G

Elektrodynamische Potentiale

Electrodynamic Potentials

©2000/01 Franz Wegner Universität Heidelberg

20 Elektrodynamische Potentiale, Eichtransformationen

In der Elektrostatik haben wir bereits das elektrische Potential Φ kennengelernt, in der Magnetostatik das Vektorpotential $\mathbf{A}$. Beide können auch für die zeitabhängigen Probleme eingeführt werden und erlauben auch dann die Bestimmung von $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$.

20.a Potentiale

Die dritte und vierte Maxwell-Gleichung sind homogen, das heißt, sie enthalten die Ladungen und Ströme nicht explizit. Sie erlauben, die Felder $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$ durch Potentiale auszudrücken. Aus $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$ folgt

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r},t). \tag{20.1}$$

Beweis: Wegen $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$ gilt $\triangle\mathbf{B} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B}$ (B.26), woraus dann ähnlich wie in (9.16) und (9.17)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r'\big(\operatorname{rot}'\operatorname{rot}'\mathbf{B}(\mathbf{r}')\big)\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\int d^3r'\frac{\operatorname{rot}'\mathbf{B}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{20.2}$$

bei der Einführung des Vektorpotentials in der Magnetostatik folgt. Ein elementarer Beweis folgt als Übungsaufgabe.

Aus $\operatorname{rot}\mathbf{E}+\dot{\mathbf{B}}/\mathrm{c}=\mathbf{0}$ folgt dann

$$\operatorname{rot}\big(\mathbf{E}+\frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\mathbf{A}}\big)=\mathbf{0}, \tag{20.3}$$

so dass das Argument unter der Rotation als Gradient geschrieben werden kann. Konventionell setzt man dafür $-\operatorname{grad}\Phi$, so dass die Darstellung

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\mathbf{A}} - \operatorname{grad}\Phi \tag{20.4}$$

20 Electrodynamic Potentials, Gauge Transformations

We already know the electric potential Φ from electrostatics and the vector potential $\mathbf{A}$ from magnetostatics. Both can also be used for time-dependent problems and allow the determination of $\mathbf{B}$ and $\mathbf{E}$.

20.a Potentials

Maxwell's third and fourth equations are homogeneous equations, that is they do not contain charges and currents explicitly. They allow to express the fields $\mathbf{B}$ and $\mathbf{E}$ by means of potentials. One obtains from $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$

Proof: Due to $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$ one has $\triangle\mathbf{B} = -\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{B}$ (B.26), from which one concludes similarly as in (9.16) and (9.17)

when the vector potential was introduced in the magnetostatics. An elementary proof is left as exercise.

From $\operatorname{curl}\mathbf{E}+\dot{\mathbf{B}}/\mathrm{c}=\mathbf{0}$ one obtains

so that the argument under the curl can be expressed as a gradient. Conventionally one calls it $-\operatorname{grad}\Phi$, so that

folgt. Der zweite Term ist aus der Elektrostatik bekannt. In der Zeitableitung von $\mathbf{A}$ steckt das Induktionsgesetz. Man sieht umgekehrt, dass die Darstellung der Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ durch die Potentiale in (20.4) und (20.1) die beiden homogenen Maxwell-Gleichungen erfüllt.

follows. The second term is already known from electrostatics. The time derivative of $\mathbf{A}$ contains the law of induction. One sees contrarily that the representations of the potentials in (20.4) and (20.1) fulfill the homogeneous Maxwell equations.

20.b Eichtransformationen

Die Potentiale $\mathbf{A}$ und Φ sind nicht eindeutig durch die Felder $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$ bestimmt. Wir können $\mathbf{A}$ durch

20.b Gauge Transformations

The potentials $\mathbf{A}$ and Φ are not uniquely determined by the fields $\mathbf{B}$ and $\mathbf{E}$. We may replace $\mathbf{A}$ by

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \operatorname{grad}\Lambda(\mathbf{r},t) \tag{20.5}$$

ersetzen, ohne $\mathbf{B}$ zu ändern

without changing $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{rot}\mathbf{A}', \tag{20.6}$$

da $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Lambda = \mathbf{0}$. Dann folgt

since $\operatorname{curl}\operatorname{grad}\Lambda = \mathbf{0}$. It follows that

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\mathbf{A}}' - \operatorname{grad}(\Phi - \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\Lambda}). \tag{20.7}$$

Ersetzen wir gleichzeitig Φ durch

If we replace simultaneously Φ by

$$\Phi'(\mathbf{r},t) = \Phi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\Lambda}(\mathbf{r},t), \tag{20.8}$$

so bleiben $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ unverändert. Man bezeichnet die Transformation (20.5) und (20.8) von $\mathbf{A}$ und Φ als Eichtransformation.

then $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ remain unchanged. One calls the transformations (20.5) and (20.8) gauge transformations.

