface. In addition there is the gravitational force. Both have to compensate each other

$$\mathbf{k} + \mathbf{k}_{\text{grav}} = \mathbf{0}, \tag{8.22}$$

also that is

$$\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}_{\text{grav}} = -\rho_{\text{m}} g h = -\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}, \tag{8.23}$$

woraus sich die Höhe from which one obtains the height

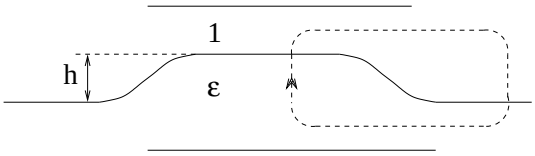
$$h = \frac{E^2(\epsilon - 1)}{8\pi \rho_{\text{m}} g} \tag{8.24}$$

ergibt. .

Dielektrische Flüssigkeit zwischen zwei waagrechten Kondensatorplatten

Dielectric fluid between two horizontal capacitor plates

Wie groß ist die Steighöhe einer dielektrischen Flüssigkeit zwischen zwei horizontalen Kondensatorplatten? Das Problem lässt sich ähnlich lösen wie zwischen zwei senkrechten Kondensatorplatten.



What is the elevation of a dielectric fluid between two horizontal capacitor plates? The problem can be solved in a similar way as between two vertical plates.

Allerdings ist es zweckmässig, die Umformung It is useful, however, to use

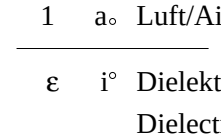
$$-\frac{1}{8\pi} E^2 \operatorname{grad} \epsilon = \frac{1}{8\pi} D^2 \operatorname{grad} \left(\frac{1}{\epsilon}\right) \tag{8.25}$$

zu verwenden. .

Hydrostatischer Druckunterschied an einer Grenzfläche

Hydrostatic pressure difference at a boundary

Durch Integration durch die Grenzfläche vom Dielektrikum zur Luft erhält man



Performing an integration through the boundary from the dielectric medium to air one obtains

$$0 = \int_{\text{i}}^{\text{a}} \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = \int \operatorname{grad} \left(-P_0 + \frac{1}{8\pi} \rho_{\text{m}} E^2 \frac{d\epsilon}{d\rho_{\text{m}}}\right) \cdot d\mathbf{r} - \frac{1}{8\pi} \int E_{\text{t}}^2 \operatorname{grad} \epsilon \cdot d\mathbf{r} + \frac{1}{8\pi} \int D_{\text{n}}^2 \operatorname{grad} \left(\frac{1}{\epsilon}\right) \cdot d\mathbf{r}. \tag{8.26}$$

Daraus folgt der hydrostatische Druckunterschied auf beiden Seiten der Grenzfläche

This yields the difference in hydrostatic pressure at both sides of the boundary

$$P_{0,\text{i}}(\rho_{\text{m}}) - P_{0,\text{a}} = \frac{1}{8\pi} \left(\rho_{\text{m}} \frac{d\epsilon}{d\rho_{\text{m}}} E^2 - (\epsilon - 1) E_{\text{t}}^2 + \left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right) D_{\text{n}}^2 \right) \tag{8.27}$$

Druckverlauf im praktisch inkompressiblen Dielektrikum

Pressure in a practically incompressible dielectric medium

Aus From

$$\mathbf{k} + \mathbf{k}_{\text{grav}} = -\operatorname{grad} (P_0(\rho_{\text{m}})) + \rho_{\text{m}} \operatorname{grad} \left(\frac{1}{8\pi} E^2 \frac{d\epsilon}{d\rho_{\text{m}}}\right) - \rho_{\text{m}} \operatorname{grad} (gz) = \mathbf{0}. \tag{8.28}$$

erhält man für annähernd konstantes ρ_{m}

one obtains for approximately constant ρ_{m}

$$P_0 = \rho_{\mathrm{m}}(\frac{1}{8\pi}E^2\frac{d\epsilon}{d\rho_{\mathrm{m}}} - gz) + \text{const.} \tag{8.29}$$

8.c Maxwellscher Spannungstensor

8.c Maxwell's Stress Tensor

Wir wollen nun die Kraftdichte $\mathbf{k}$ als Divergenz eines Tensors darstellen,

Now we represent the force density $\mathbf{k}$ as divergence of a tensor

$$k_\alpha = \nabla_\beta T_{\alpha,\beta}. \tag{8.30}$$

Hat man eine derartige Darstellung, so ist die auf ein Volumen V wirkende Kraft gegeben durch

If one has such a representation, then the force acting on a volume V is given by

$$\mathbf{K} = \int_V d^3r\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \int d^3r\mathbf{e}_\alpha\nabla_\beta T_{\alpha,\beta} = \int_{\partial V} df_\beta(\mathbf{e}_\alpha T_{\alpha,\beta}). \tag{8.31}$$

Die auf das Volumen wirkende Kraft wird also dargestellt durch eine auf die Oberfläche wirkende Kraft. Wäre sie isotrop $T_{\alpha,\beta} = -P\delta_{\alpha,\beta}$, so würden wir von einem Druck sprechen, der auf die Oberfläche einwirkt. Im hier vorliegenden allgemeineren Fall spricht man von einem Spannungstensor T, da der Druck anisotrop sein kann und Scherspannungen auftreten können.

