C Magnetostatik

In diesem Kapitel behandeln wir die Magnetostatik ausgehend von den Gleichungen, die für zeitunabhängige Ströme am Anfang des Abschnittes (3.a) hergeleitet wurden.

9 Magnetische Induktion und Vektorpotential

9.a Amperegesetz

Aus

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \tag{9.1}$$

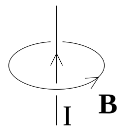
folgt

$$\int d\mathbf{f}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\int d\mathbf{f}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}), \tag{9.2}$$

was mit Hilfe des Stokesschen Satzes (B.56)

$$\oint d\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}I \tag{9.3}$$

geschrieben werden kann. Das Linienintegral der magnetischen Induktion über eine geschlossene Kurve ergibt das $4\pi/\mathrm{c}$ fache des Stomes I durch die Kurve. Dabei gilt die Korkenzieher-Regel: Der Strom ist in die Richtung zu messen, in die sich der Korkenzieher bei Drehung in die Richtung des Linienintegrals bewegt.



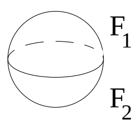
9.b Magnetischer Fluss

Als magnetischen Fluss Ψ^{m} durch eine gerichtete Fläche F bezeichnet man das Integral

$$\Psi^{\mathrm{m}} = \int_F d\mathbf{f}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}). \tag{9.4}$$

Der magnetische Fluss hängt nur von der Berandung ∂F der Fläche ab. Zum Beweis bilden wir die Differenz des Flusses durch zwei Flächen F_1 und F_2 mit der gleichen Berandung und erhalten

$$\Psi^{\mathrm{m}}_1 - \Psi^{\mathrm{m}}_2 = \int_{F_1} d\mathbf{f}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}) - \int_{F_2} d\mathbf{f}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_F d\mathbf{f}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_V d^3r\,\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \tag{9.5}$$



mit Hilfe des Gaußschen Satzes (B.59) und $\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$. Dabei seien F_1 und F_2 in die gleiche Richtung (zum Beispiel nach oben) orientiert. Die geschlossene Fläche F setzt sich aus F_1 und F_2 zusammen, wobei F_2 jetzt in der umgekehrten Richtung orientiert sei. Dann hat F eine bestimmte Orientierung (zum Beispiel nach außen) und schließt das Volumen V ein.

9.c Feld einer Stromverteilung

Aus $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (4\pi/\mathrm{c})\,\mathrm{rot}\,\mathbf{j}(\mathbf{r})$ folgt wegen (B.26)

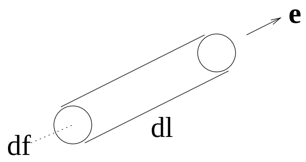
$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) - \triangle\mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{9.6}$$

und $\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$

$$\triangle \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \tag{9.7}$$

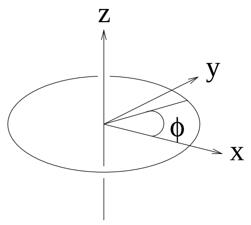
mit der Lösung

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \operatorname{rot}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\frac{1}{c} \int d^3r' (\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}'), \tag{9.8}$$



wobei wir beim zweiten Gleichheitszeichen (B.63) verwendet haben. Der letzte Ausdruck wird als das Gesetz von Biot und Savart bezeichnet. Ist die Ausdehnung eines Drahtes senkrecht zur Stromrichtung vernachlässigbar klein (Stromfaden), so kann man approximieren $d^3r'\mathbf{j}(\mathbf{r}') = df'dl'j(\mathbf{r}')\mathbf{e} = Id\mathbf{r}'$ und erhält

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{c} \int \frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \times d\mathbf{r}' \tag{9.9}$$



Als Beispiel betrachten wir die Induktion in der Mittelachse eines Kreisstromes

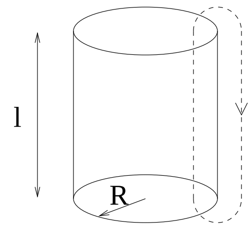
$$\mathbf{r} = z\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r}' = (R\cos\phi, R\sin\phi, z') \quad d\mathbf{r}' = (-R\sin\phi, R\cos\phi, 0)d\phi \tag{9.10}$$

$$(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) \times d\mathbf{r}' = (R(z-z')\cos\phi, R(z-z')\sin\phi, R^2)d\phi \tag{9.11}$$

$$\mathbf{B}(0,0,z) = \frac{2\pi I R^2 \mathbf{e}_z}{c(R^2+(z-z')^2)^{3/2}}. \tag{9.12}$$