Die Willkür in der Eichung erlaubt es, Einschränkungen an die Potentiale Φ und $\mathbf{A}$ zu fordern. Die folgenden beiden Eichungen werden häufig verwendet

The arbitrariness in the gauge allows to impose restrictions on the potentials Φ and $\mathbf{A}$

$$\text{Lorenz-Eichung} \quad \text{gauge} \qquad \operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\Phi} = 0, \tag{20.9}$$

$$\text{Coulomb-Eichung} \quad \text{gauge} \qquad \operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \tag{20.10}$$

Hat man Potentiale Φ' und $\mathbf{A}'$, die die gewünschte Eichung nicht erfüllen, so erhält man Potentiale Φ und $\mathbf{A}$ durch geeignete Wahl von Λ

If potentials Φ' and $\mathbf{A}'$ do not obey the desired gauge, the potentials Φ and $\mathbf{A}$ are obtained by an appropriate choice of Λ

$$\text{Lorenz-Eichung} \quad \text{gauge} \qquad \operatorname{div}\mathbf{A}' + \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\Phi}' = \Box\Lambda, \tag{20.11}$$

$$\text{Coulomb-Eichung} \quad \text{gauge} \qquad \operatorname{div}\mathbf{A}' = \triangle\Lambda, \tag{20.12}$$

wobei

where

$$\Box := \triangle - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{20.13}$$

der d'Alembert-Operator ist. Die Lorenz-Eichung geht auf den dänischen Physiker Ludvig V. Lorenz (1867) zurück im Gegensatz zur Loerentz-Transformation (Abschnitt 23), die dem holländischen Physiker Hendrik A. Lorentz zuzuschreiben ist.

is d'Alembert's operator. The Lorenz gauge traces back to the Danish physicist Ludvig V. Lorenz (1867) in contrast to the Lorentz transformation (section 23) attributed to the Dutch physicist Hendrik A. Lorentz.

Einsetzen der Ausdrücke (20.4) und (20.1) für $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ in die erste Maxwell-Gleichung ergibt

Insertion of the expressions (20.4) and (20.1) for $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ into Maxwell's first equation yields

$$\text{rot rot}\,\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{A}} + \frac{1}{c}\,\text{grad}\,\dot{\Phi} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{20.14}$$

das heißt

that is

$$-\Box\mathbf{A} + \text{grad}\left(\text{div}\,\mathbf{A} + \frac{1}{c}\dot{\Phi}\right) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{20.15}$$

während die zweite Maxwell-Gleichung dann

whereas Maxwell's second equation reads

$$-\triangle\Phi - \frac{1}{c}\,\text{div}\,\dot{\mathbf{A}} = 4\pi\rho \tag{20.16}$$

lautet.

.

Daraus folgt für die beiden Eichungen

From this one obtains for both gauges

$$\text{Lorenz}\text{-Eichung}\quad \left\{\begin{array}{l} \Box\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \\ \Box\Phi = -4\pi\rho \end{array}\right. \tag{20.17}$$

$$\text{Coulomb}\text{-Eichung}\quad \left\{\begin{array}{l} \Box\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\,\text{grad}\,\dot{\Phi} \\ \triangle\Phi = -4\pi\rho. \end{array}\right. \tag{20.18}$$

Aufgabe Zeige, dass ein Vektorfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, das $\text{div}\,\mathbf{B} = 0$ genügt, als $\text{rot}\,\mathbf{A}(\mathbf{r})$ dargestellt werden kann. Hierzu setze man $A_z(\mathbf{r}) = 0$ und drücke $A_y(\mathbf{r})$ durch $A_y(x, y, 0)$ und B_x, ähnlich $A_x(\mathbf{r})$ durch $A_x(x, y, 0)$ und B_y aus. Dies setze man in $B_z = (\text{rot}\,\mathbf{A})_z$ ein und zeige unter Verwendung von $\text{div}\,\mathbf{B} = 0$, dass man passende Komponenten von $\mathbf{A}$ bei $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ finden kann.

Exercise Show that a vector field $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, which obeys $\text{div}\,\mathbf{B} = 0$ can be represented by $\text{curl}\,\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Therefore put $A_z(\mathbf{r}) = 0$ and express $A_y(\mathbf{r})$ by $A_y(x, y, 0)$ and B_x, similarly $A_x(\mathbf{r})$ by $A_x(x, y, 0)$ and B_y. Insert this in $B_z = (\text{curl}\,\mathbf{A})_z$ and show by use of $\text{div}\,\mathbf{B} = 0$ that one can find fitting components of $\mathbf{A}$ at $\mathbf{r} = (x, y, 0)$.

