# Klassische Elektrodynamik

**Theoretische Physik II  Vorlesungs-Skriptum**

**Zweisprachige Ausgabe**

# Classical Electrodynamics

**Theoretical Physics II  Manuscript**

**Bilingual Edition**

**Franz Wegner**
**Institut für Theoretische Physik**
**Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg**

©2000/01 Franz Wegner Universität Heidelberg

Kopieren für den privaten Gebrauch unter Angabe des Autors gestattet. Kommerzielle Verwertung verboten.

Copying for private purposes with reference to the author allowed. Commercial use forbidden.

Hinweise auf Druckfehler nehme ich gerne entgegen.

I appreciate being informed of misprints.

Jörg Raufeisen, Andreas Haier, Stephan Frank und Bastian Engeser bin ich dankbar, dass sie mich auf mehrere Druckfehler in der ersten deutschen Auflage aufmerksam gemacht haben. In gleicher Weise danke ich Björn Feuerbacher, Sebastian Diehl, Karsten Freese und Markus Gabrysch, dass sie mich auf Druckfehler der zweiten Auflage hingewiesen haben.

I am grateful to Jörg Raufeisen, Andreas Haier, Stephan Frank, and Bastian Engeser for informing me of a number of misprints in the first German edition. Similarly I thank Björn Feuerbacher, Sebastian Diehl, Karsten Frese, and Markus Gabrysch for informing me of misprints in the second edition.

Cornelia Merkel, Melanie Steiert und Sonja Bartsch danke ich für das sorgfältige Lesen und Korrigieren des Textes der zweisprachigen Ausgabe.

I am indebted to Cornelia Merkel, Melanie Steiert, and Sonja Bartsch for carefully reading and correcting the text of the bilingual edition.

**Bücher:**

**Books:**

Becker, Sauter: Theorie der Elektrizität I
Jackson, Classical Electrodynamics
Landau, Lifschitz: Lehrbuch der Theoretischen Physik II: Klassische Feldtheorie
Panofsky, Phillips, Classical Electricity and Magnetism
Sommerfeld: Vorlesungen über Theoretische Physik III: Elektrodynamik
Stratton, Electromagnetic Theory
Stumpf, Schuler: Elektrodynamik

# A

# Grundgleichungen

# Basic Equations

©2000/01 Franz Wegner Universität Heidelberg

**Vorbemerkungen**

Ich gehe davon aus, dass der Student bereits etwas mit der Elektrodynamik aus einer einführenden Vorlesung vertraut ist. Daher setze ich die vollständigen Gleichungen an den Anfang und führe von diesen ausgehend die jeweiligen Spezialisierungen ein.

In dieser Ausarbeitung verwende ich das Gaußsche Maßsystem und nicht das SI-System. Der Zusammenhang und die Motivation wird im nächsten Abschnitt und in Anhang A angegeben.

Im Anhang B sind Formeln zur Vektoralgebra und Vektoranalysis angegeben. Der Leser /Die Leserin sei jedoch gewarnt, dass er/sie an einigen Stellen (B.11, B.15, B.34-B.50 und Aufgabe nach B.71) die Ergebnisse selbst einzutragen hat. Er/Sie ist also aufgefordert, die Rechnungen selbst durchzuführen oder zumindest die Ergebnisse, die in dem Skriptum erarbeitet werden, dort einzutragen.

**Introductory Remarks**

I assume that the student is already somewhat familiar with Electrodynamics from an introductory course. Therefore I start with the complete set of equations and from this set I spezialize to various cases of interest.

In this manuscript I will use Gaussian units instead of the SI-units. The connection between both systems and the motivation for using Gaussian units will be given in the next section and in appendix A.

Formulae for vector algebra and vector analysis are given in appendix B. A warning to the reader: Sometimes (B.11, B.15, B.34-B.50 and exercise after B.71) he/she should insert the result by him/herself. He/She is requested to perform the calculations by him/herself or should at least insert the results given in this script.

## 1 Grundgleichungen der Elektrodynamik

Die Elektrodynamik befasst sich mit elektrischen und magnetischen Feldern, ihrer Erzeugung durch Ladungen und Ströme, ihrer Ausbreitung (elektromagnetische Wellen), ihrer Rückwirkung auf die Materie (Kräfte).

### 1.a Ladungen und Ströme

#### 1.a.$\alpha$ Ladungsdichte

Die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ ist die Ladung $\Delta q$ pro Volumenelement $\Delta V$

## 1 Basic Equations of Electrodynamics

Electrodynamics describes electric and magnetic fields, their generation by charges and electric currents, their propagation (electromagnetic waves), and their reaction on matter (forces).

### 1.a Charges and Currents

#### 1.a.$\alpha$ Charge Density

The charge density $\rho$ is defined as the charge $\Delta q$ per volume element $\Delta V$

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}. \tag{1.1}$$

Damit ergibt sich die Ladung $q$ im Volumen $V$ zu

Therefore the charge $q$ in the volume $V$ is given by

$$q = \int_V d^3 r \rho(\mathbf{r}). \tag{1.2}$$

Besteht die Ladungsverteilung aus Punktladungen $q_i$ an den Orten $\mathbf{r}_i$, so ist die Ladungsdichte durch die Summe

If the charge distribution consists of point charges $q_i$ at points $\mathbf{r}_i$, then the charge density is given by the sum

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \delta^3(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}), \tag{1.3}$$

gegeben, wobei die Diracsche Delta-Funktion (eigentlich Delta-Distribution) die Eigenschaft

where Dirac's delta-function (correctly delta-distribution) has the property

$$\int_V d^3 r f(\mathbf{r}) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{cases} f(\mathbf{r}_0) & \text{falls if } \mathbf{r}_0 \in V \\ 0 & \text{falls if } \mathbf{r}_0 \notin V \end{cases} \tag{1.4}$$

hat.

.

Ähnlich definiert man die Flächenladungsdichte $\sigma(\mathbf{r})$ an Grenz- oder Oberflächen als Ladung pro Fläche

Similarly one defines the charge density per area $\sigma(\mathbf{r})$ at boundaries and surfaces as charge per area

$$\sigma(\mathbf{r}) = \frac{dq}{df}, \tag{1.5}$$

ähnlich auch die Linienladungsdichte.

similarly the charge density on a line.

### 1.a.$\beta$ Strom und Stromdichte

Der Strom $I$ ist die Ladung $dq$, die pro Zeiteinheit $dt$ durch eine Fläche $F$ fließt,

### 1.a.$\beta$ Current and Current Density

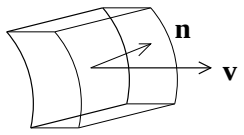
The current $I$ is the charge $dq$ that flows through a certain area $F$ per time $dt$,

$$I = \frac{dq}{dt}. \tag{1.6}$$

Es sei nun $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ die mittlere Geschwindigkeit der Ladungsträger, $\mathbf{n}$ die (auf die Länge 1 normierte) Flächennormale. Dann ist $\mathbf{v}dt$ der Weg, den die Ladungen in der Zeit $dt$ zurücklegen. Multipliziert mit $\mathbf{n}$ ergibt sich die Schichtdicke $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}dt$, die die in der Zeit $dt$ durch die Fläche geflossenen Ladungen bilden.

Be $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ the average velocity of the charge carriers and $\mathbf{n}$ the unit vector normal to the area element. Then $\mathbf{v}dt$ is the distance vector traversed during time $dt$. Multiplied by $\mathbf{n}$ one obtains the thickness of the layer $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}dt$ of the carriers which passed the surface during time $dt$.

Multipliziert mit dem Flächenelement $df$ ergibt sich das Volumen der Ladung, die durch $df$ geflossen ist. Weitere Multiplikation mit der Ladungsdichte $\rho$ ergibt die Ladung $dq$, die in der Zeit $dt$ durch die Fläche $df$ tritt




Multiplied by the surface element $df$ one obtains the volume of the charge, which flows through the area. Additional multiplication by $\rho$ yields the charge $dq$ which passes during time $dt$ the surface $df$

$$dq = \int_F \mathbf{v}dt \cdot \mathbf{n}df\rho \tag{1.7}$$

$$I = dq/dt = \int_F \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)\rho(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})df = \int_F \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f} \tag{1.8}$$

mit der Stromdichte $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ und dem gerichteten Flächenelement $d\mathbf{f} = \mathbf{n}df$.

with the current density $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ and the oriented area element $d\mathbf{f} = \mathbf{n}df$.

### 1.a.$\gamma$ Ladungserhaltung und Kontinuitätsgleichung

Die Ladung $q$ in einem festen Volumen $V$

### 1.a.$\gamma$ Conservation of Charge and Equation of Continuity

The charge $q$ in a fixed volume $V$

$$q(t) = \int_V d^3r\rho(\mathbf{r}, t) \tag{1.9}$$

ändert sich pro Zeiteinheit um

changes as a function of time by

$$\frac{dq(t)}{dt} = \int_V d^3r\frac{\partial\rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \tag{1.10}$$

Da die Ladung erhalten ist, kann sie sich nur durch einen Strom durch die Oberfläche $\partial V$ des Volumens ändern. Wir bezeichnen mit $I$ den nach außen fließenden Strom. Dann ist

This charge can only change, if some charge flows through the surface $\partial V$ of the volume, since charge is conserved. We denote the current which flows outward by $I$. Then

$$\frac{dq(t)}{dt} = -I(t) = -\int_{\partial V}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)d\mathbf{f} = -\int_V d^3r\,\mathrm{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \tag{1.11}$$

wobei wir vom Gaußschen Satz (B.59) Gebrauch machten. Da die Beziehungen (1.10) und (1.11) für jedes Volumen und auch jedes Volumenelement gilt, folgt die Gleichheit der Integranden in den beiden Volumenintegralen

where we make use of the divergence theorem (B.59). Since (1.10) and (1.11) hold for any volume and volume element, the integrands in the volume integrals have to be equal

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0. \tag{1.12}$$

Diese Gleichung bezeichnet man als Kontinuitätsgleichung. Sie drückt in differentieller Form die Erhaltung der Ladung aus.

This equation is called the equation of continuity. It expresses in differential form the conservation of charge.

## 1.b Maxwell-Gleichungen

Die elektrischen Ladungen und Ströme erzeugen das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Diese Beziehung wird durch die vier Maxwell-Gleichungen beschrieben

## 1.b Maxwell's Equations

The electric charges and currents generate the electric field $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ and the magnetic induction $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. This relation is described by the four Maxwell Equations

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\mathrm{c}\partial t} &= \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) && (1.13)\\
\mathrm{div}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 4\pi\rho(\mathbf{r}, t) && (1.14)\\
\mathrm{rot}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\mathrm{c}\partial t} &= \mathbf{0} && (1.15)\\
\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0. && (1.16)
\end{aligned}$$

Die Vektoroperation rot wird im Englischen mit curl bezeichnet. In den zentral gedruckten Gleichungen verwende ich stets rot, innerhalb des Textes die in der jeweiligen Sprache übliche Form.

The vector operation curl is denoted rot in the German language. In the equations printed in the center I use rot, within the text the usual form of the corresponding language.

Diese Maxwell-Gleichungen werden bisweilen als Maxwell-Gleichungen im Vakuum bezeichnet. Sie gelten jedoch auch in Materie. Die Ladungsdichte und die Stromdichte enthalten alle Beiträge, also freibewegliche und Polarisations-Ladungsdichten und freibewegliche, Polarisations- und Magnetisierungs-stromdichten.

Vielfach verlangt man als Randbedingung noch, dass das elektrische und das magnetische Feld im Unendlichen verschwinden.

## 1.c Coulomb- und Lorentz-Kraft

Das elektrische Feld $\mathbf{E}$ und die magnetische Induktion $\mathbf{B}$ üben auf eine Ladung $q$ am Ort $\mathbf{r}$, die sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegt, die Kraft

$$\mathbf{K} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) + q\frac{\mathbf{v}}{\mathrm{c}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{1.17}$$

aus.

Dabei sind $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ die Beiträge, die nicht von $q$ selbst herrühren. Die von $q$ selbst erzeugten Felder bewirken die Reaktionskraft, die wir jedoch im Weiteren nicht betrachten.

Der erste Beitrag in (1.17) ist die Coulomb-Kraft, der zweite die Lorentz-Kraft. Dabei ist c= 299 792 458 m/s. Wir werden später sehen, dass diese Konstante die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. (Man hat sie zu obigem Wert definiert und damit den Umrechnungsfaktor zwischen Zeit und Länge festgelegt.) Die Kraft, die auf ein kleines Volumen $\Delta V$ wirkt, lässt sich schreiben als

$$\Delta\mathbf{K} = \mathbf{k}(\mathbf{r})\Delta V \tag{1.18}$$

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}). \tag{1.19}$$

Man bezeichnet $\mathbf{k}$ als die Kraftdichte. Die auf das Volumen $V$ wirkende elektromagnetische Kraft ergibt sich dann zu

$$\mathbf{K} = \int_V d^3r\,\mathbf{k}(\mathbf{r}). \tag{1.20}$$

These equations named after Maxwell are often called Maxwell's Equations in the vacuum. However, they are also valid in matter. The charge density and the current density contain all contributions, the densities of free charges and polarization charges, and of free currents and polarization- and magnetization currents.

Often one requires as a boundary condition, that the electric and the magnetic fields vanish at infinity.

## 1.c Coulomb and Lorentz Force

The electric field $\mathbf{E}$ and the magnetic induction $\mathbf{B}$ exert a force $\mathbf{K}$ on a charge $q$ located at $\mathbf{r}$, moving with a velocity $\mathbf{v}$

$$\mathbf{K} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) + q\frac{\mathbf{v}}{\mathrm{c}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{1.17}$$

.

Here $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ are the contributions which do not come from $q$ itself. The fields generated by $q$ itself exert the reaction force which we will not consider further.

The first contribution in (1.17) is the Coulomb force, the second one the Lorentz force. One has c= 299 792 458 m/s. Later we will see, that this is the velocity of light in vacuum. (It has been defined with the value given above in order to introduce a factor between time and length.) The force acting on a small volume $\Delta V$ can be written as

$$\Delta\mathbf{K} = \mathbf{k}(\mathbf{r})\Delta V \tag{1.18}$$

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}). \tag{1.19}$$

$\mathbf{k}$ is called the density of force. The electromagnetic force acting on the volume $V$ is given by

$$\mathbf{K} = \int_V d^3r\,\mathbf{k}(\mathbf{r}). \tag{1.20}$$

# 2 Dimensionen und Einheiten

## 2.a Gaußsches Maßsystem

In dieser Vorlesung verwenden wir das Gaußsche Maßsystem. Wir betrachten nun die Dimensionen der auftretenden Größen. Aus der Kontinuitätsgleichung (1.12) und den Maxwellgleichungen (1.13) bis (1.16) folgt

$$[\rho]/[t] = [j]/[x] \tag{2.1}$$
$$[B]/[x] = [E]/([\mathrm{c}][t]) = [j]/[\mathrm{c}] \tag{2.2}$$
$$[E]/[x] = [B]/([\mathrm{c}][t]) = [\rho]. \tag{2.3}$$

Daraus folgt

$$[j] = [\rho][x]/[t] \tag{2.4}$$
$$[E] = [\rho][x] \tag{2.5}$$
$$[B] = [\rho][\mathrm{c}][t] = [\rho][x]^2/([\mathrm{c}][t]), \tag{2.6}$$

sowie

$$[\mathrm{c}] = [x]/[t] \tag{2.7}$$
$$[B] = [\rho][x]. \tag{2.8}$$

Daraus sieht man, dass c tatsächlich die Dimension einer Geschwindigkeit hat. Um die weiteren Größen in ihrer Dimension festzulegen, müssen wir noch den Ausdruck (1.19) für die Kraftdichte $k$ verwenden

$$[k] = [\rho][E] = [\rho]^2[x]. \tag{2.9}$$

Daraus folgt dann

$$[\rho]^2 = [k]/[x] = \mathrm{dyn\ cm^{-4}} \tag{2.10}$$
$$[\rho] = \mathrm{dyn^{1/2}\ cm^{-2}} \tag{2.11}$$
$$[E] = [B] = \mathrm{dyn^{1/2}\ cm^{-1}} \tag{2.12}$$
$$[j] = \mathrm{dyn^{1/2}\ cm^{-1}\ s^{-1}} \tag{2.13}$$
$$[q] = [\rho][x]^3 = \mathrm{dyn^{1/2}\ cm} \tag{2.14}$$
$$[I] = [j][x]^2 = \mathrm{dyn^{1/2}\ cm\ s^{-1}}. \tag{2.15}$$

## 2.b Andere Einheitensysteme

Für jede Größe kann die Einheit in jedem System unabhängig definiert werden. Glücklicherweise macht man davon nicht vollständigen Gebrauch.

# 2 Dimensions and Units

## 2.a Gaussian Units

In this course we use Gaussian units. We consider the dimensions of the various quantities. From the equation of continuity (1.12) and Maxwell's equations (1.13 to 1.16) one obtains

From this one obtains

and

From (2.7) one sees that c really has the dimension of a velocity. In order to determine the dimensions of the other quantities we still have to use expression (1.19) for the force density $k$

From this one obtains

## 2.b Other Systems of Units

The unit for each quantity can be defined independently. Fortunately, this is not used extensively.

Neben dem Gaußschen Maßsystem werden noch eine Reihe weiterer cgs-Systeme sowie das SI-System (internationales Maßsystem, Giorgi-System) verwendet. Letzteres ist das gesetzliche Maßsystem in vielen Ländern (z.B. in USA seit 1894, in Deutschland seit 1898) und wird in der Technik angewandt.

Besides the Gaussian system of units a number of other cgs-systems is used as well as the SI-system (international system of units, Giorgi-system). The last one is the legal system in many countries (e.g. in the US since 1894, in Germany since 1898) and is used for technical purposes.