Davon ausgehend berechnen wir das Feld in der Mittelachse einer Spule. Sie habe N Windungen und reiche von $z' = -l/2$ bis $z' = +l/2$. Wir erhalten dann

$$\mathbf{B}(0,0,z) = \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{Ndz'}{l} \frac{2\pi I R^2 \mathbf{e}_z}{c(R^2+(z-z')^2)^{3/2}} = \frac{2\pi IN}{cl}\mathbf{e}_z \left(\frac{\frac{l}{2}-z}{\sqrt{R^2+(\frac{l}{2}-z)^2}} + \frac{\frac{l}{2}+z}{\sqrt{R^2+(\frac{l}{2}+z)^2}} \right). \tag{9.13}$$



Ist die Spule lang, $R \ll l$, und ist man im Innern, $|z| \ll l/2$, so findet man

$$\mathbf{B} = \frac{4\pi IN}{cl}\mathbf{e}_z. \tag{9.14}$$

Aus dem Ampereschen Gesetz folgt bei Integration längs des in der Figur angegebenen Weges

$$\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} IN. \tag{9.15}$$

Daher gilt im Innern näherungsweise der in (9.14) bestimmte Wert, während außerhalb die magnetische Induktion klein dagegen ist.

9.d Vektorpotential

Wir formen den Ausdruck für die magnetische Induktion um

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c} \int d^3r' (\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \frac{1}{c} \int d^3r' \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \tag{9.16}$$

mit

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{9.17}$$

Man bezeichnet $\mathbf{A}$ als das Vektorpotential. Wir zeigen noch, dass $\mathbf{A}$ divergenzfrei ist

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c}\int d^3r'\left(\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\frac{1}{c}\int d^3r'\left(\nabla'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{c}\int d^3r'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla'\mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0. \end{aligned} \tag{9.18}$$

Bei dem dritten Gleichheitszeichen haben wir partiell integriert (B.62). Am Schluss haben wir $\operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$ verwendet.

9.e Kraft zwischen zwei Stromkreisen

Wir betrachten noch die Kraft zwischen zwei Stromkreisen. Die Kraft, die der Stromkreis (1) auf den Stromkreis (2) ausübt ist

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_2 &= \frac{1}{c}\int d^3r\mathbf{j}_2(\mathbf{r})\times\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{c^2}\int d^3rd^3r'\mathbf{j}_2(\mathbf{r})\times\left((\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|})\times\mathbf{j}_1(\mathbf{r}')\right) \\ &= \frac{1}{c^2}\int d^3rd^3r'\big(\mathbf{j}_1(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r})\big)\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{c^2}\int d^3rd^3r'\Big((\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|})\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r})\Big)\mathbf{j}_1(\mathbf{r}')\end{aligned} \tag{9.19}$$

unter Verwendung von (B.14). Da wegen (B.62)

$$\int d^3r(\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|})\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) = -\int d^3r\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) \tag{9.20}$$

und $\operatorname{div}\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) = 0$, folgt schließlich für die Kraft

$$\mathbf{K}_2 = \frac{1}{c^2}\int d^3rd^3r'\big(\mathbf{j}_1(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r})\big)\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{9.21}$$

Die auf den ersten Stromkreis wirkende Kraft erhält man durch Austauschen von 1 und 2. Gleichzeitig kann man $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ austauschen. Man sieht dann, dass

$$\mathbf{K}_1 = -\mathbf{K}_2 \tag{9.22}$$

gilt.