21 Die elektromagnetischen Potentiale einer allgemeinen Ladungs- und Stromverteilung

21.a Berechnung der Potentiale

In der Lorenz-Eichung hatten wir (20.17)

$$\Box\Phi(\mathbf{r},t) = -4\pi\rho(\mathbf{r},t), \tag{21.1}$$

$$\Box\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -\frac{4\pi}{\mathrm{c}}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \tag{21.2}$$

mit dem d'Alembert-Operator

$$\Box = \triangle - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{21.3}$$

und der Eichbedingung

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\Phi} = 0. \tag{21.4}$$

Wir führen bezüglich der Zeit die Fourier-Transformierte ein

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}, \tag{21.5}$$

analog für $\mathbf{A}$, ρ, $\mathbf{j}$. Dann folgt

$$\Box\Phi(\mathbf{r},t) = \int d\omega(\triangle + \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2})\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t} = \int d\omega(-4\pi\hat{\rho}(\mathbf{r},\omega))\mathrm{e}^{-i\omega t}, \tag{21.6}$$

woraus durch Vergleich der Integranden

$$(\triangle + \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2})\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega) = -4\pi\hat{\rho}(\mathbf{r},\omega) \tag{21.7}$$

folgt. Wir führen dazu die Greens-Funktion G ein, das heißt, die Lösung der linearen Differentialgleichung werde geschrieben als

$$\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega) = \int d^3r' G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)\hat{\rho}(\mathbf{r}',\omega). \tag{21.8}$$

Setzen wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung (21.7) ein, so folgt

$$(\triangle + \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2})G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{21.9}$$

Da keine Richtung ausgezeichnet ist und die Gleichung invariant gegen Verschiebungen der Vektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ um einen gleichen konstanten Vektor ist, ist anzunehmen, dass die Lösung G nur vom Abstand zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ und zusätzlich natürlich von dem Parameter ω abhängt

$$G = g(a,\omega), \quad a = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|. \tag{21.10}$$

21 Electromagnetic Potentials of a general Charge and Current Distribution

21.a Calculation of the Potentials

Using the Lorenz gauge we had

$$\Box\Phi(\mathbf{r},t) = -4\pi\rho(\mathbf{r},t), \tag{21.1}$$

$$\Box\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -\frac{4\pi}{\mathrm{c}}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \tag{21.2}$$

with d'Alembert's operator

$$\Box = \triangle - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{21.3}$$

and the gauge condition

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\Phi} = 0. \tag{21.4}$$

We perform the Fourier transform with respect to time

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}, \tag{21.5}$$

analogously for $\mathbf{A}$, ρ, $\mathbf{j}$. Then one obtains

$$\Box\Phi(\mathbf{r},t) = \int d\omega(\triangle + \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2})\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t} = \int d\omega(-4\pi\hat{\rho}(\mathbf{r},\omega))\mathrm{e}^{-i\omega t}, \tag{21.6}$$

from which by comparison of the integrands

$$(\triangle + \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2})\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega) = -4\pi\hat{\rho}(\mathbf{r},\omega) \tag{21.7}$$

is obtained. We now introduce the Greens function G, i.e. we write the solution of the linear differential equation as

$$\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega) = \int d^3r' G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)\hat{\rho}(\mathbf{r}',\omega). \tag{21.8}$$

Insertion of this ansatz into the differential equation (21.7) yields

$$(\triangle + \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2})G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{21.9}$$

Since there is no preferred direction and moreover the equation is invariant against displacement of the vectors $\mathbf{r}$ and $\mathbf{r}'$ by the same constant vector, we may assume that the solution depends only on the distance between $\mathbf{r}$ and $\mathbf{r}'$ and additionally of course on ω

$$G = g(a,\omega), \quad a = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|. \tag{21.10}$$

Damit folgt

Then one obtains

$$(\triangle + \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2})g(a,\omega) = \frac{1}{a}\frac{d^2(ag)}{da^2} + \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}g = 0 \begin{matrix}\text{für}\\ \text{for}\end{matrix} \; a \neq 0. \tag{21.11}$$

Dabei verwenden wir den Laplace-Operator in der Form (5.15), wobei $\triangle_\Omega g = 0$, da g nicht von der Richtung von $\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, sondern nur vom Betrag a abhängt. Dies ergibt die Schwingungsgleichung für ag, hat also die Lösung

Here we use the Laplacian in the form (5.15), where $\triangle_\Omega g = 0$, since g does not depend on the direction of $\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, but on the modulus a. This yields the equation of a harmonic oscillation for ag with the solution

$$G = g(a,\omega) = \frac{1}{a}\big(c_1 e^{i\omega a/\mathrm{c}} + c_2 e^{-i\omega a/\mathrm{c}}\big). \tag{21.12}$$

Für kleinen Abstand divergiert die Lösung wie $(c_1 + c_2)/a$. Um die δ-Funktion in (21.9) als Inhomogenität mit dem richtigen Vorfaktor zu erhalten, muss $c_1 + c_2 = 1$ sein. Wir setzen nun der Reihe nach ein

At short distances the solution diverges like $(c_1 + c_2)/a$. In order to obtain the δ-function in (21.9) as an inhomogeneity with the appropriate factor in front, one requires $c_1 + c_2 = 1$. We now insert

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{r},t) &= \int d\omega \hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t} \\
&= \int d\omega \int d^3r' \mathrm{e}^{-i\omega t} G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)\hat{\rho}(\mathbf{r}',\omega) \\
&= \int d\omega \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\big(c_1 e^{i\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\mathrm{c}} + c_2 e^{-i\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\mathrm{c}}\big)\mathrm{e}^{-i\omega t}\hat{\rho}(\mathbf{r}',\omega) \\
&= \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\big(c_1\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\mathrm{c}}) + c_2\rho(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\mathrm{c}})\big).
\end{aligned} \tag{21.13}$$