Während das Gaußsche Maßsystem alle elektromagnetischen Größen in cm, g und s ausdrückt, verwendet das Giorgi-System neben den mechanischen Einheiten m, kg und s noch zwei weitere Einheiten A (Ampere) und V (Volt), allerdings nicht unabhängig voneinander, vielmehr gilt für die Einheit der Energie

Whereas all electromagnetic quantities in the Gaussian system are expressed in cm, g und s, the Giorgi-system uses besides the mechanical units m, kg and s two other units, A (ampere) und V (volt). They are not independent, but related by the unit of energy

$$1\ \mathrm{kg\ m^2\ s^{-2}} = 1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{W\ s} = 1\ \mathrm{A\ V\ s}. \tag{2.16}$$

Die Umrechnung einiger gebräuchlicher Maßsysteme ineinander kann durch drei Umrechnungsfaktoren $\epsilon_0$, $\mu_0$ und $\psi$ beschrieben werden. Dabei können $\epsilon_0$ und $\mu_0$ (im SI-System als Dielektrizitätskonstante und Permeabilitätskonstante des Vakuums bekannt) und die Verkettungskonstante

The conversion of the conventional systems of units can be described by three conversion factors $\epsilon_0$, $\mu_0$ and $\psi$. The factors $\epsilon_0$ and $\mu_0$ (known as the dielectric constant and permeability constant of the vacuum in the SI-system) and the interlinking factor

$$\gamma = \mathrm{c}\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \tag{2.17}$$

dimensionsbehaftet sein, während $\psi$ ein dimensionsloser Zahlenfaktor ist. Man unterscheidet zwischen rationalen Maßsystemen ($\psi = 4\pi$) und nicht rationalen Maßsystemen ($\psi = 1$). Die Umrechnungsfaktoren einiger gebräuchlicher Maßsysteme sind

can carry dimensions whereas $\psi$ is a dimensionless number. One distinguishes between rational systems $\psi = 4\pi$) and non-rational systems ($\psi = 1$) of units. The conversion factors of some conventional systems of units are

| Maßsystem / System of Units | $\epsilon_0$ | $\mu_0$ | $\gamma$ | $\psi$ |
|---|---|---|---|---|
| Gauß / Gaussian | 1 | 1 | c | 1 |
| Elektrostatisch / electrostatic (esu) | 1 | $\mathrm{c}^{-2}$ | 1 | 1 |
| Elektromagnetisch / electromagnetic (emu) | $\mathrm{c}^{-2}$ | 1 | 1 | 1 |
| Heaviside-Lorentz | 1 | 1 | c | $4\pi$ |
| Giorgi (SI) | $(\mathrm{c}^2\mu_0)^{-1}$ | $\frac{4\pi}{10^7}\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$ | 1 | $4\pi$ |

Die bisher eingeführten Größen drücken sich durch die Größen der anderen Maßsysteme (mit einem Stern versehen) folgendermaßen aus

The quantities introduced until now are expressed in Gaussian units by those of other systems of units (indicated by an asterisk) in the following way

$$\mathbf{E} = \sqrt{\psi\epsilon_0}\mathbf{E}^* \qquad 1\ \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1} \hat{=} 3 \cdot 10^4 \mathrm{V/m} \tag{2.18}$$

$$\mathbf{B} = \sqrt{\psi/\mu_0}\mathbf{B}^* \qquad 1\ \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1} \hat{=} 10^{-4} \mathrm{Vs/m^2} \tag{2.19}$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{\psi\epsilon_0}}q^* \qquad 1\ \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm} \hat{=} 10^{-9}/3\mathrm{As},\ \begin{matrix}\text{ähnlich}\\ \text{similarly}\end{matrix}\ \rho, \sigma, I, j. \tag{2.20}$$

Ein Umrechnungsbeispiel: Die Coulomb-Lorentz-Kraft lässt sich schreiben

An example of conversion: The Coulomb-Lorentz-force can be written

$$\mathbf{K} = q(\mathbf{E} + \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{q^*}{\sqrt{\psi\epsilon_0}}(\sqrt{\psi\epsilon_0}\mathbf{E}^* + \frac{\sqrt{\psi}}{\mathrm{c}\sqrt{\mu_0}}\mathbf{v} \times \mathbf{B}^*) = q^*(\mathbf{E}^* + \frac{1}{\mathrm{c}\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}\mathbf{v} \times \mathbf{B}^*) = q^*(\mathbf{E}^* + \frac{1}{\gamma}\mathbf{v} \times \mathbf{B}^*). \tag{2.21}$$

Die Elementarladung $e_0$ ist in dem von uns verwendeten Gaußschen Maßsystem $4.803 \cdot 10^{-10}$ $dyn^{1/2}$ cm und im SI-System $1.602 \cdot 10^{-19}$ As. Das Elektron trägt die Ladung -$e_0$, das Proton $e_0$, ein Kern der Kernladungszahl $Z$ die Ladung $Ze_0$, Quarks die Ladungen $\pm e_0/3$ oder $\pm\ 2e_0/3$.

Weitere Angaben werden jeweils bei der Einführung weiterer Größen gegeben und sind im Anhang A zusammengefasst.

## 2.c Motivation für Gaußsche Einheiten

Im SI-System sind das elektrische Feld **E** und die dielektrische Verschiebung **D** wie auch die magnetische Induktion **B** und das Magnetfeld **H** mit unterschiedlichen Dimensionen behaftet. Hierdurch wird leicht der irreführende Eindruck erweckt, es handele sich um unabhängige Felder. Auf einem mikroskopischen Niveau hat man es nur mit zwei Feldern, **E** und **B** zu tun, (1.13-1.16).

Tatsächlich wird der zweite Satz Felder nur dadurch eingeführt, dass man Polarisations- und Magnetisierungsanteile der Ladungen und Ströme in Materie aus den totalen Ladungen und Strömen herauszieht und zu den Feldern addiert (Abschnitt 6 und 11).

Dieser enge Zusammenhang kommt besser in einem cgs-System zum Ausdruck, in dem **E** und **D** gleiche Dimension haben wie auch **B** und **H**.

Leider gehört das Gaußsche Maßsystem zu den irrationalen, während das SI-System ein rationales ist, so dass bei Umrechnungen auch immer Faktoren $4\pi$ auftreten. Ich hätte ein rationales Maß-System wie das von Heaviside und Lorentz vorgezogen. Leider wird aber in gängigen Lehrbüchern nur das SI-System und das Gaußsche verwendet. Ich möchte die Studierenden nicht mit einem Maßsystem konfrontieren, mit dem praktisch kein Lehrbuch arbeitet.

The elementary charge $e_0$ is $4.803 \cdot 10^{-10}$ $dyn^{1/2}$ cm in Gaussian units and $1.602 \cdot 10^{-19}$ As in SI-units. The electron carries charge -$e_0$, the proton $e_0$, a nucleus with $Z$ protons the charge $Ze_0$, quarks the charges $\pm e_0/3$ and $\pm\ 2e_0/3$.

The conversion of other quantities is given where they are introduced. A summary is given in Appendix A.

## 2.c Motivation for Gaussian Units

In the SI-system the electrical field **E** and the dielectric displacement **D** as well as the magnetic induction **B** and the magnetic field **H** carry different dimensions. This leads easily to the misleading impression, that these are independent fields. On a microscopic level one deals only with two fields, **E** and **B**, (1.13-1.16).

However, the second set of fields is introduced only in order to extract the polarization and magnetization contributions of charges and currents in matter from the total charges and currents, and to add them to the fields. (Section 6 and 11).

This close relation is better expressed in cgs-units, where **E** and **D** have the same dimension, as well as **B** and **H**.

Unfortunately, the Gaussian system belongs to the irrational ones, whereas the SI-system is a rational one, so that in conversions factors $4\pi$ appear. I would have preferred to use a rational system like that of Heaviside and Lorentz. However, in the usual textbooks only the SI-system and the Gaussian one are used. I do not wish to offer the electrodynamics in a system which in practice is not used in other textbooks.

# B

# Elektrostatik

# Electrostatics

©2000/01 Franz Wegner Universität Heidelberg

## 3 Elektrisches Feld, Potential, Energie des Feldes

### 3.a Statik

In der Statik behandelt man das zeitunabhängige Problem. Das heißt, die auftretenden Größen hängen nur vom Ort ab, $\rho = \rho(\mathbf{r})$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$. Dann zerfallen die Kontinuitätsgleichung (1.12) und die Maxwell-Gleichungen (1.13-1.16) in zwei Gruppen

$$\begin{array}{c} \operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 \\ \operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \\ \operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \\ \text{Magnetostatik} \\ \text{magnetostatics} \\ \mathbf{k}_{\mathrm{ma}} = \frac{1}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \end{array}$$

Die erste Gruppe von Gleichungen enthält nur die magnetische Induktion $\mathbf{B}$ und die Stromdichte $\mathbf{j}$. Sie beschreibt die Magnetostatik. Die zweite Gruppe von Gleichungen enthält nur das elektrische Feld $\mathbf{E}$ und die Ladungsdichte $\rho$. Sie ist Grundlage der Elektrostatik. In der letzten Zeile sind noch die entsprechenden Anteile der Kraftdichte $\mathbf{k}$ hinzugefügt.

### 3.b Elektrisches Feld und Potential

#### 3.b.$\alpha$ Elektrisches Potential

Wir führen nun das elektrische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ ein. Hierzu betrachten wir das Wegintegral von $\mathbf{E}$ auf zwei verschiedenen Wegen (1) und (2) von $\mathbf{r}_0$ nach $\mathbf{r}$

$$\int_{\substack{\mathbf{r}_0\\(1)}}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\substack{\mathbf{r}_0\\(2)}}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \oint d\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}), \tag{3.2}$$

## 3 Electric Field, Potential, Energy of the Field

### 3.a Statics

First we consider the time-independent problem: Statics. This means, the quantities depend only on their location, $\rho = \rho(\mathbf{r})$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$. Then the equation of continuity (1.12) and Maxwell's equations (1.13-1.16) separate into two groups

$$\begin{array}{c} \operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}) \\ \operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \\ \text{Elektrostatik} \\ \text{electrostatics} \\ \mathbf{k}_{\mathrm{el}} = \rho(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{array} \tag{3.1}$$

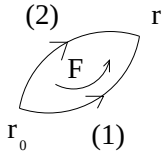
The first group of equations contains only the magnetic induction $\mathbf{B}$ and the current density $\mathbf{j}$. It describes magnetostatics. The second group of equations contains only the electric field $\mathbf{E}$ and the charge density $\rho$. It is the basis of electrostatics. The expressions for the corresponding parts of the force density $\mathbf{k}$ is given in the last line.

### 3.b Electric Field and Potential

#### 3.b.$\alpha$ Electric Potential

Now we introduce the electric Potential $\Phi(\mathbf{r})$. For this purpose we consider the path integral over $\mathbf{E}$ along to different paths (1) and (2) from $\mathbf{r}_0$ to $\mathbf{r}$

wobei das letztere Integral über den geschlossenen Weg von $\mathbf{r}_0$ auf (1) nach $\mathbf{r}$ und von dort in entgegengesetzter Richtung auf (2) nach $\mathbf{r}_0$ zu erstrecken ist.




where the last integral has to be performed along the closed path from $\mathbf{r}_0$ along (1) to $\mathbf{r}$ and from there in opposite direction along (2) to $\mathbf{r}_0$.

Das letztere Integral lässt sich mit dem Stokesschen Satz (B.56) in das Integral über die von (1) und (2) berandete Fläche $\int d\mathbf{f} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r})$ überführen, das wegen der Maxwellgleichung $\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ (3.1) verschwindet.

This later integral can be transformed by means of Stokes' theorem (B.56) into the integral $\int d\mathbf{f} \cdot \operatorname{curl}\mathbf{E}(\mathbf{r})$ over the open surface bounded by (1) and (2), which vanishes due to Maxwell's equation $\operatorname{curl}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ (3.1).

Daher ist das Integral (3.2) vom Weg unabhängig und man definiert das elektrische Potential

Therefore the integral (3.2) is independent of the path and one defines the electric potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \Phi(\mathbf{r}_0). \tag{3.3}$$

Dabei sind $\mathbf{r}_0$ und $\Phi(\mathbf{r}_0)$ willkürlich, aber fest. $\Phi(\mathbf{r})$ ist daher bis auf eine willkürliche additive Konstante bestimmt. Wir haben auf Grund der Definition (3.3)

The choice of $\mathbf{r}_0$ and of $\Phi(\mathbf{r}_0)$ is arbitrary, but fixed. Therefore $\Phi(\mathbf{r})$ is defined apart from an arbitrary additive constant. From the definition (3.3) we have

$$d\Phi(\mathbf{r}) = -d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}). \tag{3.4}$$

### 3.b.$\beta$ Elektrischer Fluss und Ladung

### 3.b.$\beta$ Electric Flux and Charge

Aus $\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r})$, (3.1) folgt

From $\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r})$, (3.1) one obtains

$$\int_V d^3r \operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) \tag{3.5}$$

und damit mit dem Gaußschen Satz (B.59)

and therefore with the divergence theorem (B.59)

$$\int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi q(V), \tag{3.6}$$

das heißt der elektrische Fluß des Feldes $\mathbf{E}$ durch die Oberfläche ist das $4\pi$-fache der Ladung $q$ im Volumen $V$.

id est the electric flux of the field $\mathbf{E}$ through the surface equals $4\pi$ times the charge $q$ in the volume $V$.

Eine einfache Anwendung hat dies für das elektrische Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$ mit $r = |\mathbf{r}|$. Aus Symmetriegründen weist das elektrische Feld in Normalenrichtung $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{r}/r$

This has a simple application for the electric field of a rotational invariant charge distribution $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$ with $r = |\mathbf{r}|$. For reasons of symmetry the electric field points in radial direction, $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{r}/r$

$$4\pi r^2 E(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' d\Omega = (4\pi)^2 \int_0^r \rho(r') r'^2 dr', \tag{3.7}$$

so dass man für das Feld

so that one obtains

$$E(r) = \frac{4\pi}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \tag{3.8}$$

erhält.

for the field.

Als Spezialfall betrachten wir jetzt noch eine Punktladung $q$ im Ursprung. Dann gilt

As a special case we consider a point charge in the origin. Then one has

$$4\pi r^2 E(r) = 4\pi q, \quad E(r) = \frac{q}{r^2}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3} q. \tag{3.9}$$

Das Potential hängt aus Symmetriegründen nur von $r$ ab. Dann gilt

The potential depends only on $r$ for reasons of symmetry. Then one obtains

$$\text{grad}\,\Phi(r) = \frac{\mathbf{r}}{r}\frac{d\Phi(r)}{dr} = -\mathbf{E}(\mathbf{r}), \tag{3.10}$$

woraus durch Integration

which after integration yields

$$\Phi(r) = \frac{q}{r} + \text{const.} \tag{3.11}$$

folgt.

### 3.b.$\gamma$ Potential einer Ladungsverteilung

Wir gehen aus von Punktladungen $q_i$ an Orten $\mathbf{r}_i$. Das zugehörige Potential und die Feldstärke erhält man aus (3.11) und (3.10) durch Verschieben von $\mathbf{r}$ um $\mathbf{r}_i$ zu

### 3.b.$\gamma$ Potential of a Charge Distribution

We start out from point charges $q_i$ at locations $\mathbf{r}_i$. The corresponding potential and the field is obtained from (3.11) und (3.10) by shifting $\mathbf{r}$ by $\mathbf{r}_i$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} \tag{3.12}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\,\text{grad}\,\Phi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}. \tag{3.13}$$

Wir gehen nun von den Punktladungen zu einer Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ über. Wir führen dabei den Übergang $\sum_i q_i f(\mathbf{r}_i) = \sum_i \Delta V \rho(\mathbf{r}_i) f(\mathbf{r}_i)$ nach $\int d^3r' \rho(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}')$ durch, was

We change now from point charges to the charge density $\rho(\mathbf{r})$. To do this we perform the transition from $\sum_i q_i f(\mathbf{r}_i) = \sum_i \Delta V \rho(\mathbf{r}_i) f(\mathbf{r}_i)$ to $\int d^3r' \rho(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}')$, which yields

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{3.14}$$

ergibt. Aus $\mathbf{E} = -\,\text{grad}\,\Phi$ und $\text{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho$ folgt die Poisson-Gleichung

From $\mathbf{E} = -\,\text{grad}\,\Phi$ and $\text{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho$ one obtains Poisson's equation

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}). \tag{3.15}$$

Man unterscheide $\triangle = \nabla\cdot\nabla$ und $\Delta$ =Delta. Wir machen auf (3.15) die Probe. Zunächst bilden wir

Please distinguish $\triangle = \nabla\cdot\nabla$ and $\Delta$ =Delta. We check eq. (3.15). First we determine

$$\nabla\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|^3} = \int d^3a\, \rho(\mathbf{r}+\mathbf{a}) \frac{\mathbf{a}}{a^3} \tag{3.16}$$

und

and

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3a (\nabla\rho(\mathbf{r}+\mathbf{a}))\cdot\frac{\mathbf{a}}{a^3} = \int_0^\infty da \int d\Omega_a \frac{\partial\rho(\mathbf{r}+\mathbf{a})}{\partial a} = \int d\Omega_a (\rho(\mathbf{r}+\infty\mathbf{e}_a) - \rho(\mathbf{r})) = -4\pi\rho(\mathbf{r}), \tag{3.17}$$

wenn $\rho$ im Unendlichen verschwindet. Dabei haben wir das dreidimensionale Integral über $a$ zerlegt in das Integral über den Radius $a$ und den Raumwinkel $\Omega_a$, $d^3a = a^2 da d\Omega_a$ (vergleiche Abschnitt 5).

assuming that $\rho$ vanishes at infinity. The three-dimensional integral over $a$ has been separated by the integral over the radius $a$ and the solid angle $\Omega_a$, $d^3a = a^2 da d\Omega$ (compare section 5).