10 Ringströme als magnetische Dipole

10.a Feld eines Ringstroms

Wir betrachten eine Stromverteilung, die nur innerhalb einer Kugel vom Radius R von Null verschieden ist ($\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathbf{0}$ für $r' > R$) und fragen nach der magnetischen Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ für $r > R$. Wir können dann das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (9.17) ähnlich wie das elektrische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ in Abschnitt(4) entwickeln

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\mathrm{c}r} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \frac{x_\alpha}{\mathrm{c}r^3} \int d^3r' x'_\alpha \mathbf{j}(\mathbf{r}') + ... \tag{10.1}$$

Da durch die Kugeloberfläche kein Strom fließt, folgt

$$0 = \int d\mathbf{f} \cdot g(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \int d^3r \,\mathrm{div}\,(g(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r})) = \int d^3r \,\mathrm{grad}\, g(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) + \int d^3r g(\mathbf{r}) \,\mathrm{div}\, \mathbf{j}(\mathbf{r}), \tag{10.2}$$

wobei die Integrale über die Oberfläche beziehungsweise das Volumen der Kugel erstreckt wird. Aus der Kontinuitätsgleichung (1.12,3.1) folgt also

$$\int d^3r \,\mathrm{grad}\, g(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0. \tag{10.3}$$

Dies verwenden wir, um die Integrale in der Entwicklung (10.1) zu vereinfachen. Mit $g(\mathbf{r}) = x_\alpha$ folgt

$$\int d^3r j_\alpha(\mathbf{r}) = 0. \tag{10.4}$$

Damit fällt der erste Term der Entwicklung weg. Es gibt keinen mit $1/r$ abfallenden Beitrag im Vektorpotential für die Magnetostatik. Mit $g(\mathbf{r}) = x_\alpha x_\beta$ folgt

$$\int d^3r \big(x_\alpha j_\beta(\mathbf{r}) + x_\beta j_\alpha(\mathbf{r})\big) = 0. \tag{10.5}$$

Damit können wir umformen

$$\int d^3r x_\alpha j_\beta = \frac{1}{2} \int d^3r (x_\alpha j_\beta - x_\beta j_\alpha) + \frac{1}{2} \int d^3r (x_\alpha j_\beta + x_\beta j_\alpha). \tag{10.6}$$

Das zweite Integral verschwindet, wie wir gerade gesehen haben. Das erste ändert sein Vorzeichen bei Austausch der Indices α und β. Man führt ein

$$\int d^3r x_\alpha j_\beta = \frac{1}{2} \int d^3r (x_\alpha j_\beta - x_\beta j_\alpha) = \mathrm{c}\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} m_\gamma \tag{10.7}$$

und bezeichnet den daraus folgenden Vektor

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2\mathrm{c}} \int d^3r' (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \tag{10.8}$$

als das magnetische Dipolmoment. Damit folgt dann

$$A_\beta(\mathbf{r}) = \frac{x_\alpha}{\mathrm{c}r^3} \mathrm{c}\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} m_\gamma + ... \tag{10.9}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} + ... \tag{10.10}$$

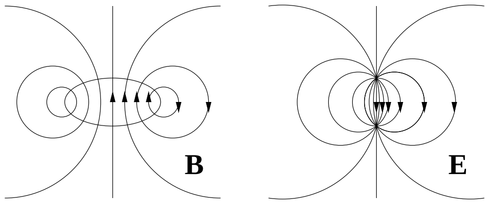
Mit $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}(\mathbf{r})$ folgt

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{m}r^2}{r^5} + ... \tag{10.11}$$

Dies ist das Feld eines magnetischen Dipols, denn es hat die gleiche Form wie das elektrische Feld des elektrischen Dipols (4.12)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\,\mathrm{grad}\,\big(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}\big) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{p}r^2}{r^5}, \tag{10.12}$$

aber es besteht ein Unterschied am Ort des Dipols. Anschaulich entnimmt man das der nebenstehenden Figur. Man berechne den $\delta^3(\mathbf{r})$-Beitrag zu den beiden Dipolmomenten. Vergleiche (B.71).



10.b Magnetisches Dipolmoment

Für das Dipolmoment eines Stromes auf einer geschlossenen Kurve erhält man

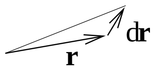
$$\mathbf{m} = \frac{I}{2\mathrm{c}} \int \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \frac{I}{\mathrm{c}} \mathbf{f}, \tag{10.13}$$

zum Beispiel

$$m_{\mathrm{z}} = \frac{I}{2\mathrm{c}} \int (x dy - y dx) = \frac{I}{\mathrm{c}} f_{\mathrm{z}}. \tag{10.14}$$