Beim Übergang von der zweiten auf die dritte Zeile haben wir G eingesetzt. Anschließend führen wir die ω-Integration aus, vergleiche (21.5). Allerdings ist ω im Exponenten in (21.13) nicht mit t, sondern mit $t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\mathrm{c}}$ multipliziert. Die Lösung in der letzten Zeile enthält einen Beitrag zu Φ zur Zeit t, der von ρ zu früherer Zeit (mit Faktor c_1) und einen, der von ρ zu späterer Zeit (mit Faktor c_2) abhängt. Man bezeichnet die Lösung, die nur den ersten Beitrag ($c_1 = 1$, $c_2 = 0$) enthält, als die retardierte Lösung und die, die nur den zweiten Beitrag ($c_1 = 0$, $c_2 = 1$) enthält, als die avancierte Lösung.

Going from the second to the third line we have inserted G. Then we perform the ω-integration, compare (21.5). However, ω in the exponent in (21.13) is not multiplied by t, but by $t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\mathrm{c}}$. The solution in the last line contains a contribution of Φ at time t which depends on ρ at an earlier time (with factor c_1), and one which depends on ρ at a later time (with factor c_2). The solution which contains only the first contribution ($c_1 = 1$, $c_2 = 0$) is called the retarded solution, and the one which contains only the second contribution ($c_1 = 0$, $c_2 = 1$) the advanced solution.

$$\Phi_{\mathrm{r,a}}(\mathbf{r},t) = \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho(\mathbf{r}', t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\mathrm{c}}). \tag{21.14}$$

Physikalisch ist in der Regel die retardierte Lösung (oberes Vorzeichen), da man davon ausgeht, dass das Potential durch die Ladungsverteilung, aber nicht die Ladungsverteilung durch das Potential entsteht. Analog erhält man die retardierte und avancierte Lösung für das Vektorpotential

Normally the retarded solution (upper sign) is the physical solution, since the potential is considered to be created by the charges, but not the charges by the potentials. Analogously, one obtains the retarded and advanced solutions for the vector potential

$$\mathbf{A}_{\mathrm{r,a}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{j}(\mathbf{r}', t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\mathrm{c}}). \tag{21.15}$$

21.b Eichbedingung

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Eichbedingung (20.9) erfüllt ist

$$\dot{\Phi} + \mathrm{c}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}(\dot{\rho} + \mathrm{div}\,\mathbf{j}) + \int d^3r' \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{j}. \tag{21.16}$$

Die Argumente von ρ und $\mathbf{j}$ sind wie oben $\mathbf{r}'$ und $t' = t \mp |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\mathrm{c}$. Im zweiten Integral kann man ∇ durch $-\nabla'$ ersetzen und dann partiell integrieren. Das führt auf

$$\dot{\Phi} + \mathrm{c}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}(\dot{\rho} + (\nabla + \nabla')\mathbf{j}). \tag{21.17}$$

Da $(\nabla + \nabla')t'(t,\mathbf{r},\mathbf{r}') = \mathbf{0}$ ist, folgt unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho}(\mathbf{r}', t'(t,\mathbf{r},\mathbf{r}')) + (\nabla + \nabla')\mathbf{j}(\mathbf{r}', t'(t,\mathbf{r},\mathbf{r}')) = \frac{\partial \rho}{\partial t'} + \nabla'\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')|_{t'} = 0, \tag{21.18}$$

so dass die Eichbedingung (20.9) erfüllt ist, da der Integrand in (21.17) wegen der Kontinuitätsgleichung verschwindet.

21.b Gauge Condition

It remains to be shown that the gauge condition (20.9) is fulfilled

The arguments of ρ and $\mathbf{j}$ are as above $\mathbf{r}'$ and $t' = t \mp |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\mathrm{c}$. In the second integral one can replace ∇ by $-\nabla'$ and perform a partial integration. This yields

Since $(\nabla + \nabla')t'(t,\mathbf{r},\mathbf{r}') = \mathbf{0}$, one obtains from the equation of continuity

so that the gauge condition (20.9) is fulfilled, since the integrand in (21.17) vanishes because of the equation of continuity.

22 Ausstrahlung harmonischer Schwingungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir schwingende Ladungen und Ströme als Strahlungsquellen.

