C

Magnetostatik

Magnetostatics

In diesem Kapitel behandeln wir die Magnetostatik ausgehend von den Gleichungen, die für zeitunabhängige Ströme am Anfang des Abschnittes (3.a) hergeleitet wurden.

In this chapter we consider magnetostatics starting from the equations, which were derived at the beginning of section (3.a) for time independent currents.

9 Magnetische Induktion und Vektorpotential

9 Magnetic Induction and Vector Potential

9.a Amperegesetz

9.a Ampere's Law

Aus

From

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \tag{9.1}$$

folgt

one obtains

$$\int d\mathbf{f}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\int d\mathbf{f}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}), \tag{9.2}$$

was mit Hilfe des Stokesschen Satzes (B.56)

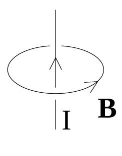
which can be written by means of Stokes' theorem (B.56)

$$\oint d\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}I \tag{9.3}$$

geschrieben werden kann. Das Linienintegral der magnetischen Induktion $\mathbf{B}$ über eine geschlossene Kurve ergibt das $4\pi/\mathrm{c}$ fache des Stromes I durch die Kurve.

. The line integral of the magnetic induction $\mathbf{B}$ along a closed line yields $4\pi/\mathrm{c}$ times the current through the line.

Dabei gilt die Korkenzieher-Regel: Der Strom ist in die Richtung zu messen, in die sich der Korkenzieher bei Drehung in die Richtung des Linienintegrals bewegt.



Here the corkscrew rule applies: If the current moves in the direction of the corkscrew, then the magnetic induction has the direction in which the corkscrew rotates.

9.b Magnetischer Fluss

9.b Magnetic Flux

Als magnetischen Fluss Ψ^{m} durch eine gerichtete Fläche F bezeichnet man das Integral

The magnetic flux Ψ^{m} through an oriented area F is defined as the integral

$$\Psi^{\mathrm{m}} = \int_F d\mathbf{f}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}). \tag{9.4}$$

Der magnetische Fluss hängt nur von der Berandung ∂F der Fläche ab. Zum Beweis bilden wir die Differenz des Flusses durch zwei Flächen F_1 und F_2 mit der gleichen Berandung und erhalten

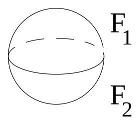
The magnetic flux depends only on the boundary ∂F of the area. To show this we consider the difference of the flux through two areas F_1 and F_2 with the same boundary and obtain

$$\Psi_1^{\mathrm{m}} - \Psi_2^{\mathrm{m}} = \int_{F_1} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \int_{F_2} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_V d^3r \,\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \tag{9.5}$$

mit Hilfe des Gaußschen Satzes (B.59) und $\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$.

by means of the divergence theorem (B.59) and $\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$.

Dabei seien F_1 und F_2 in die gleiche Richtung (zum Beispiel nach oben) orientiert. Die geschlossene Fläche F setzt sich aus F_1 und F_2 zusammen, wobei F_2 jetzt in der umgekehrten Richtung orientiert sei.



Suppose F_1 and F_2 are oriented in the same direction (for example upwards). Then the closed surface F is composed of F_1 and F_2, where F_2 is now oriented in the opposite direction.

Dann hat F eine bestimmte Orientierung (zum Beispiel nach außen) und schließt das Volumen V ein.

Then F has a definite orientation (for example outwards) and includes the volume V.

9.c Feld einer Stromverteilung

9.c Field of a Current Distribution

Aus $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (4\pi/\mathrm{c})\,\mathrm{rot}\,\mathbf{j}(\mathbf{r})$ folgt wegen (B.26)

From $\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (4\pi/\mathrm{c})\,\mathrm{curl}\,\mathbf{j}(\mathbf{r})$ due to (B.26)

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) - \triangle\mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{9.6}$$

und $\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$

and $\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$ one obtains

$$\triangle\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{\mathrm{c}}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}) \tag{9.7}$$

mit der Lösung

with the solution

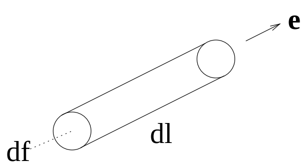
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^3r'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{rot}'\mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\frac{1}{\mathrm{c}}\int d^3r'\Big(\nabla'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big)\times\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^3r'\frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\times\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \tag{9.8}$$

wobei wir beim zweiten Gleichheitszeichen (B.63) verwendet haben. Der letzte Ausdruck wird als das Gesetz von Biot und Savart bezeichnet.

where we have used (B.63) at the second equals sign. The last expression is called the law of Biot and Savart.