Aus der Poisson-Gleichung folgt

From Poisson's equation one obtains

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \triangle \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\rho(\mathbf{r}) = -4\pi \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{3.18}$$

und aus der Gleichheit der Integranden

and from the equality of the integrands

$$\triangle \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{3.19}$$

## 3.c Coulombkraft und Feldenergie

Auf die Ladung $q_i$ am Ort $\mathbf{r}_i$ wirkt die Kraft

$$\mathbf{K}_i = q_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r}_i). \tag{3.20}$$

Dabei ist $\mathbf{E}_i$ das elektrische Feld ohne das von der Ladung $q_i$ selbst erzeugte. Damit folgt

$$\mathbf{K}_i = q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}. \tag{3.21}$$

Aus dieser Formel erkennt man auch die Definition der Ladungseinheit im Gaußschen Maßsystem: 1 $\mathrm{dyn}^{1/2}$ cm ist die Ladung, die auf eine gleiche Ladung in 1 cm Entfernung die Kraft 1 dyn ausübt.

Die potentielle Energie ist

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Phi_i(\mathbf{r}_i). \tag{3.22}$$

Der Faktor $1/2$ rührt daher, dass jedes Paar von Ladungen in der Summe zweimal auftritt. So ist die Wechselwirkungsenergie zwischen Ladung 1 und Ladung 2 sowohl in $i = 1, j = 2$ wie auch in $i = 2, j = 1$ enthalten. Daher ist durch 2 zu dividieren. Dabei ist in $\Phi_i$ ebenfalls der von $q_i$ herrührende Beitrag zum Potential nicht enthalten. Die Kraft folgt daraus wie üblich zu

$$\mathbf{K}_i = -\operatorname{grad}_{\mathbf{r}_i} U. \tag{3.23}$$

Im Kontinuum erhält man unter Verwendung von (B.62)

$$U = \frac{1}{2} \int d^3 r \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} \int d^3 r \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) - \frac{1}{8\pi} \int d^3 r \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}), \tag{3.24}$$

wobei jetzt der Beitrag der Ladungsdichte zu $\Phi$ am gleichen Ort nicht mehr auszunehmen ist, da er für eine kontinuierliche Verteilung vernachlässigbar ist. $F$ schließe alle Ladungen ein und sei etwa eine Kugel vom Radius $R$. Im Limes $R \to \infty$ geht $\Phi \propto 1/R$, $E \propto 1/R^2$, $\int_F \propto 1/R \to 0$. Man erhält dann die elektrostatische Energie

$$U = \frac{1}{8\pi} \int d^3 r E^2(\mathbf{r}) = \int d^3 r \, u(\mathbf{r}) \tag{3.25}$$

mit der Energiedichte

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} E^2(\mathbf{r}). \tag{3.26}$$

## 3.c Coulomb Force and Field Energy

The force acting on the charge $q_i$ at $\mathbf{r}_i$ is

$$\mathbf{K}_i = q_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r}_i). \tag{3.20}$$

Here $\mathbf{E}_i$ is the electric field without that generated by the charge $q_i$ itself. Then one obtains

$$\mathbf{K}_i = q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}. \tag{3.21}$$

From this equation one realizes the definition of the unit of charge in Gauss's units, 1 $\mathrm{dyn}^{1/2}$ cm is the charge, which exerts on the same amount of charge in the distance of 1 cm the force 1 dyn.

The potential energy is

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Phi_i(\mathbf{r}_i). \tag{3.22}$$

The factor $1/2$ is introduced since each pair of charges appears twice in the sum. E.g., the interaction energy between charge 1 and charge 2 is contained both in $i = 1, j = 2$ and $i = 2, j = 1$. Thus we have to divide by 2. The contribution from $q_i$ is excluded from the potential $\Phi_i$. The force is then as usually

$$\mathbf{K}_i = -\operatorname{grad}_{\mathbf{r}_i} U. \tag{3.23}$$

In the continuum one obtains by use of (B.62)

$$U = \frac{1}{2} \int d^3 r \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} \int d^3 r \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) - \frac{1}{8\pi} \int d^3 r \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}), \tag{3.24}$$

where no longer the contribution from the charge density at the same location has to be excluded from $\Phi$, since it is negligible for a continuous distribution. $F$ should include all charges and may be a sphere of radius $R$. In the limit $R \to \infty$ one obtains $\Phi \propto 1/R$, $E \propto 1/R^2$, $\int_F \propto 1/R \to 0$. Then one obtains the electrostatic energy

$$U = \frac{1}{8\pi} \int d^3 r E^2(\mathbf{r}) = \int d^3 r \, u(\mathbf{r}) \tag{3.25}$$

with the energy density

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} E^2(\mathbf{r}). \tag{3.26}$$

**Klassischer Elektronenradius** Als Beispiel betrachten wir den "klassischen Elektronenradius" $R_0$: Man nimmt an, die Ladung sei auf einer Kugelschale vom Radius $R_0$ gleichmäßig verteilt. Die elektrische Feldenergie stimme mit der Energie $\mathrm{m_0 c^2}$ überein, wobei $\mathrm{m_0}$ die Elektronenmasse ist.

$$\frac{1}{8\pi}\int_{R_0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e_0}}{r^2}\right)^2 r^2 dr d\Omega = \frac{\mathrm{e_0^2}}{2R_0} = \mathrm{m_0 c^2} \tag{3.27}$$

ergibt $R_0 = 1.4 \cdot 10^{-13}$ cm. Die Annahme einer homogenen Ladungsverteilung in der Kugel ergibt ein etwas anderes Ergebnis.

Aus hochenergetischen Streuprozessen weiß man allerdings, dass die Ausdehnung des Elektrons um mindestens einen Faktor 100 kleiner sein muss, obige Annahme also unzutreffend ist.

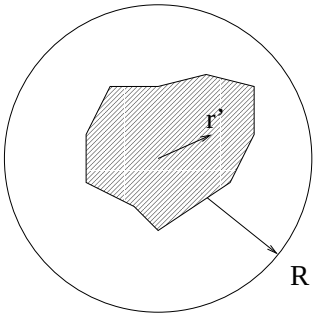
**Classical Radius of the Electron** As an example we consider the "classical radius of an electron" $R_0$: One assumes that the charge is homogeneously distributed on the surface of the sphere of radius $R$. The electric field energy should equal the energy $\mathrm{m_0 c^2}$, where $\mathrm{m_0}$ is the mass of the electron.

yields $R_0 = 1.4 \cdot 10^{-13}$ cm. The assumption of a homogeneous distribution of the charge inside the sphere yields a slightly different result.

From scattering experiments at high energies one knows that the extension of the electron is at least smaller by a factor of 100, thus the assumption made above does not apply.

# 4 Elektrischer Dipol und Quadrupol

Gegeben sei eine Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}')$ innerhalb einer Kugel vom Radius $R$ um den Ursprung. Außerhalb sei $\rho(\mathbf{r}') = 0$.




# 4 Electric Dipole and Quadrupole

A charge distribution $\rho(\mathbf{r}')$ inside a sphere of radius $R$ around the origin is given. We assume $\rho(\mathbf{r}') = 0$ outside the sphere.

## 4.a Das Feld für $r > R$

Das Potential der Ladungsverteilung ist

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{4.1}$$

Wir führen nun eine Taylor-Entwicklung nach $\mathbf{r}'$, das heißt nach den drei Variabeln $x_1'$, $x_2'$ und $x_3'$ durch

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-\mathbf{r}'\nabla)^l}{l!} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - (\mathbf{r}'\nabla)\frac{1}{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{r}'\nabla)(\mathbf{r}'\nabla)\frac{1}{r} - \ldots \tag{4.2}$$

Als erstes müssen wir den Gradienten von $1/r$ berechnen

$$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \text{ da } \nabla f(r) = \frac{\mathbf{r}}{r} f'(r), \text{ since} \tag{4.3}$$

löse (B.39, B.42). Daraus folgt dann

$$(\mathbf{r}'\nabla)\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \tag{4.4}$$

Als nächstes berechnen wir (B.47)

$$\nabla\frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3}\,\mathrm{grad}\,(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{\mathbf{c}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \tag{4.5}$$

unter Verwendung von (B.27) und Lösung von (B.37, B.39). Damit erhalten wir die Taylor-Entwicklung

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2}{2r^5} + \ldots \tag{4.6}$$

Wir formen zunächst noch $3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2$ um

$$3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2 = x_\alpha' x_\beta' (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha,\beta}) = (x_\alpha' x_\beta' - \frac{1}{3} r'^2 \delta_{\alpha,\beta})(3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha,\beta}) \tag{4.7}$$

## 4.a The Field for $r > R$

The potential of the charge distribution is

We perform a Taylor-expansion in $\mathbf{r}'$, that is in the three variables $x_1'$, $x_2'$ und $x_3'$

At first we have to calculate the gradient of $1/r$

solve (B.39, B.42). Then one obtains

Next we calculate (B.47)

using (B.27) and the solutions of (B.37, B.39). Then we obtain the Taylor-expansion

At first we transform $3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2$

wegen $\delta_{\alpha,\beta}(3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha,\beta} r^2) = 3x_\alpha x_\alpha - r^2\delta_{\alpha,\alpha} = 0$. Hier und auch im Folgenden verwenden wir die Summationskonvention: Über alle Indices (von Komponenten), die zweimal in einem Produkt auftreten, wird summiert, in (4.7) also über $\alpha$ und $\beta$.

because of $\delta_{\alpha,\beta}(3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha,\beta} r^2) = 3x_\alpha x_\alpha - r^2\delta_{\alpha,\alpha} = 0$. Here and in the following we use the summation convention, that is we sum over all indices (of components), which appear twice in a product in (4.7), that is over $\alpha$ and $\beta$.

Wir führen nun die Größen

We now introduce the quantities

$$q = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \qquad \text{Ladung / charge} \tag{4.8}$$

$$\mathbf{p} = \int d^3r' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \qquad \text{Dipolmoment / dipolar moment} \tag{4.9}$$

$$Q_{\alpha,\beta} = \int d^3r' (x'_\alpha x'_\beta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha,\beta} r'^2)\rho(\mathbf{r}') \qquad \text{Komponenten des Quadrupolmoments / components of the quadrupolar moment} \tag{4.10}$$

ein und erhalten damit die Entwicklung für das Potential und die elektrische Feldstärke

and obtain the expansion for the potential and the electric field

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3} + Q_{\alpha,\beta}\frac{3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha,\beta}}{2r^5} + \mathrm{O}(\frac{1}{r^4}) \tag{4.11}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q\mathbf{r}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{p}r^2}{r^5} + \mathrm{O}(\frac{1}{r^4}) \tag{4.12}$$

## 4.b Transformationseigenschaften

Die Multipolmomente sind definiert bezüglich eines vorgegebenen Punktes, zum Beispiel des Ursprungs. Verschiebt man den Bezugspunkt um $\mathbf{a}$, das heißt $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}' - \mathbf{a}$, so findet man mit $\rho_1(\mathbf{r}'_1) = \rho(\mathbf{r}')$

## 4.b Transformation Properties

The multipole moments are defined with respect to a given point, for example with respect to the origin. If one shifts the point of reference by $\mathbf{a}$, that is $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}' - \mathbf{a}$, then one finds with $\rho_1(\mathbf{r}'_1) = \rho(\mathbf{r}')$

$$q_1 = \int d^3r'_1 \rho_1(\mathbf{r}'_1) = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') = q \tag{4.13}$$

$$\mathbf{p}_1 = \int d^3r'_1 \mathbf{r}'_1 \rho_1(\mathbf{r}'_1) = \int d^3r' (\mathbf{r}' - \mathbf{a})\rho(\mathbf{r}') = \mathbf{p} - \mathbf{a}q. \tag{4.14}$$

Die Gesamtladung ist unabhängig vom Bezugspunkt. Das Dipolmoment ist unabhängig vom Bezugspunkt, falls $q = 0$ (reiner Dipol), sonst hängt es vom Bezugspunkt ab. Ähnlich findet man, dass das Quadrupolmoment unabhängig vom Bezugspunkt ist, falls $q = 0$ und $\mathbf{p} = 0$ (reiner Quadrupol).

The total charge is independent of the point of reference. The dipolar moment is independent of the point of reference if $q = 0$ (pure dipol), otherwise it depends on the point of reference. Similarly one finds, that the quadrupolar moment is independent of the point of reference, if $q = 0$ and $\mathbf{p} = 0$ (pure quadrupole).

Unter Drehung $x'_{1,\alpha} = D_{\alpha,\beta}x'_\beta$ ist $q$ invariant (Skalar), wobei $D$ eine Drehmatrix sei, also eine orthogonale Transformation beschreibe. Der Dipol $\mathbf{p}$ transformiert sich wie ein Vektor

The charge $q$ is invariant under rotation (scalar) $x'_{1,\alpha} = D_{\alpha,\beta}x'_\beta$, where $D$ is a rotation matrix, which describes an orthogonal transformation. The dipole $\mathbf{p}$ transforms like a vector

$$p_{1,\alpha} = \int d^3r' D_{\alpha,\beta} x'_\beta \rho(\mathbf{r}') = D_{\alpha,\beta} p_\beta \tag{4.15}$$

und der Quadrupol $Q$ wie ein Tensor zweiter Stufe

and the quadrupole $Q$ like a tensor of rank 2

$$Q_{1,\alpha,\beta} = \int d^3r' (D_{\alpha,\gamma}x'_\gamma D_{\beta,\delta}x'_\delta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha,\beta} r'^2)\rho(\mathbf{r}'). \tag{4.16}$$

Beachtet man, dass auf Grund der Orthogonalität von $D$

Taking into account, that due to the orthogonality of $D$

$$\delta_{\alpha,\beta} = D_{\alpha,\gamma} D_{\beta,\gamma} = D_{\alpha,\gamma} \delta_{\gamma,\delta} D_{\beta,\delta}, \tag{4.17}$$

so folgt

it follows that

$$Q_{1,\alpha,\beta} = D_{\alpha,\gamma} D_{\beta,\delta} Q_{\gamma,\delta}, \tag{4.18}$$

also das Transformationsgesetz für Tensoren zweiter Stufe.

that is the transformation law for tensors of second rank.

## 4.c Dipol

## 4.c Dipole

Der Prototyp eines Dipols besteht aus einer Ladung $q$ am Ort $\mathbf{r}_0 + \mathbf{a}$ und einer entgegengesetzten Ladung $-q$ am Ort $\mathbf{r}_0$. Das Dipolmoment beträgt dann

The prototype of a dipole consists of two charges of opposite sign, $q$ at $\mathbf{r}_0 + \mathbf{a}$ and $-q$ at $\mathbf{r}_0$.

$$\mathbf{p} = q\mathbf{a}. \tag{4.19}$$

Als Ladungsverteilung ergibt sich dann

Therefore the corresponding charge distribution is

$$\rho(\mathbf{r}) = q(\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{a}) - \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)). \tag{4.20}$$

Wir führen nun eine Taylorentwicklung nach $\mathbf{a}$ durch

We perform now the Taylor expansion in $\mathbf{a}$

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - q\mathbf{a} \cdot \nabla \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \frac{q}{2}(\mathbf{a} \cdot \nabla)^2 \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \ldots - q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \tag{4.21}$$

wobei sich der erste mit dem letzten Term weghebt. Wir führen nun den Limes $\mathbf{a} \to 0$ durch, wobei wir das Produkt $q\mathbf{a} = \mathbf{p}$ festhalten. Dann bleibt als Ladungsverteilung eines Dipols $\mathbf{p}$ am Ort $\mathbf{r}_0$

where the first and the last term cancel. We consider now the limit $\mathbf{a} \to 0$, where the product $q\mathbf{a} = \mathbf{p}$ is kept fixed. Then we obtain the charge distribution of a dipole $\mathbf{p}$ at location $\mathbf{r}_0$

$$\rho(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \tag{4.22}$$

und sein Potential

and its potential

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\mathbf{p} \cdot \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \operatorname{grad}' \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) = \mathbf{p} \cdot \int d^3r' \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \\ &= \mathbf{p} \cdot \int d^3r' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}, \end{aligned} \tag{4.23}$$

wobei die Gleichungen (B.61) verwendet und (B.50) gelöst wurden.

where equation (B.61) is used and (B.50) has to be solved.

## 4.d Quadrupol

## 4.d Quadrupole

Der Quadrupol wird durch die zweiten Momente der Ladungsverteilung beschrieben.

The quadrupole is described by the second moment of the charge distribution.

### 4.d.$\alpha$ Symmetrien

### 4.d.$\alpha$ Symmetries

$Q$ ist ein symmetrischer Tensor

$Q$ is a symmetric tensor

$$Q_{\alpha,\beta} = Q_{\beta,\alpha}. \tag{4.24}$$

Er lässt sich daher ähnlich wie der Trägheitstensor durch eine orthogonale Transformation auf Diagonalform bringen. Weiterhin folgt aus der Definition (4.10)

It can be diagonalized by an orthogonal transformation similarly as the tensor of inertia. Further from definition (4.10) it follows that

$$Q_{\alpha,\alpha} = 0, \tag{4.25}$$

das heißt die Spur des Quadrupol-Tensors verschwindet. Daher hat der Tensor nicht sechs, sondern nur fünf unabhängige Komponenten.

that is the trace of the quadrupole tensor vanishes. Thus the tensor does not have six, but only five independent components.

### 4.d.$\beta$ Symmetrischer Quadrupol

Ein Spezialfall ist der symmetrische Quadrupol. Seine Ladungsverteilung hängt nur von $z$ und dem Abstand von der z-Achse ab, $\rho = \rho(z, \sqrt{x^2+y^2})$. Für ihn gilt

### 4.d.$\beta$ Symmetric Quadrupole

A special case is the symmetric quadrupole. Its charge distribution depends only on $z$ and on the distance from the z-axis, $\rho = \rho(z, \sqrt{x^2+y^2})$. It obeys

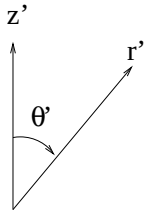
$$Q_{\mathrm{x,y}} = Q_{\mathrm{x,z}} = Q_{\mathrm{y,z}} = 0, \tag{4.26}$$

weil $\rho(x,y,z) = \rho(-x,y,z) = \rho(x,-y,z)$. Weiter ist

because $\rho(x,y,z) = \rho(-x,y,z) = \rho(x,-y,z)$. Furthermore one has

$$Q_{\mathrm{x,x}} = Q_{\mathrm{y,y}} = -\frac{1}{2}Q_{\mathrm{z,z}} =: -\frac{1}{3}\hat{Q}. \tag{4.27}$$

Die erste Gleichung folgt aus $\rho(x,y,z)=\rho(y,x,z)$, die zweite daraus, dass die Spur von $Q$ verschwindet. Das letzte Gleichheitszeichen gibt die Definition von $\hat{Q}$ an.