22.a Strahlungsfeld

Wir betrachten harmonische Schwingungen, das heißt, die Zeitabhängigkeit von ρ und $\mathbf{j}$ ist proportional zu $\mathrm{e}^{-i\omega t}$

$$\rho(\mathbf{r},t) = \Re\big(\rho_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-i\omega t}\big) \tag{22.1}$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \Re\big(\mathbf{j}_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-i\omega t}\big), \tag{22.2}$$

analog für Φ, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$. Es folgt

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \Re\int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho_0(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{-i\omega(t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\mathrm{c})}. \tag{22.3}$$

Mit $k = \omega/\mathrm{c}$ folgt

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho_0(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{22.4}$$

analog

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{22.5}$$

22.a.α Nahzone (Statische Zone)

In der Nahzone, das heißt für $k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll 2\pi$, was gleichbedeutend ist mit $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll \lambda$, wobei λ die Wellenlänge der elektromagnetischen Welle ist, kann $\mathrm{e}^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ durch 1 genähert werden. Damit werden die Potentiale Φ_0, (22.4) und $\mathbf{A}_0$, (22.5) zu den Potentialen der Elektro- und Magnetostatik (3.14) und (9.17).

22.a.β Fernzone (Strahlungszone)

Für große Entfernungen entwickelt man im Exponenten

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = r\sqrt{1-2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2}+\frac{r'^2}{r^2}} = r - \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}' + O(\frac{r'^2}{r}), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{22.6}$$

Dies ist gerechtfertigt für $r \gg kR^2$, wobei R eine Abschätzung für die Ausdehnung der Ladungs- bzw. Stromverteilung ist, $r' < R$ für $\rho(\mathbf{r}') \neq 0$ bzw. $\mathbf{j}(\mathbf{r}') \neq \mathbf{0}$. Im Nenner approximieren wir $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx r$, was für $r \gg R$ gut ist. Dann folgt

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{\mathrm{c}r}\mathbf{g}(k\mathbf{n}) + O(\frac{1}{r^2}) \tag{22.7}$$

22 Radiation from Harmonic Oscillations

In this section we consider the radiation of oscillating charges and currents.

22.a Radiation Field

We consider harmonic oscillations, i.e. the time dependence of ρ and $\mathbf{j}$ is proportional to $\mathrm{e}^{-i\omega t}$

(22.1), (22.2)

analogously for Φ, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$. One obtains

(22.3)

With the notation $k = \omega/\mathrm{c}$ it follows that

(22.4)

analogously

(22.5)

22.a.α Near Zone (Static Zone)

In the near zone, i.e. for $k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll 2\pi$ which is equivalent to $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll \lambda$, where λ is the wavelength of the electromagnetic wave, the expression $\mathrm{e}^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ can be approximated by 1. Then the potentials Φ_0, (22.4) and $\mathbf{A}_0$, (22.5) reduce to the potentials of electrostatics (3.14) and of magnetostatics (9.17).

22.a.β Far Zone (Radiation Zone)

At large distances one expands the expression in the exponent

(22.6)

This is justified for $r \gg kR^2$, where R is an estimate of the extension of the charge and current distribution, $r' < R$ for $\rho(\mathbf{r}') \neq 0$ and $\mathbf{j}(\mathbf{r}') \neq \mathbf{0}$, resp. We approximate in the denominator $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx r$ which is reasonable for $r \gg R$. Then one obtains

(22.7)

mit der Fourier-Transformierten der Stromverteilung

with the Fourier transform of the current distribution

$$\mathbf{g}(k\mathbf{n}) = \int d^3r' \mathbf{j}_0(\mathbf{r}') \mathrm{e}^{-ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'}. \tag{22.8}$$

Hieraus folgt das Magnetfeld

From this one deduces the magnetic field

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \mathrm{rot}\, \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{grad}\, \mathrm{e}^{ikr}}{\mathrm{c}r} \times \mathbf{g}(k\mathbf{n}) + O(\frac{1}{r^2}) = ik\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{\mathrm{c}r}\mathbf{n} \times \mathbf{g} + O(\frac{1}{r^2}). \tag{22.9}$$

Das elektrische Feld erhalten wir aus

The electric field is obtained from

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{B} = \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\mathbf{E}} \rightarrow \mathrm{rot}\, \mathbf{B}_0 = -\frac{i\omega}{\mathrm{c}}\mathbf{E}_0 \tag{22.10}$$

zu

as

$$\mathbf{E}_0 = \frac{i}{k}\, \mathrm{rot}\, \mathbf{B}_0 = -\mathbf{n} \times \mathbf{B}_0 + O(\frac{1}{r^2}). \tag{22.11}$$

$\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ und $\mathbf{n}$ bilden ein Orthogonalsystem. $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{B}_0$ sind betragsmäßig gleich und fallen wie $1/r$ ab. Der Poynting-Vektor liefert im zeitlichen Mittel

$\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ and $\mathbf{n}$ are orthogonal to each other. The moduli of $\mathbf{E}_0$ and $\mathbf{B}_0$ are equal and both decay like $1/r$. The Poynting vector yields in the time average

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{S}(t)dt, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{22.12}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} &= \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\overline{\Re\mathbf{E} \times \Re\mathbf{B}} = \frac{\mathrm{c}}{8\pi}\Re(\mathbf{E}_0^* \times \mathbf{B}_0) \\ &= -\frac{\mathrm{c}}{8\pi}\Re\big((\mathbf{n} \times \mathbf{B}_0^*) \times \mathbf{B}_0\big) = -\frac{\mathrm{c}}{8\pi}\Re(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0)\mathbf{B}_0^* + \frac{\mathrm{c}}{8\pi}\mathbf{n}(\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{B}_0). \end{aligned} \tag{22.13}$$