Dabei ist f_α die Projektion der vom Leiter eingeschlossenen Fläche auf die von den beiden anderen Achsen aufgespannte Ebene

$$d\mathbf{f} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{r}. \tag{10.15}$$



Falls $\mathbf{j} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$, dann folgt für das magnetische Moment

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2\mathrm{c}} \sum_i q_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \frac{q_i}{2m_i\mathrm{c}} \mathbf{l}_i, \tag{10.16}$$

wobei m_i für die Masse und $\mathbf{l}_i$ für den Drehimpuls steht. Haben wir es mit einer Sorte Ladungsträger zu tun, dann gilt

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2mc} \mathbf{l}. \tag{10.17}$$

Dies gilt für Orbitalströme. Für Spins hat man dagegen

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2mc} g \mathbf{s}, \tag{10.18}$$

wobei $\mathbf{s}$ der Drehimpuls des Spins ist. Für Elektronen ist der gyromagnetische Faktor $g = 2.0023$ und die Komponenten des Spins $\mathbf{s}$ nehmen die Werte $\pm\hbar/2$ an. Da der Bahndrehimpuls quantenmechanisch ganzzahlige Vielfache von $\hbar$ annimmt, führt man als Einheit des magnetischen Moments des Elektrons das Bohrsche Magneton ein, $\mu_B = \frac{\mathrm{e}_0\hbar}{2\mathrm{m}_0\mathrm{c}} = 0.927 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^2$.

10.c Kraft und Drehmoment auf einen Dipol im äußeren magnetischen Feld

10.c.α Kraft

Ein äußeres Magnetfeld $\mathbf{B}_{\mathrm{a}}$ übt auf einen Ringstrom die Lorentz-Kraft

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}_{\mathrm{a}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\mathrm{c}} \mathbf{B}_{\mathrm{a}}(0) \times \int d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) - \frac{1}{\mathrm{c}} \frac{\partial \mathbf{B}_{\mathrm{a}}}{\partial x_\alpha} \times \int d^3r x_\alpha j_\beta(\mathbf{r}) \mathbf{e}_\beta - ... = -\frac{\partial \mathbf{B}_{\mathrm{a}}}{\partial x_\alpha} \times \mathbf{e}_\beta \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} m_\gamma \tag{10.19}$$

aus. Wir formen noch um $m_\gamma \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \mathbf{e}_\beta = m_\gamma \mathbf{e}_\gamma \times \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{m} \times \mathbf{e}_\alpha$ und finden

$$\mathbf{K} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{\mathrm{a}}}{\partial x_\alpha} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{e}_\alpha) = (\mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_{\mathrm{a}}}{\partial x_\alpha}) \mathbf{e}_\alpha - (\mathbf{e}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_{\mathrm{a}}}{\partial x_\alpha}) \mathbf{m}. \tag{10.20}$$

Der letzte Term verschwindet wegen $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$. Für den ersten Term der rechten Seite erhalten wir $(\mathbf{m}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha})\mathbf{e}_\alpha = m_\gamma\frac{\partial B_{\mathrm{a},\gamma}}{\partial x_\alpha}\mathbf{e}_\alpha = m_\gamma\frac{\partial B_{\mathrm{a},\alpha}}{\partial x_\gamma}\mathbf{e}_\alpha = (\mathbf{m}\nabla)\mathbf{B}_\mathrm{a}$, wobei wir $\operatorname{rot}\mathbf{B}_\mathrm{a} = 0$ in der Gegend des Dipols verwendet haben. Daher bleibt

$$\mathbf{K} = (\mathbf{m}\,\mathrm{grad}\,)\mathbf{B}_\mathrm{a} \tag{10.21}$$

als Kraft auf den magnetischen Dipol in Analogie zu (4.35), wo wir als Kraft auf den elektrischen Dipol $(\mathbf{p}\,\mathrm{grad}\,)\mathbf{E}_\mathrm{a}$ erhielten.