Ist die Ausdehnung eines Drahtes senkrecht zur Stromrichtung vernachlässigbar klein (Stromfaden), so kann man $d^3r'\mathbf{j}(\mathbf{r}') = df'dl'j(\mathbf{r}')\mathbf{e} = Id\mathbf{r}'$ approximieren und erhält

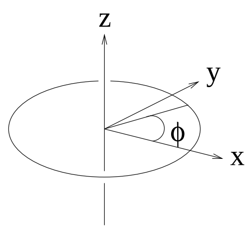
If the extension of a wire perpendicular to the direction of the current is negligible (filamentary wire) then one can approximate $d^3r'\mathbf{j}(\mathbf{r}') = df'dl'j(\mathbf{r}')\mathbf{e} = Id\mathbf{r}'$ and obtains



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{\mathrm{c}}\int\frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\times d\mathbf{r}' \tag{9.9}$$

Als Beispiel betrachten wir die Induktion in der Mittelachse eines Kreisstromes

As an example we consider the induction in the middle axis of a current along a circle



$$\mathbf{r} = z\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r}' = (R\cos\phi, R\sin\phi, z') \quad d\mathbf{r}' = (-R\sin\phi, R\cos\phi, 0)d\phi \tag{9.10}$$

$$(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times d\mathbf{r}' = (R(z-z')\cos\phi, R(z-z')\sin\phi, R^2)d\phi \tag{9.11}$$

$$\mathbf{B}(0,0,z) = \frac{2\pi I R^2 \mathbf{e}_z}{\mathrm{c}(R^2 + (z-z')^2)^{3/2}}. \tag{9.12}$$

Davon ausgehend berechnen wir das Feld in der Mittelachse einer Spule. Sie habe N Windungen und reiche von $z' = -l/2$ bis $z' = +l/2$. Wir erhalten dann

Starting from this result we calculate the field in the axis of a coil. The number of windings be N and it extends from $z' = -l/2$ to $z' = +l/2$. Then we obtain

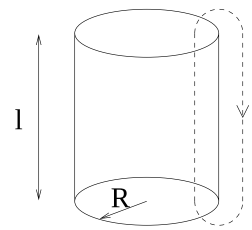
$$\mathbf{B}(0,0,z) = \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{N dz'}{l} \frac{2\pi I R^2 \mathbf{e}_z}{\mathrm{c}(R^2 + (z-z')^2)^{3/2}} = \frac{2\pi I N}{\mathrm{c}l}\mathbf{e}_z \left(\frac{\frac{l}{2} - z}{\sqrt{R^2 + (\frac{l}{2} - z)^2}} + \frac{\frac{l}{2} + z}{\sqrt{R^2 + (\frac{l}{2} + z)^2}} \right). \tag{9.13}$$

Ist die Spule lang, $R \ll l$, dann kann man für hinreichend große Entfernung vom Spulenende das R^2 im Nenner vernachlässigen und erhält für das Innere der Spule

If the coil is long, $R \ll l$, then one may neglect R^2 and obtains inside the coil

$$\mathbf{B} = \frac{4\pi I N}{\mathrm{c}l}\mathbf{e}_z. \tag{9.14}$$

An den Spulenenden ist das Feld auf die Hälfte des Wertes im Inneren abgefallen. Aus dem Ampereschen Gesetz folgt bei Integration längs des in der Figur angegebenen Weges



At the ends of the coil the field has decayed to one half of its intensity inside the coil. From Ampere's law one obtains by integration along the path described in the figure

$$\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} I N. \tag{9.15}$$

Daher gilt im Innern näherungsweise der in (9.14) bestimmte Wert, während außerhalb die magnetische Induktion klein dagegen ist.

Thus inside the coil one obtains the induction (9.14), whereas the magnetic induction outside is comparatively small.