Der erste Term nach dem letzten Gleichheitszeichen verschwindet, da $\mathbf{B}_0 \perp \mathbf{n}$. Es bleibt daher

The first term after the last equals sign vanishes, since $\mathbf{B}_0 \perp \mathbf{n}$. Thus there remains

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{c}}{8\pi}\mathbf{n}(\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{B}_0) = \frac{k^2\mathbf{n}}{8\pi\mathrm{c}r^2}|\mathbf{n} \times \mathbf{g}(k\mathbf{n})|^2 + O(\frac{1}{r^3}). \tag{22.14}$$

Die im Mittel abgestrahlte Leistung ist dann

The average power radiated is

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{k^2}{8\pi c}\int |\mathbf{n} \times \mathbf{g}(k\mathbf{n})|^2 d\Omega_n, \tag{22.15}$$

wobei über den Raumwinkel Ω_n von $\mathbf{n}$ integriert wird.

where the integral is performed over the solid angle Ω_n of $\mathbf{n}$.

22.b Elektrische Dipolstrahlung (Hertzscher Dipol)

22.b Electric Dipole Radiation (Hertz Dipole)

Erstreckt sich die Ladungs- und Stromverteilung nur über einen im Vergleich zur Wellenlänge λ kleinen Bereich R, so ist es sinnvoll, $\mathrm{e}^{-ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'}$ zu entwickeln

If the charge and current distribution is within a range R small in comparison to the wave length λ, then it is reasonable to expand $\mathrm{e}^{-ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'}$

$$\mathbf{g}(k\mathbf{n}) = \mathbf{g}^{(0)} - ik\mathbf{g}^{(1)} + ..., \quad \mathbf{g}^{(0)} = \int d^3r' \mathbf{j}_0(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{g}^{(1)} = \int d^3r' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') \tag{22.16}$$

Diese Entwicklung reicht aus, um das Strahlungsfeld in der Fernzone zu untersuchen. Ist man daran interessiert, auch Nah- und Übergangszone zu betrachten, so muss man

This expansion is sufficient to investigate the radiation field in the far zone. If one is interested to consider it also in the near zone and the intermediate zone, one has to expand

$$\frac{\mathrm{e}^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} + \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}(-ik + \frac{1}{r})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') + O(r'^2) \tag{22.17}$$

in dem Ausdruck für $\mathbf{A}_0$ entwickeln, was

in the expression for $\mathbf{A}_0$, which yields

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{\mathrm{c}r}\mathbf{g}^{(0)} + (-ik + \frac{1}{r})\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{\mathrm{c}r}\mathbf{g}^{(1)} + ... \tag{22.18}$$

ergibt.

Wir betrachten zunächst den Beitrag von $\mathbf{g}^{(0)}$. Wir verwenden, dass

We first consider the contribution from $\mathbf{g}^{(0)}$. We use that

$$\mathrm{div}'\mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\dot{\rho}(\mathbf{r}') = i\omega\rho(\mathbf{r}') \rightarrow \mathrm{div}'\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') = i\omega\rho_0(\mathbf{r}'). \tag{22.19}$$

Dann folgt aus

Then we obtain from

$$\int d^3r' \,\mathrm{div}'\big(f(\mathbf{r}')\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')\big) = 0 \tag{22.20}$$

die Beziehung

the relation

$$\int d^3r' \,\mathrm{grad}'f(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') = -i\omega\int d^3r' f(\mathbf{r}')\rho_0(\mathbf{r}'). \tag{22.21}$$

Mit $f(\mathbf{r}') = x'_\alpha$ folgt dann

One obtains with $f(\mathbf{r}') = x'_\alpha$

$$g^{(0)}_\alpha = \int d^3r' j_{0,\alpha}(\mathbf{r}') = -i\omega\int d^3r' x'_\alpha\rho_0(\mathbf{r}') = -i\omega p_{0,\alpha}, \tag{22.22}$$

das heißt, $\mathbf{g}^{(0)}$ lässt sich durch die Amplitude des elektrischen Dipolmoments ausdrücken

that is $\mathbf{g}^{(0)}$ can be expressed by the amplitude of the electric dipole moment

$$\mathbf{g}^{(0)} = -i\omega\mathbf{p}_0. \tag{22.23}$$

Man bezeichnet daher diesen Anteil als elektrische Dipolstrahlung. Es folgt

Thus one calls this contribution electric dipole radiation. One finds

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = -ik\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\mathbf{p}_0, \tag{22.24}$$

daraus

thus

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = (\frac{k^2}{r} + \frac{ik}{r^2})\mathrm{e}^{ikr}\mathbf{n}\times\mathbf{p}_0 \tag{22.25}$$