10.c.β Drehmoment

Das mechanische Drehmoment auf den magnetischen Dipol ergibt sich zu

$$\mathbf{M}_\mathrm{mech} = \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^3r\mathbf{r}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{B}_\mathrm{a}) = -\frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{B}_\mathrm{a}\int d^3r(\mathbf{r}\cdot\mathbf{j}) + \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^3r(\mathbf{B}_\mathrm{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{j}. \tag{10.22}$$

Das erste Integral verschwindet, was man mit (10.3) und $g = r^2/2$ leicht sieht. Das zweite Integral ergibt

$$\mathbf{M}_\mathrm{mech} = \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{e}_\beta B_{\mathrm{a},\alpha}\int d^3r x_\alpha j_\beta = B_{\mathrm{a},\alpha}\mathbf{e}_\beta\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}m_\gamma = \mathbf{m}\times\mathbf{B}_\mathrm{a}. \tag{10.23}$$

Analog war das Drehmoment auf einen elektrischen Dipol $\mathbf{p}\times\mathbf{E}_\mathrm{a}$, (4.36).

Es liegt nahe, nun aus dem Kraftgesetz auf die Energie eines magnetischen Dipols zu $U = -\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_\mathrm{a}$ zu schließen. Aber dies ist falsch wegen des Induktionsgesetzes.

11 Magnetismus in Materie

Ähnlich wie wir die Polarisationsladungen in der Elektrostatik von den freibeweglichen Ladungen separiert haben, zerlegen wir die Stromdichte in eine freibewegliche Ladungsstromdichte $\mathbf{j}_\mathrm{f}$ und in die Magnetisierungsstromdichte $\mathbf{j}_\mathrm{M}$, die etwa von Orbitalströmen der Elektronen herrührt

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_\mathrm{M}(\mathbf{r}). \tag{11.1}$$

Wir führen dazu die Magnetisierung als magnetische Dipoldichte ein

$$\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{m}_i}{\Delta V} \tag{11.2}$$

und führen wieder den Grenzübergang zum Kontinuum durch

$$\sum_i \mathbf{m}_i f(\mathbf{r}_i) \to \int d^3r' \mathbf{M}(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}'). \tag{11.3}$$

Dann erhalten wir für das Vektorpotential unter Verwendung von (10.10)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \int d^3r' \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{11.4}$$

Das zweite Integral lässt sich umformen in

$$\int d^3r' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}'), \tag{11.5}$$

so dass man

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} (\mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}') + \mathrm{c}\,\mathrm{rot}\,'\mathbf{M}(\mathbf{r}')), \tag{11.6}$$

erhält. Es liegt nahe, $\mathbf{j}_\mathrm{M}(\mathbf{r}') = \mathrm{c}\,\mathrm{rot}\,'\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ als Magnetisierungsstromdichte zu interpretieren. Damit folgt dann für die magnetische Induktion

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} \mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + 4\pi\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M}(\mathbf{r}). \tag{11.7}$$

Man führt nun die magnetische Feldstärke

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) := \mathbf{B}(\mathbf{r}) - 4\pi\mathbf{M}(\mathbf{r}) \tag{11.8}$$

ein, für die dann die Maxwellgleichung

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} \mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) \tag{11.9}$$

gilt. An der anderen Maxwellgleichung $\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$ ändert sich dadurch nichts.

Für para- und diamagnetische Substanzen ist für nicht zu große Feldstärken

$$\mathbf{M} = \chi_\mathrm{m}\mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mu = 1 + 4\pi\chi_\mathrm{m}, \tag{11.10}$$

wobei χ_m als magnetische Suszeptibilität und μ als relative Permeabilität bezeichnet werden. Im Supraleiter erster Art ist $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ (vollständiger Diamagnetismus). Die magnetische Induktion wird dort durch Oberflächenströme vollständig aus dem Material verdrängt.

Als Randbedingungen folgt analog zur Argumentation für die dielektrische Verschiebung und die elektrische Feldstärke die Stetigkeit der Normalkomponente B_n und bei Abwesenheit von Leitungsströmen die Stetigkeit der Tangentialkomponenten $\mathbf{H}_\mathrm{t}$.

Im Gaußschen Maßsystem werden $\mathbf{M}$ und $\mathbf{H}$ genau so wie $\mathbf{B}$ in $\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}$ gemessen, während im SI-System $\mathbf{B}$ in $\mathrm{Vs/m^2}$, $\mathbf{H}$ und $\mathbf{M}$ in A/m gemessen werden. Dabei bestehen für $\mathbf{H}$ und $\mathbf{M}$ Umrechnungsfaktoren, die sich durch einen Faktor 4π unterscheiden. Genaueres siehe Anhang A.