The first equality follows from $\rho(x,y,z) = \rho(y,x,z)$, the second one from the vanishing of the trace of $Q$. The last equality-sign gives the definition of $\hat{Q}$.

Man findet

One finds

$$\hat{Q} = \frac{3}{2}Q_{\mathrm{z,z}} = \int d^3r' (\frac{3}{2}z'^2 - \frac{1}{2}r'^2)\rho(\mathbf{r}') = \int d^3r' r'^2 P_2(\cos\theta')\rho(\mathbf{r}') \tag{4.28}$$

mit dem Legendre-Polynom $P_2(\xi) = \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}$. Auf die Legendre-Polynome werden wir im nächsten Abschnitt und im Anhang C noch zurückkommen.

with the Legendre polynomial $P_2(\xi) = \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}$. We will return to the Legendre polynomials in the next section and in appendix C.

Als Beispiel betrachten wir noch den gestreckten Quadrupol mit zwei Ladungen $q$ an den Orten $\pm a\mathbf{e}_\mathrm{z}$ und einer Ladung $-2q$ am Ursprung. Wir finden $\hat{Q} = 2qa^2$. Die einzelnen Ladungen tragen zum Quadrupolpotential

As an example we consider the stretched quadrupole with two charges $q$ at $\pm a\mathbf{e}_\mathrm{z}$ and a charge $-2q$ in the origin. Then we obtain $\hat{Q} = 2qa^2$. The different charges contribute to the potential of the quadrupole

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{3}\hat{Q}\frac{3x^2-r^2}{2r^5} - \frac{1}{3}\hat{Q}\frac{3y^2-r^2}{2r^5} + \frac{2}{3}\hat{Q}\frac{3z^2-r^2}{2r^5} = \frac{\hat{Q}P_2(\cos\theta)}{r^3} \tag{4.29}$$

bei.

.

## 4.e Energie, Kraft und Drehmoment auf einen Multipol im äußeren Feld

## 4.e Energy, Force and Torque on a Multipole in an external Field

Eine Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$, die um den Ursprung lokalisiert sei, sei in einem äußeren elektrischen Potential $\Phi_\mathrm{a}(\mathbf{r})$, das etwa von einer entfernten Ladungsverteilung $\rho_\mathrm{a}$ erzeugt sei. Die Wechselwirkungsenergie beträgt dann

A charge distribution $\rho(\mathbf{r})$ localized around the origin is considered in an external electric potential $\Phi_\mathrm{a}(\mathbf{r})$, which may be generated by an external charge distribution $\rho_\mathrm{a}$. The interaction energy is then given by

$$U = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \Phi_\mathrm{a}(\mathbf{r}). \tag{4.30}$$

Hier tritt kein Faktor 1/2 vor dem Integral auf, wie man es wegen (3.24) annehmen könnte, da zum Integral über $\rho(\mathbf{r})\Phi_\mathrm{a}(\mathbf{r})$ noch ein zweiter Beitrag mit dem Integral über $\rho_\mathrm{a}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})$ hinzutritt, der noch einmal den gleichen Beitrag liefert. Wir entwickeln nun das äußere Potential und erhalten für die Wechselwirkungsenergie

No factor 1/2 appears in front of the integral, which might be expected in view of this factor in (3.24), since besides the integral over $\rho(\mathbf{r})\Phi_\mathrm{a}(\mathbf{r})$ there is a second one over $\rho_\mathrm{a}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})$, which yields the same contribution. We now expand the external potential and obtain for the interaction energy

$$\begin{aligned} U &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \left\{ \Phi_\mathrm{a}(0) + \mathbf{r}\nabla\Phi_\mathrm{a}|_{r=0} + \frac{1}{2} x_\alpha x_\beta \, \nabla_\alpha \nabla_\beta \Phi_\mathrm{a}|_{r=0} + \ldots \right\} \\ &= q\Phi_\mathrm{a}(0) + \mathbf{p}\cdot\nabla\Phi_\mathrm{a}|_{r=0} + \frac{1}{2}\left( Q_{\alpha,\beta} + \frac{1}{3}\delta_{\alpha,\beta} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) r^2 \right) \nabla_\alpha \nabla_\beta \Phi_\mathrm{a}|_{r=0} + \ldots \end{aligned} \tag{4.31}$$

Der Beitrag proportional zum Integral über $\rho(\mathbf{r})r^2$ verschwindet, da $\nabla_\alpha\nabla_\alpha\Phi_\mathrm{a} = \triangle\Phi_\mathrm{a} = -4\pi\rho_\mathrm{a}(\mathbf{r}) = 0$, da sich am Ursprung keine Ladungen befinden, die $\Phi_\mathrm{a}$ erzeugen. Damit bleibt für das Wechselwirkungs-Potential

The contribution proportional to the integral over $\rho(\mathbf{r})r^2$ vanishes, since $\nabla_\alpha\nabla_\alpha\Phi_\mathrm{a} = \triangle\Phi_\mathrm{a} = -4\pi\rho_\mathrm{a}(\mathbf{r}) = 0$, since there are no charges at the origin, which generate $\Phi_\mathrm{a}$. Therefore we are left with the potential of interaction

$$U = q\Phi_\mathrm{a}(0) - \mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_\mathrm{a}(0) + \frac{1}{2} Q_{\alpha,\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \Phi_\mathrm{a} + \ldots \tag{4.32}$$

Wir können daraus zum Beispiel die potentielle Energie zweier Dipole, $\mathbf{p}_\mathrm{b}$ im Ursprung und $\mathbf{p}_\mathrm{a}$ bei $\mathbf{r}_0$ bestimmen. Der Dipol $\mathbf{p}_\mathrm{a}$ erzeugt das Potential

For example we can now determine the potential energy between two dipoles, $\mathbf{p}_\mathrm{b}$ in the origin and $\mathbf{p}_\mathrm{a}$ at $\mathbf{r}_0$. The dipole $\mathbf{p}_\mathrm{a}$ generates the potential

$$\Phi_\mathrm{a}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}_\mathrm{a}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}. \tag{4.33}$$

Die Wechselwirkungsenergie ergibt sich dann zu (vgl. B.47)

Then the interaction energy yields (compare B.47)

$$U_\mathrm{a,b} = \mathbf{p}_\mathrm{b}\cdot\nabla\Phi_\mathrm{a}|_{r=0} = \frac{\mathbf{p}_\mathrm{a}\cdot\mathbf{p}_\mathrm{b}}{r_0^3} - \frac{3(\mathbf{p}_\mathrm{a}\cdot\mathbf{r}_0)(\mathbf{p}_\mathrm{b}\mathbf{r}_0)}{r_0^5}. \tag{4.34}$$

Die Kraft auf einen Dipol im Ursprung ergibt sich zu

The force on the dipole in the origin is then given by

$$\mathbf{K} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}_\mathrm{a}(\mathbf{r}) = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{E}_\mathrm{a}(0) + x_\alpha \nabla_\alpha \mathbf{E}_\mathrm{a}|_{r=0} + \ldots) = q\mathbf{E}_\mathrm{a}(0) + (\mathbf{p}\cdot\,\mathrm{grad}\,)\mathbf{E}_\mathrm{a}(0) + \ldots \tag{4.35}$$

Das Drehmoment auf einen Dipol im Ursprung ergibt sich zu

The torque on a dipole in the origin is given by

$$\mathbf{M}_\mathrm{mech} = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \times \mathbf{E}_\mathrm{a}(\mathbf{r}') = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_\mathrm{a}(0) + \ldots \tag{4.36}$$

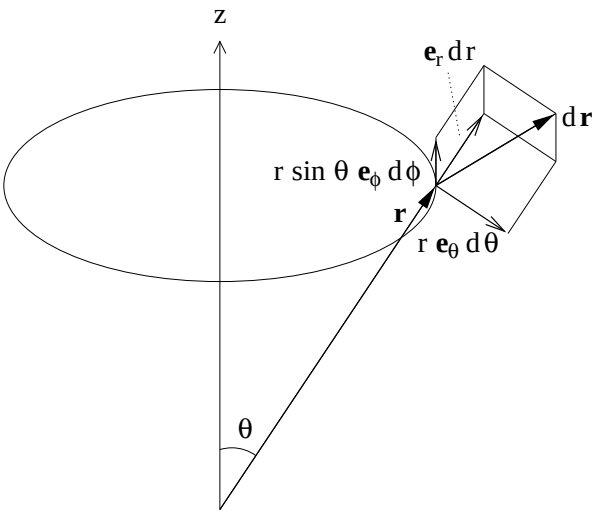
# 5 Multipol-Entwicklung in Kugelkoordinaten

## 5.a Poisson-Gleichung in Kugelkoordinaten

Wir leiten zunächst den Ausdruck für den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

$$x = r\sin\theta\cos\phi \tag{5.1}$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi \tag{5.2}$$
$$z = r\cos\theta \tag{5.3}$$

her. Dabei benützen wir zunächst nur, dass es sich dabei um krummlinige Koordinaten handelt, die sich unter rechtem Winkel schneiden, so dass wir




. Initially we use only that we deal with curvilinear coordinates which intersect at right angles, so that we may write

$$d\mathbf{r} = g_r\mathbf{e}_r dr + g_\theta\mathbf{e}_\theta d\theta + g_\phi\mathbf{e}_\phi d\phi \tag{5.4}$$

schreiben können, wobei die $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ und $\mathbf{e}_\phi$ eine orthonormierte ortsabhängige Basis bilden. Man findet leicht, dass

where the $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ and $\mathbf{e}_\phi$ constitute an orthonormal space dependent basis. Easily one finds

$$g_r = 1, \quad g_\theta = r, \quad g_\phi = r\sin\theta. \tag{5.5}$$

Das Volumenelement ist gegeben durch

The volume element is given by

$$d^3r = g_r dr g_\theta d\theta g_\phi d\phi = r^2 dr\sin\theta d\theta d\phi = r^2 dr d\Omega \tag{5.6}$$

mit dem Raumwinkelelement

with the element of the solid angle

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi. \tag{5.7}$$

### 5.a.$\alpha$ Der Gradient

Zur Berechnung des Gradienten betrachten wir das Differential einer Funktion $\Phi(\mathbf{r})$

### 5.a.$\alpha$ The Gradient

In order to determine the gradient we consider the differential of the function $\Phi(\mathbf{r})$

$$d\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\partial\Phi}{\partial r}dr + \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\Phi}{\partial\phi}d\phi, \tag{5.8}$$

# 5 Multipole Expansion in Spherical Coordinates

## 5.a Poisson-Equation in Spherical Coordinates

We first derive the expression for the Laplacian operator in spherical coordinates

die mit $(\operatorname{grad}\Phi)\cdot d\mathbf{r}$ übereinstimmen muss. Aus der Entwicklung des Vektorfeldes in seine Komponenten

which coincides with $(\operatorname{grad}\Phi)\cdot d\mathbf{r}$. From the expansion of the vector field in its components

$$\operatorname{grad}\Phi = (\operatorname{grad}\Phi)_r\mathbf{e}_r + (\operatorname{grad}\Phi)_\theta\mathbf{e}_\theta + (\operatorname{grad}\Phi)_\phi\mathbf{e}_\phi \tag{5.9}$$

und (5.4) folgt dann

and (5.4) it follows that

$$d\Phi(\mathbf{r}) = (\operatorname{grad}\Phi)_r g_r dr + (\operatorname{grad}\Phi)_\theta g_\theta d\theta + (\operatorname{grad}\Phi)_\phi g_\phi d\phi, \tag{5.10}$$

woraus wir

from which we obtain

$$(\operatorname{grad}\Phi)_r = \frac{1}{g_r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad (\operatorname{grad}\Phi)_\theta = \frac{1}{g_\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \quad (\operatorname{grad}\Phi)_\phi = \frac{1}{g_\phi}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \tag{5.11}$$

für die Komponenten des Gradienten erhalten.

for the components of the gradient.

### 5.a.$\beta$ Die Divergenz

Zur Berechnung der Divergenz verwenden wir den Gaußschen Satz (B.59). Wir integrieren die Divergenz von $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ über ein Volumen begrenzt durch die Koordinaten $r, r+\Delta r$, $\theta, \theta+\Delta\theta$, $\phi, \phi+\Delta\phi$. Wir erhalten

### 5.a.$\beta$ The Divergence

In order to calculate the divergence we use the divergence theorem (B.59). We integrate the divergence of $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ in a volume limited by the coordinates $r, r+\Delta r$, $\theta, \theta+\Delta\theta$, $\phi, \phi+\Delta\phi$. We obtain

$$\begin{aligned}
\int d^3r \operatorname{div}\mathbf{A} &= \int g_r g_\theta g_\phi \operatorname{div}\mathbf{A}\, dr d\theta d\phi \\
= \int \mathbf{A}\cdot d\mathbf{f} &= \int g_\theta d\theta g_\phi d\phi A_r\big|_r^{r+\Delta r} + \int g_r dr g_\phi d\phi A_\theta\big|_\theta^{\theta+\Delta\theta} + \int g_r dr g_\theta d\theta A_\phi\big|_\phi^{\phi+\Delta\phi} \\
&= \int \left[\frac{\partial}{\partial r}(g_\theta g_\phi A_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(g_r g_\phi A_\theta) + \frac{\partial}{\partial\phi}(g_r g_\theta A_\phi)\right] dr d\theta d\phi
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Da die Identität für beliebig kleine Volumina zutrifft, müssen die Integranden auf der rechten Seite der ersten Zeile und auf der dritten Zeile übereinstimmen. Daraus folgt

Since the identity holds for arbitrarily small volumina the integrands on the right-hand side of the first line and on the third line have to agree which yields

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{g_r g_\theta g_\phi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(g_\theta g_\phi A_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(g_r g_\phi A_\theta) + \frac{\partial}{\partial\phi}(g_r g_\theta A_\phi)\right]. \tag{5.13}$$

### 5.a.$\gamma$ Der Laplace-Operator

Durch Bildung von $\triangle\Phi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi$ erhalten wir schließlich

### 5.a.$\gamma$ The Laplacian

Using $\triangle\Phi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi$ we obtain finally

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{g_r g_\theta g_\phi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{g_\theta g_\phi}{g_r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{g_r g_\phi}{g_\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{g_r g_\theta}{g_\phi}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right)\right]. \tag{5.14}$$

Diese Formel gilt noch generell für orthogonale krummlinige Koordinaten (wenn wir sie mit $r, \theta, \phi$ bezeichnen). Setzen wir nun die Werte für $g$ ein, so folgt für sphärische Koordinaten

This equation holds generally for curvilinear orthogonal coordinates (if we denote them by $r, \theta, \phi$). Substituting the values for $g$ we obtain for spherical coordinates

$$\triangle\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2}\triangle_\Omega\Phi, \tag{5.15}$$

$$\triangle_\Omega\Phi = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}. \tag{5.16}$$

Der Operator $\triangle_\Omega$ wirkt nur auf die beiden Winkel $\theta$ und $\phi$, aber nicht auf den Abstand $r$. Er wird auch Laplace-Operator auf der Kugel genannt.

The operator $\triangle_\Omega$ acts only on the two angels $\theta$ and $\phi$, but not on the distance $r$. Therefore it is also called Laplacian on the sphere.