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = -\frac{k^2}{r}\mathrm{e}^{ikr}\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{p}_0) + \big(3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}_0) - \mathbf{p}_0\big)(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2})\mathrm{e}^{ikr}. \tag{22.26}$$

Der erste Term ist der führende in der Fernzone ($1/r \ll k$), der zweite führt in der Nahzone ($1/r \gg k$). Aus dem Ausdruck für die Fernzone erhält man als zeitgemittelten Poynting-Vektor

The first term is leading in the far zone ($1/r \ll k$), the second one in the near zone ($1/r \gg k$). One obtains the time-averaged Poynting vector from the expression for the far zone

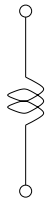
$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{\mathrm{c}k^4\mathbf{n}}{8\pi r^2}|\mathbf{n}\times\mathbf{p}_0|^2 = \frac{\mathrm{c}k^4|\mathbf{p}_0|^2\mathbf{n}}{8\pi r^2}\sin^2\theta, \tag{22.27}$$

Im zweiten Ausdruck wird angenommen, dass Realteil und Imaginärteil von $\mathbf{p}_0$ in die gleiche Richtung weisen. Dann ist θ der Winkel zwischen $\mathbf{p}_0$ und $\mathbf{n}$. Die abgestrahlte Leistung ist dann

In the second expression it is assumed that real and imaginary part of $\mathbf{p}_0$ point into the same direction. Then θ is the angle between $\mathbf{p}_0$ and $\mathbf{n}$. The radiated power is then

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{\mathrm{c}k^4|\mathbf{p}_0|^2}{3}. \tag{22.28}$$

Die Leistung nimmt also mit der vierten Potenz der Frequenz ($\omega = ck$) zu (Rayleigh-Streuung). Als Beispiel kann man zwei Kondensatorkugeln im Abstand l mit $I(t) = \Re(I_0 \mathrm{e}^{-i\omega t})$ betrachten. Dann ist



The radiation increases with the fourth power of the frequency ($\omega = ck$) (Rayleigh radiation). As an example one may consider two capacitor spheres at distance l with $I(t) = \Re(I_0 \mathrm{e}^{-i\omega t})$. Then one has

$$|\mathbf{g}^{(0)}| = |\int d^3r' \mathbf{j}_0(\mathbf{r}')| = |\int dl I_0| = |I_0 l|, \quad p_0 = \frac{iI_0 l}{\omega}, \quad \dot{U}_\mathrm{s} = \frac{(klI_0)^2}{3\mathrm{c}} \tag{22.29}$$

Diese Leistungsabgabe bedingt einen Strahlungswiderstand R_s

This power release yields a radiation resistance R_s

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{1}{2} R_\mathrm{s} I_0^2, \quad R_\mathrm{s} = \frac{2}{3\mathrm{c}}(kl)^2 \hat{=} 20\Omega \cdot (kl)^2 \tag{22.30}$$

zusätzlich zum Ohmschen Widerstand. Man beachte $\frac{1}{\mathrm{c}} \hat{=} 30\Omega$, vergleiche (A.4).

in addition to an Ohmic resistance. Note that $\frac{1}{\mathrm{c}} \hat{=} 30\Omega$, compare (A.4).

22.c Magnetische Dipolstrahlung und elektrische Quadrupolstrahlung

22.c Magnetic Dipole radiation and Electric Quadrupole Radiation

Wir betrachten nun den zweiten Term in (22.16)

Now we consider the second term in (22.16)

$$\begin{aligned} g_\alpha^{(1)} &= n_\beta \int d^3r' x'_\beta j_{0,\alpha}(\mathbf{r}') \\ &= \frac{n_\beta}{2} \int d^3r' (x'_\beta j_{0,\alpha} - x'_\alpha j_{0,\beta}) + \frac{n_\beta}{2} \int d^3r' (x'_\beta j_{0,\alpha} + x'_\alpha j_{0,\beta}). \end{aligned} \tag{22.31}$$

Der erste Term ergibt das magnetische Dipolmoment (10.7)

The first term yields the magnetic dipole moment (10.7)

$$n_\beta \mathrm{c} \epsilon_{\beta,\alpha,\gamma} m_{0,\gamma} = -\mathrm{c}(\mathbf{n} \times \mathbf{m}_0)_\alpha. \tag{22.32}$$

Der zweite Term lässt sich durch das elektrische Quadrupolmoment (4.10) ausdrücken. Mit $f = \frac{1}{2} x'_\alpha x'_\beta$ ergibt er sich mit (22.21) zu

The second term can be expressed by the electric quadrupole moment (4.10). With $f = \frac{1}{2} x'_\alpha x'_\beta$ one obtains from (22.21)

$$-i\omega \frac{n_\beta}{2} \int d^3r' x'_\alpha x'_\beta \rho_0(\mathbf{r}') = -i\omega \frac{n_\beta}{2} \big(Q_{0,\alpha,\beta} + \frac{1}{3} \delta_{\alpha,\beta} \int d^3r' r'^2 \rho_0(\mathbf{r}')\big). \tag{22.33}$$

Damit haben wir

Thus we have

$$\mathbf{g}^{(1)} = -\mathrm{c}\mathbf{n} \times \mathbf{m}_0 - \frac{i\omega}{2} Q_{0,\alpha,\beta} n_\beta \mathbf{e}_\alpha + \text{ const. } \mathbf{n}. \tag{22.34}$$

Wir beobachten, dass der dritte Term proportional $\mathbf{n}$ keinen Beitrag zu $\mathbf{B}_0$ (22.9) und $\mathbf{E}_0$ (22.11) liefert.