9.d Vektorpotential

Wir formen den Ausdruck für die magnetische Induktion um

9.d Vector Potential

We now rewrite the expression for the magnetic induction

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r' (\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r' \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \tag{9.16}$$

mit

with

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{9.17}$$

Man bezeichnet $\mathbf{A}$ als das Vektorpotential. Wir zeigen noch, dass $\mathbf{A}$ divergenzfrei ist

One calls $\mathbf{A}$ the vector potential. We show, that $\mathbf{A}$ is divergence-free

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r' \left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r' \left(\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')$$

$$= \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla'\mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0. \tag{9.18}$$

Bei dem dritten Gleichheitszeichen haben wir partiell integriert (B.62). Am Schluss haben wir $\operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$ verwendet.

At the third equals sign we have performed a partial integration (B.62). Finally we have used $\operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$.

9.e Kraft zwischen zwei Stromkreisen

9.e Force Between Two Circuits

Wir betrachten noch die Kraft zwischen zwei Stromkreisen. Die Kraft, die der Stromkreis (1) auf den Stromkreis (2) ausübt, ist

Finally, we consider the force between two circuits. The force exerted by circuit (1) on circuit (2) is

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_2 &= \frac{1}{c}\int d^3r\mathbf{j}_2(\mathbf{r})\times\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{c^2}\int d^3rd^3r'\mathbf{j}_2(\mathbf{r})\times\left((\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|})\times\mathbf{j}_1(\mathbf{r}')\right) \\
&= \frac{1}{c^2}\int d^3rd^3r'\big(\mathbf{j}_1(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r})\big)\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{c^2}\int d^3rd^3r'\Big((\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|})\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r})\Big)\mathbf{j}_1(\mathbf{r}')
\end{aligned} \tag{9.19}$$

unter Verwendung von (B.14). Da wegen (B.62)

where (B.14) has been applied. Since due to (B.62)

$$\int d^3r\big(\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\big)\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) = -\int d^3r\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) \tag{9.20}$$

und $\operatorname{div}\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) = 0$, folgt schließlich für die Kraft

and $\operatorname{div}\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) = 0$, one obtains finally for the force

$$\mathbf{K}_2 = \frac{1}{c^2}\int d^3rd^3r'\big(\mathbf{j}_1(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r})\big)\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{9.21}$$

Die auf den ersten Stromkreis wirkende Kraft erhält man durch Austauschen von 1 und 2. Gleichzeitig kann man $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ austauschen. Man sieht dann, dass

The force acting on circuit (1) is obtained by exchanging 1 and 2. Simultaneously, one can exchange $\mathbf{r}$ and $\mathbf{r}'$. One sees then, that

$$\mathbf{K}_1 = -\mathbf{K}_2 \tag{9.22}$$

gilt.

holds.

10 Ringströme als magnetische Dipole

10.a Lokalisierte Stromverteilung und magnetischer Dipol

Wir betrachten eine Stromverteilung, die außerhalb einer Kugel vom Radius R verschwindet ($\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathbf{0}$ für $r' > R$) und fragen nach der magnetischen Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ für $r > R$. Wir können dann das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (9.17) ähnlich wie das elektrische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ in Abschnitt (4) entwickeln

10 Loops of Current as Magnetic Dipoles

10.a Localized Current Distribution and Magnetic Dipole

We consider a distribution of currents which vanishes outside a sphere of radius R ($\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathbf{0}$ for $r' > R$) and determine the magnetic induction $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ for $r > R$. We may expand the vector potential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (9.17) similar to the electric potential $\Phi(\mathbf{r})$ in section (4)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{cr}\int d^3r'\mathbf{j}(\mathbf{r}') + \frac{x_\alpha}{cr^3}\int d^3r' x'_\alpha \mathbf{j}(\mathbf{r}') + ... \tag{10.1}$$

Da durch die Kugeloberfläche kein Strom fließt, folgt

Since no current flows through the surface of the sphere one obtains

$$0 = \int d\mathbf{f}\cdot g(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \int d^3r \operatorname{div}(g(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r})) = \int d^3r \operatorname{grad} g(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}) + \int d^3r g(\mathbf{r}) \operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}), \tag{10.2}$$

wobei die Integrale über die Oberfläche beziehungsweise das Volumen der Kugel erstreckt werden. Aus der Kontinuitätsgleichung (1.12,3.1) folgt also

where the integrals are extended over the surface and the volume of the sphere, respectively. From the equation of continuity (1.12,3.1) it follows that

$$\int d^3r \operatorname{grad} g(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0. \tag{10.3}$$

Dies verwenden wir, um die Integrale in der Entwicklung (10.1) zu vereinfachen. Mit $g(\mathbf{r}) = x_\alpha$ folgt