## 5.b Kugelflächenfunktionen

Wie wir im Anhang C näher ausführen, gibt es einen vollständigen Satz orthonormierter Funktionen $Y_{l,m}(\theta,\phi)$, $l = 0,1,2,...$, $m = -l,-l+1,...l$, die der Gleichung

## 5.b Spherical Harmonics

As will be explained in more detail in appendix C there is a complete set of orthonormal functions $Y_{l,m}(\theta,\phi)$, $l = 0,1,2,...$, $m = -l,-l+1,...l$, which obey the equation

$$\triangle_\Omega Y_{l,m}(\theta,\phi) = -l(l+1)Y_{l,m}(\theta,\phi) \tag{5.17}$$

genügen. Diese heißen Kugelflächenfunktionen. Vollständigkeit heißt: Ist $f(\theta,\phi)$ auf der Kugel differenzierbar und sind die Ableitungen beschränkt, so lässt sich $f(\theta,\phi)$ darstellen als konvergente Summe

. They are called spherical harmonics. Completeness means: If $f(\theta,\phi)$ is differentiable on the sphere and its derivatives are bounded, then $f(\theta,\phi)$ can be represented as a convergent sum

$$f(\theta,\phi) = \sum_{l,m} \hat{f}_{l,m} Y_{l,m}(\theta,\phi). \tag{5.18}$$

Daher führen wir jetzt die entsprechende Entwicklung für $\Phi(\mathbf{r})$ und $\rho(\mathbf{r})$ durch

Therefore we perform the corresponding expansion for $\Phi(\mathbf{r})$ and $\rho(\mathbf{r})$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \hat{\Phi}_{l,m}(r) Y_{l,m}(\theta,\phi), \tag{5.19}$$

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \hat{\rho}_{l,m}(r) Y_{l,m}(\theta,\phi). \tag{5.20}$$

Die Kugelflächenfunktionen sind orthonormal, das heißt, das Integral über den Raumwinkel ergibt

The spherical harmonics are orthonormal, that is, the integral over the solid angle yields

$$\int d\Omega Y^*_{l,m}(\theta,\phi) Y_{l',m'}(\theta,\phi) = \int d\phi \sin\theta d\theta Y^*_{l,m}(\theta,\phi) Y_{l',m'}(\theta,\phi) = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'}. \tag{5.21}$$

Diese Orthogonalitätsbeziehung können wir zur Berechnung der $\hat{\Phi}$ und $\hat{\rho}$ verwenden

This orthogonality relation can be used for the calculation of $\hat{\Phi}$ and $\hat{\rho}$

$$\begin{aligned} \int d\phi \sin\theta d\theta Y^*_{l,m}(\theta,\phi)\rho(\mathbf{r}) &= \sum_{l',m'} \hat{\rho}_{l',m'}(r) \int d\phi \sin\theta d\theta Y^*_{l,m}(\theta,\phi) Y_{l',m'}(\theta,\phi) \\ = \sum_{l',m'} \hat{\rho}_{l',m'}(r)\delta_{l,l'}\delta_{m,m'} &= \hat{\rho}_{l,m}(r). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Wir geben hier einige der Kugelflächenfunktionen an

We list some of the spherical harmonics

$$Y_{0,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \tag{5.23}$$

$$Y_{1,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \tag{5.24}$$

$$Y_{1,\pm1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi} \tag{5.25}$$

$$Y_{2,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) \tag{5.26}$$

$$Y_{2,\pm 1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi} \tag{5.27}$$

$$Y_{2,\pm 2}(\theta,\phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}. \tag{5.28}$$

Allgemein ist

In general one has

$$Y_{l,m}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{5.29}$$

mit den zugeordneten Legendre-Funktionen

with the associated Legendre functions

$$P_l^m(\xi) = \frac{(-)^m}{2^l l!}(1-\xi^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}}(\xi^2-1)^l. \tag{5.30}$$

Generell ist $Y_{l,m}$ das Produkt aus $(\sin\theta)^{|m|}e^{im\phi}$ und einem Polynom der Ordnung $l-|m|$ in $\cos\theta$. Je nachdem, ob $l-|m|$ gerade oder ungerade ist, handelt es sich dabei um ein gerades oder ungerades Polynom in $\cos\theta$. Es gilt die Symmetrie-Beziehung

Generally $Y_{l,m}$ is a product of $(\sin\theta)^{|m|}e^{im\phi}$ and a polynomial of order $l-|m|$ in $\cos\theta$. If $l-|m|$ is even (odd), then this polynomial is even (odd) in $\cos\theta$. There is the symmetry relation

$$Y_{l,-m}(\theta,\phi) = (-)^m Y_{l,m}^*(\theta,\phi). \tag{5.31}$$

## 5.c Radialgleichung und Multipol-Momente

Unter Verwendung der Entwicklung von $\Phi$ und $\rho$ nach den Kugelflächenfunktionen lautet die Poisson-Gleichung nun

## 5.c Radial Equation and Multipole Moments

Using the expansion of $\Phi$ and $\rho$ in spherical harmonics the Poisson equation reads

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l,m}\left(\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\hat{\Phi}_{l,m}(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2}\hat{\Phi}_{l,m}(r)\right)Y_{l,m}(\theta,\phi) = -4\pi\sum_{l,m}\hat{\rho}_{l,m}(r)Y_{l,m}(\theta,\phi). \tag{5.32}$$

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten von $Y_{l,m}$ erhalten wir die Radialgleichungen

Equating the coefficients of $Y_{l,m}$ we obtain the radial equations

$$\hat{\Phi}''_{l,m}(r) + \frac{2}{r}\hat{\Phi}'_{l,m}(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\hat{\Phi}_{l,m}(r) = -4\pi\hat{\rho}_{l,m}(r). \tag{5.33}$$

Die Lösung der homogenen Gleichung lautet

The solution of the homogeneous equation reads

$$\hat{\Phi}_{l,m}(r) = a_{l,m}r^l + b_{l,m}r^{-l-1}. \tag{5.34}$$

Für die inhomogene Gleichung macht man nun wie üblich den Ansatz (ich lasse im Moment die Indices $l$ und $m$ weg.)

For the inhomogeneous equation we introduce the conventional ansatz (at present I suppress the indices $l$ and $m$.)

$$\hat{\Phi} = a(r)r^l + b(r)r^{-l-1}. \tag{5.35}$$

Dann folgt

Then one obtains

$$\hat{\Phi}' = a'(r)r^l + b'(r)r^{-l-1} + la(r)r^{l-1} - (l+1)b(r)r^{-l-2}. \tag{5.36}$$

Wir fordern nun wie üblich

As usual we require

$$a'(r)r^l + b'(r)r^{-l-1} = 0 \tag{5.37}$$

und erhalten dann für die zweite Ableitung

and obtain for the second derivative

$$\hat{\Phi}'' = la'(r)r^{l-1} - (l+1)b'(r)r^{-l-2} + l(l-1)a(r)r^{l-2} + (l+1)(l+2)b(r)r^{-l-3}. \tag{5.38}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Radialgleichung ein, so heben sich die Anteile, die $a$ und $b$ ohne Ableitung enthalten, weg. Es bleibt

After substitution into the radial equation the contributions which contain $a$ and $b$ without derivative cancel. We are left with

$$la'(r)r^{l-1} - (l+1)b'(r)r^{-l-2} = -4\pi\hat{\rho}, \tag{5.39}$$

Aus den Gleichungen (5.37) und (5.39) folgt dann durch Auflösen nach $a'$ und $b'$

From the equations (5.37) and (5.39) one obtains by solving for $a'$ and $b'$

$$\frac{da_{l,m}(r)}{dr} = -\frac{4\pi}{2l+1} r^{1-l}\hat{\rho}_{l,m}(r), \tag{5.40}$$

$$\frac{db_{l,m}(r)}{dr} = \frac{4\pi}{2l+1} r^{l+2}\hat{\rho}_{l,m}(r). \tag{5.41}$$

Wir integrieren nun die Gleichungen

Now we integrate these equations

$$a_{l,m}(r) = \frac{4\pi}{2l+1}\int_r^\infty dr' r'^{1-l}\hat{\rho}_{l,m}(r') \tag{5.42}$$

$$b_{l,m}(r) = \frac{4\pi}{2l+1}\int_0^r dr' r'^{l+2}\hat{\rho}_{l,m}(r'). \tag{5.43}$$

Addieren wir eine Konstante zu $a_{l,m}(r)$, so ist dies auch eine Lösung der Poisson-Gleichung, da $r^l Y_{l,m}(\theta,\phi)$ homogene Lösung der Poisson-Gleichung ist. Wir wünschen aber eine Lösung, die für großes $r$ abfällt. Daher wählen wir $a_{l,m}(\infty) = 0$. Addieren wir eine Konstante zu $b_{l,m}$, so ist das eine Lösung für $r \neq 0$. Für $r = 0$ hingegen erhält man eine Singularität, die die Poisson-Gleichung nicht erfüllt. Daher muss man $b_{l,m}(0) = 0$ setzen.

If we add a constant to $a_{l,m}(r)$, then this is a solution of the Poisson-equation too, since $r^l Y_{l,m}(\theta,\phi)$ is a homogeneous solution of the Poisson-equation. We request a solution, which decays for large $r$. Therefore we choose $a_{l,m}(\infty) = 0$. If we add a constant to $b_{l,m}$, then this is a solution for $r \neq 0$. For $r = 0$ however, one obtains a singularity, which does not fulfil the Poisson-equation. Therefore $b_{l,m}(0) = 0$ is required.

Wir können nun die Entwicklungs-Koeffizienten $\hat{\rho}_{l,m}$ einsetzen und erhalten

We may now insert the expansion coefficients $\hat{\rho}_{l,m}$ and obtain

$$a_{l,m}(r) = \frac{4\pi}{2l+1}\int_{r'>r} d^3r' r'^{-1-l} Y^*_{l,m}(\theta',\phi')\rho(\mathbf{r}') \tag{5.44}$$

$$b_{l,m}(r) = \frac{4\pi}{2l+1}\int_{r'<r} d^3r' r'^{l} Y^*_{l,m}(\theta',\phi')\rho(\mathbf{r}'). \tag{5.45}$$

Wir können nun die Ausdrücke für $a_{l,m}$ und $b_{l,m}$ in (5.19) und (5.35) einsetzen. Die $r$- und $r'$-Abhängigkeit ergibt sich für $r < r'$ aus dem $a$-Term zu $r^l/r'^{l+1}$ und für $r > r'$ aus dem $b$-Term zu $r'^l/r^{l+1}$. Dies fasst man zusammen, indem man mit $r_>$ den größeren, mit $r_<$ den kleineren der beiden Radien $r$ und $r'$ bezeichnet. Dann folgt

We may now insert the expressions for $a_{l,m}$ und $b_{l,m}$ into (5.19) and (5.35). The $r$- und $r'$-dependence is obtained for $r < r'$ from the $a$-term as $r^l/r'^{l+1}$ and for $r > r'$ from the $b$-term as $r'^l/r^{l+1}$. This can be put together, if we denote by $r_>$ the larger, by $r_<$ the smaller of both radii $r$ and $r'$. Then one has

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}\int d^3r' \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\rho(\mathbf{r}')Y^*_{l,m}(\theta',\phi')Y_{l,m}(\theta,\phi). \tag{5.46}$$

Ist $\rho(\mathbf{r}') = 0$ für $r' > R$, dann folgt für $r > R$

If $\rho(\mathbf{r}') = 0$ for $r' > R$, then one obtains for $r > R$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l,m}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}q_{l,m}\frac{Y_{l,m}(\theta,\phi)}{r^{l+1}} \tag{5.47}$$

mit den Multipolmomenten

$$q_{l,m} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int d^3r' r'^l Y^*_{l,m}(\theta', \phi')\rho(\mathbf{r}'). \tag{5.48}$$

Für $l = 0$ erhalten wir das "Monopolmoment" Ladung, für $l = 1$ haben wir die Komponenten des Dipol-Moments, für $l = 2$ die Komponenten des Quadrupolmoments. Speziell für $m = 0$ hat man

with the multipole moments

For $l = 0$ one obtains the "monopole moment" charge, for $l = 1$ the components of the dipole moment, for $l = 2$ the components of the quadrupole moment. In particular for $m = 0$ one has

$$q_{0,0} = \sqrt{4\pi} \int d^3r' \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \rho(\mathbf{r}') = q \tag{5.49}$$

$$q_{1,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int d^3r' \sqrt{\frac{3}{4\pi}} r' \cos\theta' \rho(\mathbf{r}') = \int d^3r' z' \rho(\mathbf{r}') = p_z \tag{5.50}$$

$$q_{2,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \int d^3r' \sqrt{\frac{5}{4\pi}} r'^2 (\frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2})\rho(\mathbf{r}') = \int d^3r' (\frac{3}{2} z'^2 - \frac{1}{2} r'^2)\rho(\mathbf{r}') = \frac{3}{2} Q_{zz}. \tag{5.51}$$

## 5.d Punktladung am Ort r′, zylindersymmetrische Ladungsverteilung

Wir betrachten jetzt noch den Fall einer Punktladung $q$ am Ort $\mathbf{r}'$. Wir können ausgehen von dem bekannten Potential

## 5.d Point Charge at r′, Cylindric Charge Distribution

Finally we consider the case of a point charge $q$ located at $\mathbf{r}'$. We start from the potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{q}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\psi}}. \tag{5.52}$$

Dabei ist $\psi$ der Winkel zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$. Wir entwickeln nun nach $r_</r_>$

Here $\psi$ is the angle between $\mathbf{r}$ and $\mathbf{r}'$. We expand in $r_</r_>$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r_> \sqrt{1 + (\frac{r_<}{r_>})^2 - 2\frac{r_<}{r_>}\cos\psi}} = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\psi). \tag{5.53}$$

Dabei bezeichnet man $P_l(\xi)$ als Legendre-Polynome. Für $\cos\psi = \pm 1$ sieht man sofort aus der Entwicklung von $1/(r_> \mp r_<)$, dass $P_l(1) = 1$ und $P_l(-1) = (-)^l$ gilt.

The $P_l(\xi)$ are called Legendre-polynomials. For $\cos\psi = \pm 1$ one sees immediately from the expansion of $1/(r_> \mp r_<)$, that $P_l(1) = 1$ and $P_l(-1) = (-)^l$ hold.

Wir können andererseits auch mit (5.46) arbeiten und finden

On the other hand we may work with (5.46) and find

$$\Phi(\mathbf{r}) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{l,m}(\theta, \phi) Y^*_{l,m}(\theta', \phi'). \tag{5.54}$$

Durch Vergleich findet man das Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen

By comparison we obtain the addition theorem for spherical harmonics

$$P_l(\cos\psi) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{l,m}(\theta, \phi) Y^*_{l,m}(\theta', \phi'), \tag{5.55}$$

wobei sich der Winkel $\psi$ zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ ausdrücken lässt durch $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = rr' \cos\psi$ und unter Verwendung von (5.1-5.3)

where the angle $\psi$ between $\mathbf{r}$ and $\mathbf{r}'$ can be expressed by $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = rr' \cos\psi$ and by use of (5.1-5.3)

$$\cos\psi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi'). \tag{5.56}$$

Wir betrachten jetzt noch den Spezialfall $\theta' = 0$, das heißt $\psi = \theta$. Dann verschwinden alle $Y_{l,m}(\theta', \phi')$ wegen der Faktoren $\sin\theta'$ außer denen für $m = 0$ und das Additions-Theorem reduziert sich auf

We consider now the special case $\theta' = 0$, that is $\psi = \theta$. Then all $Y_{l,m}(\theta', \phi')$ vanish because of the factors $\sin\theta'$ with the exception of the term for $m = 0$ and the addition theorem is reduced to

$$P_l(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2l+1} Y_{l,0}(\theta) Y_{l,0}(0) = P_l^0(\cos\theta) P_l^0(1). \tag{5.57}$$

Aus der Darstellung (5.30) $P_l^0(\xi) = 1/(2^l l!) d^l(\xi^2-1)^l/d\xi^l$ folgt für $\xi = 1$ und Zerlegen $(\xi^2-1)^l = (\xi+1)^l(\xi-1)^l$ das Ergebnis $P_l^0(1) = [(\xi+1)^l/2^l]_{\xi=1}[d^l(\xi-1)^l/d\xi^l/l!]_{\xi=1} = 1$. Damit haben wir gefunden, dass

From the representation (5.30) $P_l^0(\xi) = 1/(2^l l!) d^l(\xi^2-1)^l/d\xi^l$ one obtains for $\xi = 1$ and the decomposition $(\xi^2-1)^l = (\xi+1)^l(\xi-1)^l$ the result $P_l^0(1) = [(\xi+1)^l/2^l]_{\xi=1}[d^l(\xi-1)^l/d\xi^l/l!]_{\xi=1} = 1$. Thus we have

$$P_l^0(\xi) = P_l(\xi) \tag{5.58}$$

gilt.

.

Speziell für zylindersymmetrische Verteilungen $\rho(\mathbf{r})$, die also nur von $r$ und $\theta$, aber nicht von $\phi$ abhängen, gilt dann

In particular for a cylinder symmetric charge distribution $\rho(\mathbf{r})$, which therefore depends only on $r$ and $\theta$, but not on $\phi$, one has

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_l \frac{P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}} q_{l,0} \tag{5.59}$$

mit den Momenten

with the moments

$$q_{l,0} = \int d^3r' r'^l P_l(\cos\theta') \rho(\mathbf{r}'). \tag{5.60}$$

Alle Momente mit $m \neq 0$ verschwinden für die zylindersymmetrische Verteilung.

All moments with $m \neq 0$ vanish for a cylinder symmetric distribution.

**Aufgabe** Berechnen Sie aus (5.1) bis (5.5) die Vektoren $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ und $\mathbf{e}_\phi$ und prüfen Sie nach, dass diese ein Orthonormalsystem bilden.

**Exercise** Calculate the vectors $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ and $\mathbf{e}_\phi$ from (5.1) to (5.5) and check, that they constitute an orthonormal basis.

**Aufgabe** Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes (B.56) die Rotation in Kugelkoordinaten

**Exercise** Calculate by means of Stokes' theorem (B.56) the curl in spherical coordinates

**Aufgabe** Berechnen Sie für Zylinderkoordinaten $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$ und $z$ die metrischen Faktoren $g_\rho$, $g_\phi$ und $g_z$, das Volumenelement und Gradient und Divergenz.

**Exercise** Calculate for cylindric coordinates $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$ and $z$ the metric factors $g_\rho$, $g_\phi$ and $g_z$, the volume element and gradient and divergence.

# 6 Elektrisches Feld in Materie

## 6.a Polarisation und dielektrische Verschiebung

Die bisher aufgestellten Feldgleichungen gelten auch in Materie. Auf ein äußeres elektrisches Feld reagiert die Materie im allgemeinen durch Polarisation. Die Elektronen verschieben sich gegenüber den Kernen, wodurch Dipole entstehen, oder bereits existierende Dipole von Molekülen oder Molekülgruppen richten sich gegen die thermische Bewegung aus. Ein elektrisches Feld bewirkt also die Verschiebung von Ladungen $q_i$ vom Ort $\mathbf{r}_i$ zum Ort $\mathbf{r}_i + \mathbf{a}_i$, das heißt Dipole $\mathbf{p}_i = q_i\mathbf{a}_i$ werden induziert. Man erhält die Ladungsverteilung oder Polarisationsladungen (4.22)

$$\rho_{\mathrm{P}}(\mathbf{r}) = -\sum_i \mathbf{p}_i \,\mathrm{grad}\,\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i). \tag{6.1}$$

Führen wir eine Dipolmomentdichte $\mathbf{P}$ ein, die man als Polarisation bezeichnet,

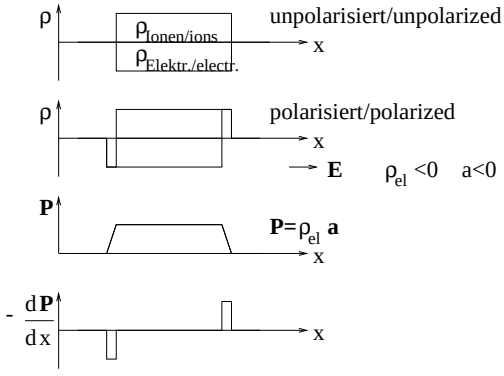
$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V}, \tag{6.2}$$

so folgt

$$\rho_{\mathrm{P}}(\mathbf{r}) = -\int d^3r'\mathbf{P}(\mathbf{r}')\,\mathrm{grad}\,\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\,\mathrm{div}\left(\int d^3r'\mathbf{P}(\mathbf{r}')\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right) = -\,\mathrm{div}\,\mathbf{P}(\mathbf{r}). \tag{6.3}$$

Wir veranschaulichen diese Gleichung. Wir gehen aus von einem Festkörper, in dem sich (auf einer Skala groß gegen den Atomabstand) die Ladungen der Ionen und Elektronen kompensieren (oberste Figur).