The force acting on the volume is such represented by a force acting on the surface. If it were isotropic $T_{\alpha,\beta} = -P\delta_{\alpha,\beta}$, we would call P the pressure acting on the surface. In the general case we consider here one calls T the stress tensor, since the pressure is anisotropic and there can be shear stress.

Zur Berechnung von T gehen wir aus von

In order to calculate T we start from

$$k_\alpha = \rho_{\mathrm{f}}E_\alpha - \rho_{\mathrm{m}}\nabla_\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial\rho_{\mathrm{m}}}\right). \tag{8.32}$$

Wir formen um

We transform

$$\rho_{\mathrm{f}}E_\alpha = \frac{1}{4\pi}E_\alpha\nabla_\beta D_\beta = \frac{1}{4\pi}\left(\nabla_\beta(E_\alpha D_\beta) - (\nabla_\beta E_\alpha)D_\beta\right) \tag{8.33}$$

und verwenden $\nabla_\beta E_\alpha = \nabla_\alpha E_\beta$ wegen $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Damit folgt

and use $\nabla_\beta E_\alpha = \nabla_\alpha E_\beta$ because of $\mathrm{curl}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}$. This yields

$$k_\alpha = \nabla_\beta(\frac{1}{4\pi}E_\alpha D_\beta) - \rho_{\mathrm{m}}\nabla_\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial\rho_{\mathrm{m}}}\right) - \frac{1}{4\pi}D_\beta\nabla_\alpha E_\beta. \tag{8.34}$$

Nun ist aber

Now there is

$$\nabla_\alpha\left(u - \rho_{\mathrm{m}}\frac{\partial u}{\partial\rho_{\mathrm{m}}} - \frac{1}{4\pi}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\right) = -\rho_{\mathrm{m}}\nabla_\alpha\frac{\partial u}{\partial\rho_{\mathrm{m}}} - \frac{1}{4\pi}D_\beta\nabla_\alpha E_\beta, \tag{8.35}$$

da $\partial u/\partial D_\beta = E_\beta/(4\pi)$. Damit folgt der Ausdruck für den Spannungstensor

since $\partial u/\partial D_\beta = E_\beta/(4\pi)$. This yields the expression for the stress tensor

$$T_{\alpha,\beta} = \frac{1}{4\pi}E_\alpha D_\beta + \delta_{\alpha,\beta}\left(u - \rho_{\mathrm{m}}\frac{\partial u}{\partial\rho_{\mathrm{m}}} - \frac{1}{4\pi}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\right). \tag{8.36}$$

Speziell mit $u = u_0(\rho_{\mathrm{m}}) + D^2/(8\pi\epsilon(\rho_{\mathrm{m}}))$, (8.6) folgt

In particular with $u = u_0(\rho_{\mathrm{m}}) + D^2/(8\pi\epsilon(\rho_{\mathrm{m}}))$, (8.6) one obtains

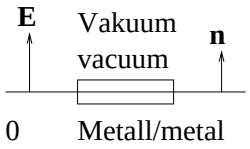
$$T_{\alpha,\beta} = \frac{1}{4\pi}E_\alpha D_\beta + \delta_{\alpha,\beta}\left(-P_0(\rho_{\mathrm{m}}) - \frac{1}{8\pi}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{8\pi}E^2\rho_{\mathrm{m}}\frac{d\epsilon}{d\rho_{\mathrm{m}}}\right). \tag{8.37}$$

Im Vakuum ergibt sich der Maxwellsche Spannungstensor zu

Maxwell's stress tensor reads in vacuum

$$T_{\alpha,\beta} = \frac{1}{4\pi}E_\alpha E_\beta - \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{8\pi}E^2. \tag{8.38}$$

Als Beispiel betrachten wir die elektrostatische Kraft auf ein ebenes Stück Metall der Fläche F. Wir haben auszuwerten



As an example we consider the electrostatic force on a plane piece of metal of area F. We have to evaluate

$$\mathbf{K} = \int df_\beta (\mathbf{e}_\alpha T_{\alpha,\beta}) = \left(\frac{1}{4\pi} \mathbf{E}(\mathbf{En}) - \frac{1}{8\pi} \mathbf{n} E^2 \right) F = \frac{1}{8\pi} E^2 \mathbf{n} F. \tag{8.39}$$

Dies ist in Übereinstimmung mit dem Ergebnis aus (7.8).

This is in agreement with the result from (7.8).