This is used to simplify the integral in the expansion (10.1). With $g(\mathbf{r}) = x_\alpha$ one obtains

$$\int d^3r j_\alpha(\mathbf{r}) = 0. \tag{10.4}$$

Damit fällt der erste Term der Entwicklung weg. Es gibt keinen mit $1/r$ abfallenden Beitrag im Vektorpotential für die Magnetostatik, das heißt keinen magnetischen Monopol. Mit $g(\mathbf{r}) = x_\alpha x_\beta$ folgt

Thus the first term in the expansion vanishes. There is no contribution to the vector potential decaying like $1/r$ in magnetostatics, that is no magnetic monopole. With $g(\mathbf{r}) = x_\alpha x_\beta$ one obtains

$$\int d^3r\big(x_\alpha j_\beta(\mathbf{r}) + x_\beta j_\alpha(\mathbf{r})\big) = 0. \tag{10.5}$$

Damit können wir umformen

Thus we can rewrite

$$\int d^3r x_\alpha j_\beta = \frac{1}{2}\int d^3r(x_\alpha j_\beta - x_\beta j_\alpha) + \frac{1}{2}\int d^3r(x_\alpha j_\beta + x_\beta j_\alpha). \tag{10.6}$$

Das zweite Integral verschwindet, wie wir gerade gesehen haben. Das erste ändert sein Vorzeichen bei Austausch der Indices α und β. Man führt ein

The second integral vanishes, as we have seen. The first one changes its sign upon exchanging the indices α and β. One introduces

$$\int d^3r x_\alpha j_\beta = \frac{1}{2}\int d^3r(x_\alpha j_\beta - x_\beta j_\alpha) = c\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} m_\gamma \tag{10.7}$$

und bezeichnet den sich daraus ergebenden Vektor

and calls the resulting vector

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2\mathrm{c}} \int d^3r'(\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \tag{10.8}$$

als das magnetische Dipolmoment. Damit folgt dann

magnetic dipole moment. Then one obtains

$$\begin{aligned} A_\beta(\mathbf{r}) &= \frac{x_\alpha}{\mathrm{c}r^3}\mathrm{c}\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} m_\gamma + ... && (10.9) \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} + ... && (10.10) \end{aligned}$$

Mit $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r})$ folgt

with $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{curl} \mathbf{A}(\mathbf{r})$ one obtains

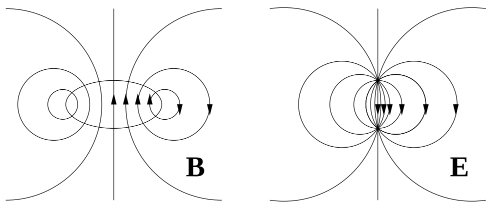
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{m}r^2}{r^5} + ... \tag{10.11}$$

Dies ist das Feld eines magnetischen Dipols. Es hat die gleiche Form wie das elektrische Feld des elektrischen Dipols (4.12)

This is the field of a magnetic dipole. It has the same form as the electric field of an electric dipole (4.12)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad}\left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}\right) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{p}r^2}{r^5}, \tag{10.12}$$

aber es besteht ein Unterschied am Ort des Dipols. Anschaulich entnimmt man das der nebenstehenden Figur. Man berechne den $\delta^3(\mathbf{r})$-Beitrag zu den beiden Dipolmomenten. Vergleiche (B.71).



but there is a difference at the location of the dipole. This can be seen in the accompanying figure. Calculate the $\delta^3(\mathbf{r})$-contribution to both dipolar moments. Compare (B.71).

10.b Magnetisches Dipolmoment eines Ringstroms

10.b Magnetic Dipolar Moment of a Current Loop

Für das Dipolmoment eines Stromes auf einer geschlossenen Kurve erhält man

The magnetic dipolar moment of a current on a closed curve yields

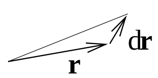
$$\mathbf{m} = \frac{I}{2\mathrm{c}} \int \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \frac{I}{\mathrm{c}}\mathbf{f}, \tag{10.13}$$

zum Beispiel

e.g.

$$m_\mathrm{z} = \frac{I}{2\mathrm{c}} \int (x dy - y dx) = \frac{I}{\mathrm{c}} f_\mathrm{z}. \tag{10.14}$$