Legt man ein Feld $\mathbf{E}$ an, so verschieben sich die Elektronen gegenüber den Ionen (zweite Figur). Im Inneren hat man Ladungskompensation. Nur am Rand bleiben Netto-Ladungen übrig. Im dritten Bild ist die Polarisation $\mathbf{P} = \rho_{\mathrm{el}}\mathbf{a}$ aufgezeichnet, wobei diese am Rand stetig ausgeschmiert wurde.




# 6 Electric Field in Matter

## 6.a Polarization and Dielectric Displacement

The field equations given by now are also valid in matter. In general matter reacts in an external electric field by polarization. The electrons move with respect to the positively charged nuclei, thus generating dipoles, or already existing dipoles of molecules or groups of molecules order against thermal disorder. Thus an electric field displaces the charges $q_i$ from $\mathbf{r}_i$ to $\mathbf{r}_i + \mathbf{a}_i$, that is dipoles $\mathbf{p}_i = q_i\mathbf{a}_i$ are induced. One obtains a charge distribution or polarization charges (4.22)

Introducing a density of dipole moments $\mathbf{P}$ called polarization

one obtains

Let us visualize this equation. We start out from a solid body, in which the charges of the ions and electrons (on a scale large in comparison to the distance between the atoms) compensate (upper figure).

If one applies a field $\mathbf{E}$ then the electrons move against the ions (second figure). Inside the bulk the charges compensate. Only at the boundaries a net-charge is left. In the third figure the polarization $\mathbf{P} = \rho_{\mathrm{el}}\mathbf{a}$ is shown, which has been continuously smeared at the boundary.

Im letzten Bild ist die Ableitung $-d\mathbf{P}/dx$ aufgetragen. Man sieht, dass die das letzte Bild mit der Ladungsdichte im zweiten übereinstimmt.

The last figure shows the derivative $-d\mathbf{P}/dx$. One sees, that this picture agrees with the charge distribution in the second one.

Damit setzt sich die Ladungsdichte $\rho$ zusammen aus einer freibeweglichen Ladungsdichte $\rho_\mathrm{f}$ und der Polarisations-Ladungsdichte $\rho_\mathrm{P}$ (erstere kann zum Beispiel die Ladungsdichte sein, die auf eine Kondensatorplatte aufgebracht wird)

Thus the charge density $\rho$ consists of the free moving charge density $\rho_\mathrm{f}$ and the charge density of the polarization $\rho_\mathrm{P}$ (the first one may be the charge density on the plates of a condensator)

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + \rho_\mathrm{P}(\mathbf{r}) = \rho_\mathrm{f}(\mathbf{r}) - \operatorname{div}\mathbf{P}(\mathbf{r}). \tag{6.4}$$

Damit führt man in der Maxwellgleichung

Thus one introduces in Maxwell's equation

$$\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}) = 4\pi\rho_\mathrm{f}(\mathbf{r}) - 4\pi\operatorname{div}\mathbf{P}(\mathbf{r}) \tag{6.5}$$

die dielektrische Verschiebung $\mathbf{D}$ ein

the dielectric displacement $\mathbf{D}$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + 4\pi\mathbf{P}(\mathbf{r}), \tag{6.6}$$

so dass

so that

$$\operatorname{div}\mathbf{D}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho_\mathrm{f}(\mathbf{r}) \tag{6.7}$$

gilt. Für den Fluss der dielektrischen Verschiebung durch die Oberfläche eines Volumens erhält man dann die freibewegliche Ladung $q_\mathrm{f}(V)$ in diesem Volumen

holds. The flux of the dielectric displacement through the surface of a volume yields the free charge $q_\mathrm{f}$ inside this volume

$$\int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r}) = 4\pi q_\mathrm{f}(V). \tag{6.8}$$

Für viele Substanzen sind bei nicht zu großer Feldstärke $\mathbf{P}$ und $\mathbf{E}$ in guter Näherung proportional

For many substances $\mathbf{P}$ and $\mathbf{E}$ are within good approximation proportional as long as the field intensity $\mathbf{E}$ is not too large

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \chi_\mathrm{e}\mathbf{E}(\mathbf{r}) \qquad \chi_\mathrm{e} \begin{matrix}\text{elektrische Suszeptibilität}\\ \text{electric susceptibility}\end{matrix} \tag{6.9}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}) \qquad \epsilon \begin{matrix}\text{(relative) Dielektrizitätskonstante}\\ \text{relative dielectric constant}\end{matrix} \tag{6.10}$$

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_\mathrm{e}. \tag{6.11}$$

$\chi_\mathrm{e}$ und $\epsilon$ sind Tensoren für anisotrope Materialien, sonst Skalare. Bei Ferroelektrika ist $\mathbf{P}$ bereits für $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ von $\mathbf{0}$ verschieden. Allerdings ist die Polarisationsladung meist durch Oberflächenladungen kompensiert. Doch wird sie offensichtlich, wenn die Polarisation durch äußere Änderungen verändert wird, zum Beispiel durch Druck beim Quarz (Piezoelektrizität) oder Temperaturveränderung.

$\chi_\mathrm{e}$ and $\epsilon$ are tensors for anisotropic matter, otherwise scalars. For ferroelectrica $\mathbf{P}$ is different from $\mathbf{0}$ already for $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. However, in most cases it is compensated by surface charges. But it is observed, when the polarization is varied by external changes like pressure in the case of quartz (piezo-electricity) or under change of temperature.

Im Gaußschen System sind die Dimensionen von $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ und $\mathbf{P}$ übereinstimmend $\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}$. Im SI-System wird aber $\mathbf{E}$ in V/m, $\mathbf{D}$ und $\mathbf{P}$ in $\mathrm{As/m}^2$ gemessen. Da das SI-System ein rationales Maßsystem ist, das Gaußsche ein irrationales, unterscheiden sich die Umrechnungsfaktor für $\mathbf{D}$ und $\mathbf{P}$ um $4\pi$.

In Gaussian units the dimensions of $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ und $\mathbf{P}$ agree to $\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}$. In the SI-system $\mathbf{E}$ is measured in V/m, $\mathbf{D}$ and $\mathbf{P}$ in $\mathrm{As/m}^2$. Since the SI-system is a rational system of units, the Gaussian an irrational one, the conversion factors for $\mathbf{D}$ and $\mathbf{P}$ differ by a factor $4\pi$.

Dementsprechend unterscheiden sich auch die $\chi_e$ in beiden Systemen um einen Faktor $4\pi$. Dagegen sind die relativen Dielektrizitätskonstanten $\epsilon$ identisch. Genaueres findet sich im Anhang A.

## 6.b Grenzflächen zwischen Dielektrika

Wir betrachten nun die Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika oder Dielektrikum und Vakuum. Aus der Maxwellgleichung $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}$ folgt, dass die Komponenten des elektrischen Feldes tangential zur Grenzfläche in beiden Dielektrika übereinstimmen

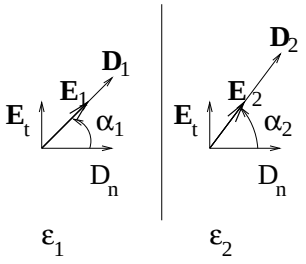
$$\mathbf{E}_{1,\mathrm{t}} = \mathbf{E}_{2,\mathrm{t}}. \tag{6.12}$$

Um dies zu sehen, muss man nur ein Linienintegral $\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$, das parallel zur Grenzfläche in einem Dielektrikum hin, im anderen zurückführt, ausführen und in das Flächenintegral $\int d\mathbf{f} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ überführen. Man sieht dann, dass das Linienintegral verschwindet. Sind die Integrationswege in den beiden Dielektrika infinitesimal benachbart, so folgt, da das für beliebige Wege gilt, dass $\mathbf{E}_\mathrm{t}$ in beiden Dielektrika übereinstimmen muss.

Andererseits können wir ein "Gaußsche Dose" einführen, deren Deckfläche infinitesimal von der Grenzfläche entfernt in einem Dielektrikum und deren Grundfläche ebenfalls infinitesimal von der Grenzfläche im anderen Dielektrikum verläuft. Sind auf der Grenzfläche keine freibeweglichen Ladungen, so gilt $\int_V d^3r\,\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 0$, was dazu führt, dass man auf der Oberfläche $\int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{D} = 0$ hat. Rückt man die Oberfläche nun an die Grenzfläche heran, so folgt die Stetigkeit der Normalkomponenten von $\mathbf{D}$

$$D_{1,\mathrm{n}} = D_{2,\mathrm{n}}. \tag{6.13}$$

Schließt das elektrische Feld (in isotropen Dielektrika) mit der Flächennormalen die Winkel $\alpha_1$ und $\alpha_2$ ein, so gilt




$$E_1 \sin\alpha_1 = E_2 \sin\alpha_2 \tag{6.14}$$

$$D_1 \cos\alpha_1 = D_2 \cos\alpha_2 \tag{6.15}$$

Consequently the $\chi_e$ differ in both systems by a factor $4\pi$. However, the relative dielectric constants $\epsilon$ are identical. For more details see appendix A.

## 6.b Boundaries between Dielectric Media

We now consider the boundary between two dielectric media or a dielectric material and vacuum. From Maxwell's equation $\mathrm{curl}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}$ it follows that the components of the electric field parallel to the boundary coincides in both dielectric media

In order to see this one considers the line integral $\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$ along the closed contour which runs tangential to the boundary in one dielectric and returns in the other one, and transforms it into the integral $\int d\mathbf{f} \cdot \mathrm{curl}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ over the enclosed area. One sees, that the integral over the contour vanishes. If the paths of integration in both dielectrica are infinitesimally close to each other, then $\mathbf{E}_\mathrm{t}$ vanishes, since the integral over the contour vanishes for arbitrary paths.

On the other hand we may introduce a "pill box", whose covering surface is in one medium, the basal surface in the other one, both infinitesimally separated from the boundary. If there are no free charges at the boundary, then $\int_V d^3r\,\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 0$, so that the integral $\int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{D} = 0$ over the surface vanishes. If the surface approaches the boundary, then it follows, that the normal component of $\mathbf{D}$ is continuous

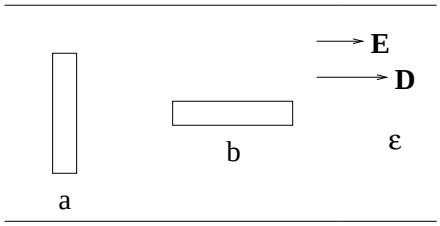
If the angle between the electric field (in an isotropic medium) and the normal to the boundary are $\alpha_1$ and $\alpha_2$ then one has

$$\frac{\tan\alpha_1}{\epsilon_1} = \frac{\tan\alpha_2}{\epsilon_2}. \tag{6.16}$$

Wir betrachten jetzt einen Hohlraum im Dielektrikum. Ist der Hohlraum sehr dünn in Richtung des Feldes (a) und in beiden dazu senkrechten Richtungen vergleichsweise sehr ausgedehnt, dann stimmt die dielektrische Verschiebung **D** im Hohlraum und im Dielektrikum überein.

We now consider a cavity in a dielectric medium. If the cavity is very thin in the direction of the field (a) and large in perpendicular direction like a pill box then the displacement **D** agrees in the medium and the cavity.

Handelt es sich dabei um einen sehr langgestreckten Hohlraum in Richtung des Feldes (b), so muss der Abfall des Potentials in dieser langgestreckten Richtung übereinstimmen, so dass im Inneren und im Äußeren des Hohlraums das elektrische Feld **E** übereinstimmt.




If on the other hand the cavity has the shape of a slot very long in the direction of the field (b), then the variation of the potential along this direction has to agree, so that inside and outside the cavity **E** coincides.

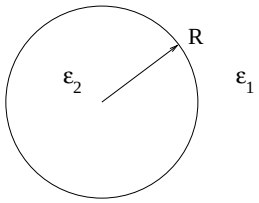
Daneben treten vor allem an den Rändern auch Streufelder auf. Es ist für Ellipsoide möglich, das Feld im Innern eines Hohlraums exakt zu berechnen. Siehe zum Beispiel im Buch von Becker und Sauter. Das Feld im Inneren des Ellipsoids ist homogen. Für die Kugel führen wir die Berechnung anschließend durch.

At the edges of the cavities will be scattered fields. It is possible to calculate the field exactly for ellipsoidal cavities. See for example the book by Becker and Sauter. The field is homogeneous inside the ellipsoid. The calculation for a sphere is given below.

## 6.c Dielektrische Kugel im homogenen elektrischen Feld

## 6.c Dielectric Sphere in a Homogeneous Electric Field

Wir betrachten eine dielektrische Kugel mit Radius $R$ und Dielektrizitätskonstante $\epsilon_2$, die in ein anderes Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante $\epsilon_1$ eingebettet ist. Im Dielektrikum 1 herrsche in sehr großer Entfernung ein homogenes Feld




We consider a dielectric sphere with radius $R$ and dielectric constant $\epsilon_2$ inside a medium with dielectric constant $\epsilon_1$. The electric field in the medium 1 be homogeneous at large distances

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1 = E_1\mathbf{e}_z \quad r \gg R. \tag{6.17}$$

Daraus folgt das Potential

Thus one obtains for the potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{r} = -E_1 r\cos\theta \quad r \gg R. \tag{6.18}$$

Da $\cos\theta$ das Legendre-Polynom $P_1(\cos\theta)$ ist, führt der Ansatz

Since $\cos\theta$ is the Legendre-polynomial $P_1(\cos\theta)$, the ansatz

$$\Phi(\mathbf{r}) = f(r)\cos\theta \tag{6.19}$$

zum Erfolg. Die Lösung der homogenen Poisson-Gleichung $\triangle(f(r)\cos\theta) = 0$ ist eine Linearkombination (5.34) aus $f(r) = r$ (homogenes Feld) und $f(r) = 1/r^2$ (Dipolfeld). Da am Ursprung kein makroskopischer Dipol sitzt, können wir ansetzen

is successful. The solution of the homogeneous Poisson equation $\triangle(f(r)\cos\theta) = 0$ is a linear combination (5.34) of $f(r) = r$ (homogeneous field) and $f(r) = 1/r^2$ (dipolar field). Since there is no dipole at the origin we may assume

$$\Phi(\mathbf{r}) = \cos\theta \cdot \begin{cases} -E_2 r & r \le R \\ -E_1 r + p/r^2 & r \ge R \end{cases} . \tag{6.20}$$

An der Grenzfläche gilt $\Phi(R+0) = \Phi(R-0)$, was identisch ist mit $\mathbf{E}_{1,\mathrm{t}} = \mathbf{E}_{2,\mathrm{t}}$ und auf

At the boundary one has $\Phi(R+0) = \phi(R-0)$, which is identical to $\mathbf{E}_{1,\mathrm{t}} = \mathbf{E}_{2,\mathrm{t}}$ and leads to

$$-E_1 R + \frac{p}{R^2} = -E_2 R \tag{6.21}$$

führt. Die Bedingung $D_{1,\mathrm{n}} = D_{2,\mathrm{n}}$ führt mit $D_{\mathrm{n}} = -\epsilon\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ auf

. The condition $D_{1,\mathrm{n}} = D_{2,\mathrm{n}}$ together with $D_{\mathrm{n}} = -\epsilon\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ yields

$$\epsilon_1(E_1 + \frac{2p}{R^3}) = \epsilon_2 E_2. \tag{6.22}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man

From these two equations one obtains

$$E_2 = \frac{3\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} E_1 \tag{6.23}$$

$$p = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} R^3 E_1. \tag{6.24}$$

Speziell für die dielektrische Kugel ($\epsilon_2 = \epsilon$) im Vakuum ($\epsilon_1 = 1$) folgt

. One obtains in particular for the dielectric sphere ($\epsilon_2 = \epsilon$) in the vacuum ($\epsilon_1 = 1$)

$$E_2 = \frac{3}{2+\epsilon} E_1, \quad p = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} R^3 E_1. \tag{6.25}$$

Die Polarisation im Inneren der Kugel bewirkt eine Veränderung des mittleren elektrischen Felds um

The polarization inside the sphere changes the average field by

$$\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \frac{1-\epsilon}{2+\epsilon} E_1 \mathbf{e}_{\mathrm{z}} = -\frac{4\pi}{3}\mathbf{P}. \tag{6.26}$$

Für eine Hohlkugel ($\epsilon_2 = 1$) im Dielektrikum ($\epsilon_1 = \epsilon$) erhält man dagegen

However, for a spherical cavity ($\epsilon_2 = 1$) in a dielectric medium ($\epsilon_1 = \epsilon$) one obtains

$$E_2 = \frac{3\epsilon}{1+2\epsilon} E_1. \tag{6.27}$$

## 6.d Dielektrizitätskonstante nach Clausius und Mosotti

Clausius und Mosotti leiten die Dielektrizitätskonstante aus der Polarisierbarkeit $\alpha$ der Moleküle (Atome) wie folgt her: Im Feld $\mathbf{E}_{\mathrm{eff}}$ ist das mittlere Dipolmoment

## 6.d Dielectric Constant according to Clausius and Mosotti

Clausius and Mosotti derive the dielectric constant from the polarizability $\alpha$ of molecules (atoms) as follows: The average dipole moment in the field $\mathbf{E}_{\mathrm{eff}}$ is

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_{\mathrm{eff}}. \tag{6.28}$$

Bei einer Dichte der Dipole (Atome) $n$ ergibt sich die Polarisation

The density $n$ of the dipoles (atoms) yields the polarization

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p} = n\alpha\mathbf{E}_{\mathrm{eff}}. \tag{6.29}$$

Wir müssen daher das effektive Feld $\mathbf{E}_{\mathrm{eff}}$ bestimmen, das auf den Dipol wirkt.