We observe that the third term proportional $\mathbf{n}$ does neither contribute to $\mathbf{B}_0$ (22.9) nor to $\mathbf{E}_0$ (22.11).

22.c.α Magnetische Dipolstrahlung

22.c.α Magnetic Dipole Radiation

Der erste Beitrag in (22.34) gibt die magnetische Dipolstrahlung. Wir finden

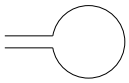
The first contribution in (22.34) yields the magnetic dipole radiation. We obtain

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \big(ik - \frac{1}{r}\big) \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} \mathbf{n} \times \mathbf{m}_0 \tag{22.35}$$

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = -k^2\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{m}_0) + \big(3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}_0)-\mathbf{m}_0\big)\big(\frac{1}{r^3}-\frac{ik}{r^2}\big)\mathrm{e}^{ikr} \tag{22.36}$$

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = (-\frac{k^2}{r}-\frac{ik}{r^2})(\mathbf{n}\times\mathbf{m}_0)\mathrm{e}^{ikr}. \tag{22.37}$$

Als Beispiel betrachtet man einen Kreisstrom, der eine Fläche f einschließt,



As an example we consider a current along a loop which includes the area f,

$$m_0 = I_0 f/\mathrm{c}, \quad \dot{U}_\mathrm{s} = \frac{\mathrm{c}k^4 m_0^2}{3} = \frac{k^4 I_0^2 f^2}{3\mathrm{c}}, \tag{22.38}$$

was einem Strahlungswiderstand

which corresponds to a radiation resistance

$$R_\mathrm{s} = \frac{2}{3\mathrm{c}}k^4 f^2 \hat{=} 20\Omega\,(k^2 f)^2 \tag{22.39}$$

entspricht.

.

22.c.β Elektrische Quadrupolstrahlung

Wir betrachten noch den zweiten Term aus (22.34) in der Fernzone. Dieser liefert

$$\mathbf{g} = -ik\mathbf{g}^{(1)} = -\frac{k^2\mathrm{c}}{2}Q_{0,\alpha,\beta}n_\beta\mathbf{e}_\alpha. \tag{22.40}$$

Als Spezialfall untersuchen wir den symmetrischen Quadrupol (4.27), $Q_{0,\mathrm{x},\mathrm{x}} = Q_{0,\mathrm{y},\mathrm{y}} = -\frac{1}{3}Q_0$, $Q_{0,\mathrm{z},\mathrm{z}} = \frac{2}{3}Q_0$, während die Außerdiagonal-Elemente verschwinden. Dann ist

22.c.β Electric Quadrupole Radiation

We finally consider the second term in (22.34) in the far zone. It yields

As special case we investigate the symmetric quadrupole (4.27), $Q_{0,\mathrm{x},\mathrm{x}} = Q_{0,\mathrm{y},\mathrm{y}} = -\frac{1}{3}Q_0$, $Q_{0,\mathrm{z},\mathrm{z}} = \frac{2}{3}Q_0$, whereas the off-diagonal elements vanish. Then one has

$$Q_{0,\alpha,\beta} = -\frac{1}{3}Q_0\delta_{\alpha,\beta} + Q_0\delta_{\alpha,3}\delta_{\beta,3}, \tag{22.41}$$

woraus

from which

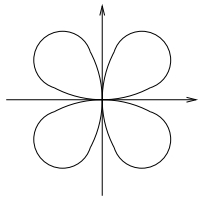
$$\mathbf{g} = -\frac{k^2\mathrm{c}}{2}Q_0 n_3\mathbf{e}_3 + \frac{k^2\mathrm{c}}{6}Q_0\mathbf{n}, \quad n_3 = \cos\theta \tag{22.42}$$

$$\mathbf{B}_0 = -ik^3\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{2r}Q_0\mathbf{n}\times\mathbf{e}_3\cos\theta \tag{22.43}$$

$$\mathbf{E}_0 = ik^3\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{2r}Q_0\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{e}_3)\cos\theta \tag{22.44}$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{\mathrm{c}k^6\mathbf{n}}{32\pi r^2}|Q_0|^2\sin^2\theta\cos^2\theta \tag{22.45}$$

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{\mathrm{c}k^6}{60}|Q_0|^2 \tag{22.46}$$



folgt. Auf der Zeichnung ist die Intensität der Quadrupol-Strahlung in Abhängigkeit vom Winkel θ radial skizziert.

follows. The intensity of the quadrupole-radiation is radially sketched as function of the angle θ.