Dabei ist f_α die Projektion der vom Leiter eingeschlossenen Fläche auf die von den beiden anderen Achsen aufgespannte Ebene



Here f_α is the projection of the area inside the loop onto the plane spanned by the two other axes

$$d\mathbf{f} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times d\mathbf{r}. \tag{10.15}$$

Falls $\mathbf{j} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$, dann folgt für das magnetische Moment

If $\mathbf{j} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$, then the magnetic moment reads

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2\mathrm{c}} \sum_i q_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \frac{q_i}{2m_i\mathrm{c}} \mathbf{l}_i, \tag{10.16}$$

wobei m_i für die Masse und $\mathbf{l}_i$ für den Drehimpuls steht. Haben wir es mit einer Sorte Ladungsträger zu tun, dann gilt

where m_i is the mass and $\mathbf{l}_i$ the angular momentum. If only one kind of charges is dealt with, then one has

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2mc}\mathbf{l}. \tag{10.17}$$

Dies gilt für Orbitalströme. Für Spins hat man dagegen

This applies for orbital currents. For spins, however, one has

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2mc}g\mathbf{s}, \tag{10.18}$$

wobei $\mathbf{s}$ der Drehimpuls des Spins ist. Für Elektronen ist der gyromagnetische Faktor $g = 2.0023$ und die Komponenten des Spins $\mathbf{s}$ nehmen die Werte $\pm\hbar/2$ an. Da der Bahndrehimpuls quantenmechanisch ganzzahlige Vielfache von $\hbar$ annimmt, führt man als Einheit des magnetischen Moments des Elektrons das Bohrsche Magneton ein, $\mu_B = \frac{\mathrm{e}_0\hbar}{2\mathrm{m}_0\mathrm{c}} = 0.927\cdot 10^{-20}$ dyn$^{1/2}$ cm^2.

where $\mathbf{s}$ is the angular momentum of the spin. The gyromagnetic factor for electrons is $g = 2.0023$ and the components of the spin $\mathbf{s}$ are $\pm\hbar/2$. Since in quantum mechanics the orbital angular momentum assumes integer multiples of $\hbar$, one introduces as unit for the magnetic moment of the electron Bohr's magneton, $\mu_B = \frac{\mathrm{e}_0\hbar}{2\mathrm{m}_0\mathrm{c}} = 0.927\cdot 10^{-20}$ dyn$^{1/2}$ cm^2.

10.c Kraft und Drehmoment auf einen Dipol im äußeren magnetischen Feld

10.c Force and Torque on a Dipole in an External Magnetic Field

10.c.α Kraft

10.c.α Force

Eine äußere magnetische Induktion $\mathbf{B}_\mathrm{a}$ übt auf einen Ringstrom die Lorentz-Kraft

An external magnetic induction $\mathbf{B}_\mathrm{a}$ exerts on a loop of a current the Lorentz force

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^3r\mathbf{j}(\mathbf{r})\times\mathbf{B}_\mathrm{a}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{B}_\mathrm{a}(0)\times\int d^3r\mathbf{j}(\mathbf{r}) - \frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial\mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha}\times\int d^3r x_\alpha j_\beta(\mathbf{r})\mathbf{e}_\beta - ... = -\frac{\partial\mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha}\times\mathbf{e}_\beta\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}m_\gamma \tag{10.19}$$

aus. Wir formen $m_\gamma\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}\mathbf{e}_\beta = m_\gamma\mathbf{e}_\gamma\times\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{m}\times\mathbf{e}_\alpha$ um und finden

. We rewrite $m_\gamma\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}\mathbf{e}_\beta = m_\gamma\mathbf{e}_\gamma\times\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{m}\times\mathbf{e}_\alpha$ and find

$$\mathbf{K} = -\frac{\partial\mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha}\times(\mathbf{m}\times\mathbf{e}_\alpha) = (\mathbf{m}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha})\mathbf{e}_\alpha - (\mathbf{e}_\alpha\cdot\frac{\partial\mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha})\mathbf{m}. \tag{10.20}$$