Therefore we have to determine the effective field $\mathbf{E}_{\mathrm{eff}}$, which acts on the dipole.

Dazu schneiden wir eine Kugel vom Radius $R$ aus der Materie um den Dipol heraus. Diese Dipole erzeugen, wie wir am Beispiel der dielektrischen Kugel im Vakuum aus (6.26) sehen, ein mittleres Feld

For this purpose we cut a sphere of radius $R$ out of the matter around the dipole. These dipoles generate, as we have seen in the example of the dielectric sphere in the vacuum (6.26) an average field

$$\bar{\mathbf{E}}_{\mathrm{P}} = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = -\frac{4\pi}{3}\mathbf{P}. \tag{6.30}$$

Dieses Feld fehlt nach dem Herausschneiden der Kugel. Dafür ist das schnell veränderliche Feld der einzelnen Dipole innerhalb der Kugel zu addieren (mit Ausnahme des Dipols, an dessen Stelle das Feld bestimmt werden soll)

This field is missing after we have cut out the sphere. Instead the rapidly varying field of the dipoles inside the sphere has to be added (with the exception of the field of the dipole at the location, where the field has to be determined)

$$\mathbf{E}_{\mathrm{eff}} = \mathbf{E} - \bar{\mathbf{E}}_{\mathrm{P}} + \sum_i \frac{-\mathbf{p}_i r_i^2 + 3(\mathbf{p}_i\mathbf{r}_i)\mathbf{r}_i}{r_i^5}. \tag{6.31}$$

Die Summe hängt von der Anordnung der Dipole (Kristallstruktur) ab. Falls die Dipole auf einem kubischen Gitter sitzen, verschwindet die Summe, denn die Beiträge aus

The sum depends on the location of the dipoles (crystall structure). If the dipoles are located on a cubic lattice, then the sum vanishes, since the contributions from

$$\sum_{\alpha,\beta} \mathbf{e}_\alpha p_\beta \sum_i \frac{-\delta_{\alpha,\beta} r_i^2 + 3x_{i,\alpha}x_{i,\beta}}{r_i^5} \tag{6.32}$$

heben sich für $\alpha \neq \beta$ weg, wenn man die Beiträge jeweils für $x_\alpha$ und $-x_\alpha$ zusammenfasst, die für $\alpha = \beta$, wenn man die drei Beiträge, die man durch zyklisches Permutieren der drei Komponenten erhält, zusammenfasst. Damit bleibt für ein kubisches Gitter

cancel for $\alpha \neq \beta$, if one adds the contributions for $x_\alpha$ and $-x_\alpha$, those for $\alpha = \beta$, if one adds the three contributions obtained by cyclic permutation of the three components. Thus one obtains for the cubic lattice

$$\chi_{\mathrm{e}}\mathbf{E} = \mathbf{P} = n\alpha\mathbf{E}_{\mathrm{eff}} = n\alpha(\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P}) = n\alpha(1 + \frac{4\pi}{3}\chi_{\mathrm{e}})\mathbf{E}, \tag{6.33}$$

woraus

from which one obtains

$$\chi_{\mathrm{e}} = \frac{n\alpha}{1 - \frac{4\pi n\alpha}{3}} \quad \text{oder or} \quad \frac{4\pi}{3}n\alpha = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \tag{6.34}$$

folgt.

.

# 7 Elektrizität auf Leitern

## 7.a Elektrische Leiter

Innerhalb eines Leiters ist das elektrische Feld $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, da ein von Null verschiedenes Feld sofort die Ladungen verschieben würde. Das Potential ist daher in jedem Leiter konstant. Für den Leiter $\#i$ gilt daher $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_i$.

Außerhalb der Leiter ist der Potentialverlauf durch die Poisson-Gleichung gegeben

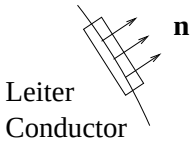
$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}) \quad \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{or}\end{matrix} \quad \operatorname{div}(\epsilon(\mathbf{r})\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r})) = -4\pi\rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}). \tag{7.1}$$

### 7.a.$\alpha$ Randbedingungen an der Leiteroberfläche

An der Leiteroberfläche hat man ein konstantes Potential (auch auf der Seite des Dielektrikums). Daher verschwinden die Komponenten von $\mathbf{E}$ tangential zur Oberfläche

$$\mathbf{E}_{\mathrm{t}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \tag{7.2}$$

Auf der Leiteroberfläche befinden sich in der Regel Influenzladungen. Wir bezeichnen die Oberflächenladungsdichte mit $\sigma(\mathbf{r})$.




Bei Integration über ein Stück der Oberfläche folgt dann

$$\int d\mathbf{f}\cdot\mathbf{E}_{\mathrm{a}}(\mathbf{r}) = 4\pi q = 4\pi\int df\,\sigma(\mathbf{r}). \tag{7.3}$$

Daher gilt für die Feldstärke $\mathbf{E}_{\mathrm{a}}$ an der Oberfläche im Außenraum

$$\mathbf{E}_{\mathrm{a}}(\mathbf{r}) = 4\pi\sigma(\mathbf{r})\mathbf{n}, \quad -\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 4\pi\sigma(\mathbf{r}). \tag{7.4}$$

Im allgemeinen wird sich die Ladungsdichte $\sigma$ an der Oberfläche zusammensetzen aus der freibeweglichen $\sigma_{\mathrm{f}}$ auf der Leiteroberfläche und der Polarisationsladungsdichte $\sigma_{\mathrm{P}}$ auf dem Dielektrikum $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}) + \sigma_{\mathrm{P}}(\mathbf{r})$ mit

$$\mathbf{D}_{\mathrm{a}}(\mathbf{r}) = 4\pi\sigma_{\mathrm{f}}(\mathbf{r})\mathbf{n}, \tag{7.5}$$

woraus dann mit $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$

$$\sigma_{\mathrm{f}} = \epsilon(\sigma_{\mathrm{f}} + \sigma_{\mathrm{P}}), \quad \sigma_{\mathrm{P}} = (\frac{1}{\epsilon} - 1)\sigma_{\mathrm{f}} \tag{7.6}$$

folgt.

# 7 Electricity on Conductors

## 7.a Electric Conductors

The electric field vanishes within a conductor, $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, since a nonvanishing field would move the charges. Thus the potential within a conductor is constant. For the conductor $\#i$ one has $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_i$.

Outside the conductor the potential is given by Poisson's equation

### 7.a.$\alpha$ Boundary Conditions at the Surface of the Conductor

On the surface of the conductor one has a constant potential (on the side of the dielectric medium, too). Thus the components of $\mathbf{E}$ tangential to the surface vanish

In general there are charges at the surface of the conductor. We denote its density by $\sigma(\mathbf{r})$.

Integration over a small piece of the surface yields

Therefore the field $\mathbf{E}_{\mathrm{a}}$ obeys at the surface in the outside region

In general the charge density $\sigma$ at the surface consists of the free charge density $\sigma_{\mathrm{f}}$ at the surface of the conductor and the polarization charge density $\sigma_{\mathrm{P}}$ on the dielectric medium $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}) + \sigma_{\mathrm{P}}(\mathbf{r})$ with

from which one obtains

.

### 7.a.$\beta$ Kraft auf Leiter (im Vakuum)

Zunächst könnte man vermuten, die Kraft sei gegeben durch $\int df \mathbf{E}_\mathrm{a}\sigma(\mathbf{r})$. Dies ist aber falsch. Denn genau so könnte man argumentieren, man müsse das Feld im Leiter $\mathbf{E}_\mathrm{i} = \mathbf{0}$ einsetzen. Die Wahrheit liegt in der Mitte. Dies erkennt man, wenn man davon ausgeht, dass die Ladung nicht exakt auf der Oberfläche sitzt, sondern über eine Schichtdicke $l$ verschmiert ist. Nehmen wir an innerhalb einer Schicht der Dicke $a$ befindet sich die Ladung $s(a)\sigma(\mathbf{r})df$ mit $s(0) = 0$ und $s(l) = 1$, dann wirkt in der Tiefe $a$ die Feldstärke $\mathbf{E}_\mathrm{i}(\mathbf{r}-a\mathbf{n}) = (1-s(a))\mathbf{E}_\mathrm{a}(\mathbf{r})$, da der Bruchteil $s(a)$ bereits abgeschirmt ist. Mit $\rho(\mathbf{r}-a\mathbf{n}) = s'(a)\sigma(\mathbf{r})$ folgt dann

$$\mathbf{K} = \int df\, da \rho(\mathbf{r}-a\mathbf{n})\mathbf{E}(\mathbf{r}-a\mathbf{n}) = \int df \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}_\mathrm{a}(\mathbf{r}) \int_0^l da s'(a)(1-s(a)). \tag{7.7}$$

Das Integral über $a$ ergibt $(s(a) - s^2(a)/2)|_0^l = 1/2$, so dass wir schließlich die Kraft

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2}\int df \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}_\mathrm{a}(\mathbf{r}) \tag{7.8}$$

erhalten.

### 7.a.$\beta$ Force acting on the Conductor (in Vacuo)

Initially one might guess, that the force on the conductor is given by $\int df \mathbf{E}_\mathrm{a}\sigma(\mathbf{r})$. This, however, is wrong. By the same token one could argue, that one has to insert the field inside the conductor $\mathbf{E}_\mathrm{i} = \mathbf{0}$ into the integral. The truth lies halfway. This becomes clear, if one assumes, that the charge is not exactly at the surface but smeared out over a layer of thickness $l$. If we assume that inside a layer of thickness $a$ one has the charge $s(a)\sigma(\mathbf{r})df$ with $s(0) = 0$ and $s(l) = 1$, then the field acting at depth $a$ is $\mathbf{E}_\mathrm{i}(\mathbf{r} - a\mathbf{n}) = (1 - s(a))\mathbf{E}_\mathrm{a}(\mathbf{r})$, since the fraction $s(a)$ is already screened. With $\rho(\mathbf{r} - a\mathbf{n}) = s'(a)\sigma(\mathbf{r})$ one obtains

The integral over $a$ yields $(s(a) - s^2(a)/2)|_0^l = 1/2$, so that finally we obtain the force

.

## 7.b Kapazitäten

Wir betrachten jetzt mehrere Leiter eingebettet in das Vakuum oder in Dielektrika. Außerhalb der Leiter seien keine freibeweglichen Ladungsdichten, $\rho_\mathrm{f} = 0$. Die elektrischen Potentiale $\Phi_i$ der Leiter $\#i$ seien vorgegeben. Gesucht sind die freibeweglichen Ladungen $q_i$ auf den Leitern. Da die Maxwell-Gleichungen linear sind (und wir annehmen, dass lineare Beziehungen $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ bestehen), können wir das Potential als Superposition von Lösungen $\Psi_i$ schreiben

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_i \Phi_i \Psi_i(\mathbf{r}). \tag{7.9}$$

Dabei ist $\Psi_i$ die Lösung, die auf dem Leiter $\#i$ den Wert 1, auf den anderen den Wert 0 annimmt

$$\Psi_i(\mathbf{r}) = \delta_{i,j} \quad \mathbf{r} \in \begin{matrix}\text{Leiter} \\ \text{conductor}\end{matrix} j. \tag{7.10}$$

Die Ladung auf dem Leiter $\#i$ ist dann gegeben durch

$$q_i = -\frac{1}{4\pi}\int_{F_i} df \epsilon \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_\mathrm{a} = \sum_j C_{i,j}\Phi_j \tag{7.11}$$

## 7.b Capacities

We now consider several conductors imbedded in the vacuum or in dielectric media. Outside the conductors there should be no free moving charge densities, $\rho_\mathrm{f} = 0$. The electric potentials $\Phi_i$ of the conductors $\#i$ should be given. We look for the free charges $q_i$ at the conductors. Since Maxwell's equations are linear (and we assume, that there is a linear relation $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$) we may write the potential as a superposition of solutions $\Psi_i$

$\Psi_i$ is the solution which assumes the value 1 at the conductor $\#i$, and 0 at all others

The charge on conductor $\#i$ is then given by

mit den Kapazitätskoeffizienten

with the capacity coefficients

$$C_{i,j} = -\frac{1}{4\pi} \int_{F_i} df\, \epsilon\, \frac{\partial \Psi_j}{\partial n}\bigg|_{\mathrm{a}} . \tag{7.12}$$

Im Gaußschen Maßsystem hat die Kapazität die Dimension Ladung/Spannung = Länge. Die Umrechnung in das SI-System geschieht mit dem Faktor $4\pi\epsilon_0$, so dass 1 cm $\hat{=}$ $1/9 \cdot 10^{-11}$ As/V = 10/9 pF (Picofarad).

The capacity has the dimension charge/(electric potential), which in Gaussian units is a length. The conversion into the SI-system is by the factor $4\pi\epsilon_0$, so that 1 cm $\hat{=}$ $1/9 \cdot 10^{-11}$ As/V = 10/9 pF (picofarad).

Die elektrostatische Energie ergibt sich aus

The electrostatic energy is obtained from

$$dU = \sum_i \Phi_i dq_i = \sum_{i,j} \Phi_i C_{i,j} d\Phi_j, \tag{7.13}$$

das heißt

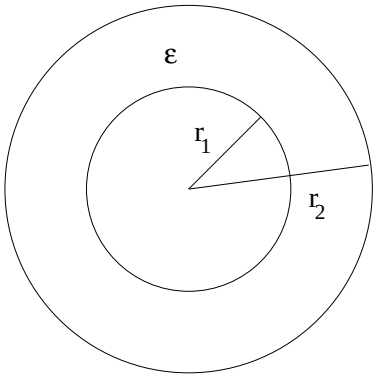
that is

$$\frac{\partial U}{\partial \Phi_j} = \sum_i C_{i,j} \Phi_i, \tag{7.14}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j} = C_{i,j} = \frac{\partial^2 U}{\partial \Phi_j \partial \Phi_i} = C_{j,i}, \tag{7.15}$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{i,j} \Phi_i \Phi_j = \frac{1}{2} \sum_i \Phi_i q_i \tag{7.16}$$

Als Beispiel betrachten wir den Kugelkondensator. Zwei konzentrische leitende Kugeln mit Radien $r_1$, $r_2$, wobei $r_1 < r_2$, seien mit den Ladungen $q_1$ und $q_2$ belegt. Der Außenraum sei Vakuum. Zwischen den beiden Kugeln sei ein Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante $\epsilon$. Im Außenraum gilt dann




As an example we consider a spherical capacitor. Two concentric conducting spheres with radii $r_1$, $r_2$ with $r_1 < r_2$ carry the charges $q_1$ and $q_2$, resp. Outside be vacuum. Between the two spheres is a medium with dielectric constant $\epsilon$. Then outside the spheres one has

$$\Phi(r) = \frac{q_1 + q_2}{r} \quad r \geq r_2. \tag{7.17}$$

Im Raum zwischen den beiden Kugeln hat man einen Abfall des Potentials der Form $q_1/(\epsilon r)$. Da das Potential bei $r = r_2$ stetig sein muss, folgt

The potential decays in the space between the two spheres like $q_1/(\epsilon r)$. Since the potential is continuous at $r = r_2$, it follows that

$$\Phi(r) = \frac{q_1}{\epsilon r} - \frac{q_1}{\epsilon r_2} + \frac{q_1 + q_2}{r_2} \quad r_1 \leq r \leq r_2. \tag{7.18}$$

In der kleineren Kugel ist das Potential konstant.

Inside the smaller sphere the potential is constant.

$$\Phi(r) = \frac{q_1}{\epsilon r_1} - \frac{q_1}{\epsilon r_2} + \frac{q_1 + q_2}{r_2} \quad r \leq r_1. \tag{7.19}$$

Daraus errechnen sich dann die Ladungen als Funktion der Potentiale $\Phi_i = \Phi(r_i)$

From this one calculates the charges as a function of the potentials $\Phi_i = \Phi(r_i)$

$$q_1 = \frac{\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1} (\Phi_1 - \Phi_2) \tag{7.20}$$

$$q_2 = \frac{\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1} (\Phi_2 - \Phi_1) + r_2 \Phi_2, \tag{7.21}$$

aus denen man die Kapazitätskoeffizienten unmittelbar ablesen kann. Falls das System neutral ist $q = q_1 = -q_2$, kann man $q$ durch die Potentialdifferenz ausdrücken

from which the capacitor coefficients can be read off immediately. If the system is neutral, $q = q_1 = -q_2$, then $q$ can be expressed by the difference of the potential

$$q = C(\Phi_1 - \Phi_2) \tag{7.22}$$

und bezeichnet $C$ als die Kapazität. Für den Kugelkondensator finden wir $\Phi_2 = 0$ und $\Phi_1 = \frac{q_1}{\epsilon}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$, woraus die Kapazität

and one calls $C$ the capacity. For the spherical capacitor one obtains $\Phi_2 = 0$ and $\Phi_1 = \frac{q_1}{\epsilon}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$, from which the capacity

$$C = \frac{\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1} \tag{7.23}$$

folgt.

is obtained.

Für eine einzelne Kugel können wir $r_2$ gegen $\infty$ gehen lassen und finden $C = \epsilon r_1$.

For a single sphere $r_2$ can go to $\infty$ and one finds $C = \epsilon r_1$.

Den Plattenkondensator mit Plattenabstand $d$ erhalten wir, indem wir $r_2 = r_1 + d$ setzen und dann großes $r_1$ betrachten. Wir finden

We obtain the plate capacitor with a distance $d$ between the plates, by putting $r_2 = r_1 + d$ in the limit of large $r_1$

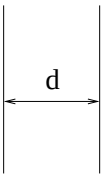
$$C = \frac{(r_1^2 + r_1 d)\epsilon}{d} = \frac{4\pi r_1^2 \epsilon}{d}(\frac{1}{4\pi} + \frac{d}{4\pi r_1}), \tag{7.24}$$

was für große $r_1$ gegen $\frac{\epsilon F}{4\pi d}$ mit der Fläche $F$ geht. Daher erhält man für den Plattenkondensator

which approaches $\frac{\epsilon F}{4\pi d}$ for large $r_1$ with the area $F$. Therefore one obtains for the plate capacitor

$$C = \frac{\epsilon F}{4\pi d}. \tag{7.25}$$

Eine andere Überlegung ist die Folgende: Die Ladung $q$ erzeugt einen Fluss $DF = 4\pi q$. Daher ist die Potentialdifferenz zwischen den beiden Platten $\Phi = \frac{D}{\epsilon} d = \frac{4\pi d}{\epsilon F} q$, woraus $C = q/\phi = \frac{\epsilon F}{4\pi d}$ folgt. Man beachte, dass wir hier mit $q$ die freibewegliche Ladung bezeichnet haben.