Der letzte Term verschwindet wegen $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$. Für den ersten Term der rechten Seite erhalten wir $(\mathbf{m}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha})\mathbf{e}_\alpha = m_\gamma\frac{\partial B_{\mathrm{a},\gamma}}{\partial x_\alpha}\mathbf{e}_\alpha = m_\gamma\frac{\partial B_{\mathrm{a},\alpha}}{\partial x_\gamma}\mathbf{e}_\alpha = (\mathbf{m}\nabla)\mathbf{B}_\mathrm{a}$, wobei wir $\operatorname{rot}\mathbf{B}_\mathrm{a} = \mathbf{0}$ in der Gegend des Dipols verwendet haben. Daher bleibt

The last term vanishes because of $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$. The first term on the right hand side can be written $(\mathbf{m}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha})\mathbf{e}_\alpha = m_\gamma\frac{\partial B_{\mathrm{a},\gamma}}{\partial x_\alpha}\mathbf{e}_\alpha = m_\gamma\frac{\partial B_{\mathrm{a},\alpha}}{\partial x_\gamma}\mathbf{e}_\alpha = (\mathbf{m}\nabla)\mathbf{B}_\mathrm{a}$, where we have used $\operatorname{curl}\mathbf{B}_\mathrm{a} = \mathbf{0}$ in the region of the dipole. Thus we obtain the force

$$\mathbf{K} = (\mathbf{m}\operatorname{grad})\mathbf{B}_\mathrm{a} \tag{10.21}$$

als Kraft auf den magnetischen Dipol in Analogie zu (4.35), wo wir als Kraft auf den elektrischen Dipol $(\mathbf{p}\operatorname{grad})\mathbf{E}_\mathrm{a}$ erhielten.

acting on the magnetic dipole in analogy to (4.35), where we obtained the force $(\mathbf{p}\operatorname{grad})\mathbf{E}_\mathrm{a}$ acting on an electric dipole.

10.c.β Drehmoment

10.c.β Torque

Das mechanische Drehmoment auf den magnetischen Dipol ergibt sich zu

The torque on a magnetic dipole is given by

$$\mathbf{M}_\mathrm{mech} = \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^3r\mathbf{r}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{B}_\mathrm{a}) = -\frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{B}_\mathrm{a}\int d^3r(\mathbf{r}\cdot\mathbf{j}) + \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^3r(\mathbf{B}_\mathrm{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{j}. \tag{10.22}$$

Das erste Integral verschwindet, was man mit (10.3) und $g = r^2/2$ leicht sieht. Das zweite Integral ergibt

The first integral vanishes, which is easily seen from (10.3) and $g = r^2/2$. The second integral yields

$$\mathbf{M}_{\rm mech} = \frac{1}{c}\mathbf{e}_\beta B_{{\rm a},\alpha} \int d^3r x_\alpha j_\beta = B_{{\rm a},\alpha}\mathbf{e}_\beta \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} m_\gamma = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_{\rm a}. \tag{10.23}$$

Analog war das Drehmoment auf einen elektrischen Dipol $\mathbf{p} \times \mathbf{E}_{\rm a}$, (4.36).

Analogously the torque on an electric dipole was $\mathbf{p} \times \mathbf{E}_{\rm a}$, (4.36).

Aus dem Kraftgesetz schließt man auf die Energie eines magnetischen Dipols im äußeren Feldes zu

From the law of force one concludes the energy of a magnetic dipole in an external field as

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_{\rm a}. \tag{10.24}$$

Das ist korrekt für permanente magnetische Dipole. Aber das genaue Zustandekommen dieses Ausdrucks wird erst bei Behandlung des Induktionsgesetzes klar (Abschnitt 13).

This is correct for permanent magnetic moments. However, the precise derivation of this expression becomes clear only when we treat the law of induction (section 13).

11 Magnetismus in Materie

Ähnlich wie wir die Polarisationsladungen in der Elektrostatik von den freibeweglichen Ladungen separiert haben, zerlegen wir die Stromdichte in eine freibewegliche Ladungsstromdichte $\mathbf{j}_\mathrm{f}$ und in die Magnetisierungsstromdichte $\mathbf{j}_\mathrm{M}$, die etwa von Orbitalströmen der Elektronen herrührt

11 Magnetism in Matter

In a similar way as we separated the polarization charges from freely accessible charges, we divide the current density into a freely moving current density $\mathbf{j}_\mathrm{f}$ and the density of the magnetization current $\mathbf{j}_\mathrm{M}$, which may come from orbital currents of electrons

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_\mathrm{M}(\mathbf{r}). \tag{11.1}$$

Wir führen dazu die Magnetisierung als magnetische Dipoldichte ein

We introduce the magnetization as the density of magnetic dipoles

$$\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{m}_i}{\Delta V} \tag{11.2}$$

und führen wieder den Grenzübergang zum Kontinuum durch

and conduct the continuum limit

$$\sum_i \mathbf{m}_i f(\mathbf{r}_i) \to \int d^3r' \mathbf{M}(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}'). \tag{11.3}$$

Dann erhalten wir für das Vektorpotential unter Verwendung von (10.10)

Then using (10.10) we obtain for the vector potential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \int d^3r' \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{11.4}$$

Das zweite Integral lässt sich umformen in

The second integral can be rewritten

$$\int d^3r' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}'), \tag{11.5}$$

so dass man

so that one obtains

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} (\mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}') + \mathrm{c}\,\mathrm{rot}'\mathbf{M}(\mathbf{r}')) \tag{11.6}$$

erhält. Es liegt nahe, $\mathbf{j}_\mathrm{M}(\mathbf{r}') = \mathrm{c}\,\mathrm{rot}'\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ als Magnetisierungsstromdichte zu interpretieren. Damit folgt dann für die magnetische Induktion

. Thus one interprets $\mathbf{j}_\mathrm{M}(\mathbf{r}') = \mathrm{c}\,\mathrm{curl}'\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ as the density of the magnetization current. Then one obtains for the magnetic induction

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} \mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + 4\pi\, \mathrm{rot}\,\mathbf{M}(\mathbf{r}). \tag{11.7}$$

Man führt nun die magnetische Feldstärke

Now one introduces the magnetic field strength

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) := \mathbf{B}(\mathbf{r}) - 4\pi\mathbf{M}(\mathbf{r}) \tag{11.8}$$

ein, für die dann die Maxwellgleichung

for which Maxwell's equation

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} \mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) \tag{11.9}$$

gilt. An der anderen Maxwellgleichung $\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$ ändert sich dadurch nichts.

holds. Maxwell's equation $\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$ remains unchanged.

Für para- und diamagnetische Substanzen ist für nicht zu große Feldstärken

One obtains for paramagnetic and diamagnetic materials in not too strong fields

$$\mathbf{M} = \chi_\mathrm{m}\mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mu = 1 + 4\pi\chi_\mathrm{m}, \tag{11.10}$$

wobei χ_m als magnetische Suszeptibilität und μ als relative Permeabilität bezeichnet werden. Im Supraleiter erster Art ist $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ (vollständiger Diamagnetismus). Die magnetische Induktion wird dort durch Oberflächenströme vollständig aus dem Material verdrängt.

Als Randbedingungen folgt analog zur Argumentation für die dielektrische Verschiebung und die elektrische Feldstärke die Stetigkeit der Normalkomponente B_n und bei Abwesenheit von Leitungsströmen die Stetigkeit der Tangentialkomponenten $\mathbf{H}_\mathrm{t}$.

Im Gaußschen Maßsystem werden $\mathbf{M}$ und $\mathbf{H}$ genau so wie $\mathbf{B}$ in dyn$^{1/2}$ cm^{-1} gemessen, während im SI-System $\mathbf{B}$ in Vs/m^2, $\mathbf{H}$ und $\mathbf{M}$ in A/m gemessen werden. Dabei bestehen für $\mathbf{H}$ und $\mathbf{M}$ Umrechnungsfaktoren, die sich durch einen Faktor 4π unterscheiden. Genaueres siehe Anhang A.

where χ_m is the magnetic susceptibility and μ the permeability. In superconductors (of first kind) one finds complete diamagnetism $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. There the magnetic induction is completely expelled from the interior by surface currents.

In analogy to the arguments for the dielectric displacement and the electric field one obtains that the normal component B_n is continuous, and in the absence of conductive currents also the tangential components $\mathbf{H}_\mathrm{t}$ are continuous across the boundary.

In the Gaussian system of units the fields $\mathbf{M}$ and $\mathbf{H}$ are measured just as $\mathbf{B}$ in dyn$^{1/2}$ cm^{-1}, whereas in SI-units $\mathbf{B}$ is measured in Vs/m^2, $\mathbf{H}$ and $\mathbf{M}$ in A/m. The conversion factors for $\mathbf{H}$ and $\mathbf{M}$ differ by a factor 4π. For more information see appendix A.