A different consideration is the following: The charge $q$ generates the flux $DF = 4\pi q$. Therefore the potential difference between the two plates is $\Phi = \frac{D}{\epsilon} d = \frac{4\pi d}{\epsilon F} q$, from which $C = q/\phi = \frac{\epsilon F}{4\pi d}$ follows. Be aware, that here we have denoted the free charge by $q$.

## 7.c Influenzladungen

Halten wir die Potentiale der Leiter auf 0, $\Phi_i = 0$ und haben wir eine freibewegliche Ladung $q'$ am Ort $\mathbf{r}'$, so beschreiben wir das Potential

## 7.c Influence Charges

If we fix the potentials of all conductors to 0, $\Phi_i = 0$ in the presence of a free charge $q'$ at $\mathbf{r}'$, then we write the potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')q' \tag{7.26}$$

mit der Greenschen Funktion $G$. Offensichtlich genügt diese der Gleichung

with the Green's function $G$. Apparently this function obeys the equation

$$\nabla(\epsilon(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{7.27}$$

für $\mathbf{r}$ außerhalb der Leiter. Für $\mathbf{r}$ auf den Leiteroberflächen ist $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$. Für eine Ladungsverteilung $\rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}')$ außerhalb der Leiter gilt dann nach dem Superpositionsprinzip

for $\mathbf{r}$ outside the conductor. For $\mathbf{r}$ at the surface of the conductors we have $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$. The superposition principle yields for a charge density $\rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}')$ located outside the conductors

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}') + \sum_i \Phi_i \Psi_i(\mathbf{r}), \tag{7.28}$$

wobei wir jetzt angenommen haben, dass die Leiter auf den Potentialen $\Phi_i$ liegen.

Wir zeigen nun, dass die Greensche Funktion symmetrisch ist, $G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G(\mathbf{r}',\mathbf{r})$. Zum Beweis gehen wir aus vom Integral über die Leiteroberflächen

where now we have assumed that the conductors have the potential $\Phi_i$.

We now show, that the Green's function is symmetric, $G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G(\mathbf{r}',\mathbf{r})$. In order to show this we start from the integral over the surfaces of the conductors

$$\int d\mathbf{f}'' \cdot \{G(\mathbf{r}'',\mathbf{r})\epsilon(\mathbf{r}'')\nabla''G(\mathbf{r}'',\mathbf{r}') - \epsilon(\mathbf{r}'')[\nabla''G(\mathbf{r}'',\mathbf{r})]G(\mathbf{r}'',\mathbf{r}')\} = 0, \tag{7.29}$$

da $G$ auf den Leiteroberflächen verschwindet. Das Flächenelement $d\mathbf{f}''$ weise in die Leiter. Wir erstrecken das Integral auch über eine Kugel vom Radius $R$, die alle Leiter einschließt. Wegen $G \sim 1/R$ und $\nabla''G \sim 1/R^2$ verschwindet das Oberflächenintegral für $R \to \infty$. Die Anwendung des Gaußschen Satzes liefert

since $G$ vanishes at the surface of the conductors. The area element $d\mathbf{f}''$ is directed into the conductors. We perform the integral also over a sphere of radius $R$, which includes all conductors. Since $G \sim 1/R$ and since $\nabla''G \sim 1/R^2$ the surface integral vanishes for $R \to \infty$. Application of the divergence theorem yields

$$\int d^3r''\{G(\mathbf{r}'',\mathbf{r})\nabla''[\epsilon(\mathbf{r}'')\nabla''G(\mathbf{r}'',\mathbf{r}')] - \nabla''[\epsilon(\mathbf{r}'')\nabla''G(\mathbf{r}'',\mathbf{r})]G(\mathbf{r}'',\mathbf{r}')\} \tag{7.30}$$

$$= -4\pi \int d^3r''\{G(\mathbf{r}'',\mathbf{r})\delta^3(\mathbf{r}''-\mathbf{r}') - \delta^3(\mathbf{r}''-\mathbf{r})G(\mathbf{r}'',\mathbf{r}')\} \tag{7.31}$$

$$= -4\pi(G(\mathbf{r}',\mathbf{r}) - G(\mathbf{r},\mathbf{r}')) = 0. \tag{7.32}$$

Wir betrachten nun einige Beispiele:

We consider now a few examples:

### 7.c.$\alpha$ Leiterfreier Raum

Im leiterfreien Raum mit konstanter Dielektrizitätskonstante $\epsilon$ gilt

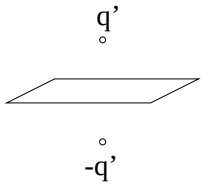
### 7.c.$\alpha$ Space free of Conductors

In a space with constant dielectric constant $\epsilon$ and without conductors one has

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{\epsilon|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{7.33}$$

### 7.c.$\beta$ Leitende Ebene

Für eine leitende Ebene $z = 0$ ($\epsilon = 1$) löst man das Problem durch eine Spiegelladung. Befindet sich die gegebene Ladung $q'$ am Ort $\mathbf{r}' = (x',y',z')$, so denke man sich eine zweite Ladung $-q'$ am Ort $\mathbf{r}'' = (x',y',-z')$. Diese kompensiert gerade das Potential an der Leiteroberfläche. Es folgt




### 7.c.$\beta$ Conducting Plane

For a conducting plane $z = 0$ ($\epsilon = 1$) one solves the problem by mirror charges. If the given charge $q'$ is located at $\mathbf{r}' = (x',y',z')$, then one should imagine a second charge $-q'$ at $\mathbf{r}'' = (x',y',-z')$. This mirror charge compensates the potential at the surface of the conductor. One obtains

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} & \begin{matrix}\text{für}\\ \text{for}\end{matrix} \ \operatorname{sign} z = \operatorname{sign} z' \\ 0 & \begin{matrix}\text{für}\\ \text{for}\end{matrix} \ \operatorname{sign} z = -\operatorname{sign} z'. \end{cases} \tag{7.34}$$

Als nächstes betrachten wir die Kraft, die auf die Ladung $q'$ wirkt. Das Potential ist $\Phi(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r},\mathbf{r}')q'$. Dabei ist der Anteil $q'/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ das Potential von $q'$ selbst, das auf $q'$ keine Kraft ausübt. Der zweite Beitrag $-q'/|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|$ rührt dagegen von den Influenz-Ladungen auf der Metallebene her und bewirkt die Kraft

Next we consider the force which acts on the charge $q'$. The potential is $\Phi(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r},\mathbf{r}')q'$. The contribution $q'/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ is the potential of $q'$ itself, that does not exert a force on $q'$ . The second contribution $-q'/|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|$ comes, however, from the influence charges on the metal surface and exerts the force

$$\mathbf{K} = -q' \operatorname{grad} \frac{-q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} = -\frac{q'^2 \mathbf{e}_z}{4z'^2} \operatorname{sign} z'. \tag{7.35}$$

Weiter bestimmen wir die Influenz-Ladung auf der Platte. Bei $z = 0$ haben wir $4\pi \operatorname{sign} z' \mathbf{e}_z \sigma(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) = q' \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} - q' \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|^3}$. Daraus ergibt sich die Oberflächenladungsdichte

Further one determines the influence charge on the plate. At $z = 0$ one has $4\pi \operatorname{sign} z' \mathbf{e}_z \sigma(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) = q' \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} - q' \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|^3}$. From this one obtains the density of the surface charge

$$\sigma(\mathbf{r}) = -\frac{q'}{2\pi} \frac{|z'|}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2}^3} \tag{7.36}$$

Mit $df = \pi d(x^2 + y^2)$ folgt dann

With $df = \pi d(x^2 + y^2)$ one obtains

$$\int df \sigma(\mathbf{r}) = -\frac{q'|z'|}{2} \int_{z'^2}^{\infty} \frac{d(x^2 + y^2 + z'^2)}{(x^2 + y^2 + z'^2)^{3/2}} = -q'. \tag{7.37}$$

Die Kraft auf die Platte errechnet sich zu

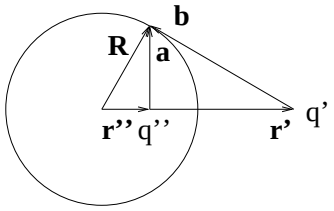
The force acting on the plate is obtained as

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \int df \mathbf{E}(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r}) = \frac{q'^2 z' |z'|}{2} \mathbf{e}_z \int \frac{d(x^2 + y^2 + z'^2)}{(x^2 + y^2 + z'^2)^3} = \frac{q'^2 \mathbf{e}_z}{4z'^2} \operatorname{sign} z'. \tag{7.38}$$

### 7.c.$\gamma$ Leitende Kugel

### 7.c.$\gamma$ Conducting Sphere

Wir betrachten eine Ladung $q'$ am Ort $\mathbf{r}'$ in Gegenwart einer leitenden Kugel mit Radius $R$ und Mittelpunkt im Ursprung. Es gibt dann einen Vektor $\mathbf{r}''$, so dass das Verhältnis der Abstände von allen Punkten $\mathbf{R}$ der Kugeloberfläche von $\mathbf{r}'$ und $\mathbf{r}''$ konstant ist. Es sei




We consider a charge $q'$ located at $\mathbf{r}'$ in the presence of a conducting sphere with radius $R$ and center in the origin. Then there is a vector $\mathbf{r}''$, so that the ratio of the distances of all points $\mathbf{R}$ on the surface of the sphere from $\mathbf{r}'$ and $\mathbf{r}''$ is constant. Be

$$a^2 := (\mathbf{R} - \mathbf{r}'')^2 = R^2 + r''^2 - 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'' \tag{7.39}$$

$$b^2 := (\mathbf{R} - \mathbf{r}')^2 = R^2 + r'^2 - 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}' \tag{7.40}$$

Diese Konstanz des Verhältnisses der Abstände ist erfüllt für $\mathbf{r}' \parallel \mathbf{r}''$ und

This constant ratio of the distances is fulfilled for $\mathbf{r} \parallel \mathbf{r}''$ and

$$\frac{R^2 + r''^2}{R^2 + r'^2} = \frac{r''}{r'}. \tag{7.41}$$

Dann gilt

Then one has

$$R^2 = r'r'' \quad \mathbf{r}'' = \frac{R^2}{r'^2} \mathbf{r}' \tag{7.42}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{r''}{r'} = \frac{R^2}{r'^2} = \frac{r''^2}{R^2}. \tag{7.43}$$

Man findet damit ein konstantes Potential auf der Kugel mit der Ladung $q'$ am Ort $\mathbf{r}'$ und der Ladung $q'' = -q'R/r'$ am Ort $r''$

Thus one obtains a constant potential on the sphere with the charge $q'$ at $\mathbf{r}'$ and the charge $q'' = -q'R/r'$ at $r''$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{R/r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} & \text{für / for } \operatorname{sign}(r - R) = \operatorname{sign}(r' - R), \\ 0 & \text{sonst / otherwise} \end{cases} \tag{7.44}$$

Mit diesem $G$ verschwindet das Potential auf der Kugel. Für $r' > R$ trägt sie die Ladung $q''$ und für $r' < R$ die Ladung $-q'$. Daher muss man für eine neutrale Kugel zum Potential $\Phi$ noch den Beitrag hinzufügen, der von einer gleichmäßig auf der Kugel verteilten Ladung $-q''$ beziehungsweise $q'$ herrührt.

The potential on the sphere vanishes with this Green's function $G$. For $r' > R$ it carries the charge $q''$ and for $r' < R$ the charge $-q'$. Thus if the total charge on the sphere vanishes one has to add a potential $\Phi$, which corresponds to a homogeneously distributed charge $-q''$ and $q'$, resp.

# 8 Energie, Kräfte und Spannungen im Dielektrikum

## 8.a Elektrostatische Energie

Bei Verschiebung der Ladungsdichten $\delta\rho = \delta\rho_{\rm f} + \delta\rho_{\rm P}$ wird die elektrostatische Energie

$$\delta U = \int d^3r \delta\rho_{\rm f}\Phi + \int d^3r\delta\rho_{\rm P}\Phi \tag{8.1}$$

zugeführt. Gleichzeitig sind in der Materie zusätzliche innere Potentiale $\Phi_{\rm i}$ vorhanden, so dass die Polarisation im Gleichgewicht ist, das heißt

$$\delta U = \int d^3r\delta\rho_{\rm f}\Phi + \int d^3r\delta\rho_{\rm P}(\Phi + \Phi_{\rm i}). \tag{8.2}$$

Diese Potentiale müssen so beschaffen sein, dass $\delta U = 0$ für eine Variation der Polarisation gilt, damit die Polarisationen im Gleichgewicht sind

$$\Phi + \Phi_{\rm i} = 0. \tag{8.3}$$

Diese Überlegungen gelten bei adiabatisch geführten Prozessen und unter der Bedingung, dass keine mechanische Energie zugeführt wird. Die Materie muss sich also in einem kräftefreien Zustand (Gleichgewicht $\mathbf{k} = \mathbf{0}$) befinden oder sie muss festgehalten werden. Damit folgt mit (B.62)

$$\delta U = \int d^3r\,\delta\rho_{\rm f}\,\Phi = \frac{1}{4\pi}\int d^3r\,\mathrm{div}\,\delta\mathbf{D}\,\Phi = -\frac{1}{4\pi}\int d^3r\delta\mathbf{D}\cdot\,\mathrm{grad}\,\Phi = \frac{1}{4\pi}\int d^3r\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}, \tag{8.4}$$

ähnlich zum materiefreien Fall (3.25). Damit gilt für die Energiedichte bei fester Massendichte $\rho_{\rm m}$ (wir nehmen hier an, dass außer dem elektrischen Feld nur die Massendichte die Energiedichte festlegt; tatsächlich wird im Allgemeinen der Verzerrungszustand wesentlich sein)

$$du = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{D}. \tag{8.5}$$

Falls $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, so folgt

$$u = u_0(\rho_{\rm m}) + \frac{1}{4\pi}\int \epsilon(\rho_{\rm m})\mathbf{E}\cdot d\mathbf{E} = u_0(\rho_{\rm m}) + \frac{1}{8\pi}\epsilon(\rho_{\rm m})E^2 = u_0(\rho_{\rm m}) + \frac{D^2}{8\pi\epsilon(\rho_{\rm m})}, \tag{8.6}$$

da die Dielektrizitätskonstante im Allgemeinen von der Massendichte abhängt.

# 8 Energy, Forces and Stress in Dielectric Media

## 8.a Electrostatic Energy

By displacing the charge densities $\delta\rho = \delta\rho_{\rm f} + \delta\rho_{\rm P}$ the electrostatic energy

$$\delta U = \int d^3r \delta\rho_{\rm f}\Phi + \int d^3r\delta\rho_{\rm P}\Phi \tag{8.1}$$

will be added to the system. Simultaneously there are additional potentials $\Phi_{\rm i}$ in the matter guaranteeing, that the polarization is in equilibrium, i. e.

$$\delta U = \int d^3r\delta\rho_{\rm f}\Phi + \int d^3r\delta\rho_{\rm P}(\Phi + \Phi_{\rm i}). \tag{8.2}$$

These potentials are so that $\delta U = 0$ holds for a variation of the polarization, so that the polarizations are in equilibrium

$$\Phi + \Phi_{\rm i} = 0. \tag{8.3}$$

These considerations hold as long as the process is run adiabatically and under the condition, that no mechanical energy is added. Thus the matter is in a force-free state (equilibrium $\mathbf{k} = \mathbf{0}$) or it has to be under rigid constraints. Then one obtains with (B.62)

$$\delta U = \int d^3r\,\delta\rho_{\rm f}\,\Phi = \frac{1}{4\pi}\int d^3r\,\mathrm{div}\,\delta\mathbf{D}\,\Phi = -\frac{1}{4\pi}\int d^3r\delta\mathbf{D}\cdot\,\mathrm{grad}\,\Phi = \frac{1}{4\pi}\int d^3r\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}, \tag{8.4}$$

similarly to the matter-free case (3.25). Then one obtains for the density of the energy at fixed density of matter $\rho_{\rm m}$ (we assume that apart from the electric field only the density of matter determines the energy-density; in general, however, the state of distortion will be essential)

$$du = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{D}. \tag{8.5}$$

If $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, then one obtains

$$u = u_0(\rho_{\rm m}) + \frac{1}{4\pi}\int \epsilon(\rho_{\rm m})\mathbf{E}\cdot d\mathbf{E} = u_0(\rho_{\rm m}) + \frac{1}{8\pi}\epsilon(\rho_{\rm m})E^2 = u_0(\rho_{\rm m}) + \frac{D^2}{8\pi\epsilon(\rho_{\rm m})}, \tag{8.6}$$

since the dielectric constant depends in general on the density of mass.

## 8.b Kraftdichte im isotropen Dielektrikum

Wir können die Kraftdichte in einem Dielektrikum bestimmen, indem wir die Massen und freibeweglichen Ladungen von $\mathbf{r}$ nach $\mathbf{r} + \delta\mathbf{s}(\mathbf{r})$ verschieben und die Energieänderung $\delta U$ bestimmen. Die dem System dabei zugeführte Energie ist

$$\delta U = \int d^3r\, \mathbf{k}_\mathrm{a}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{s}(\mathbf{r}), \tag{8.7}$$

wobei $\mathbf{k}_\mathrm{a}$ die von außen angreifende Kraftdichte ist. Im Gleichgewicht ist die entgegenwirkende innere elektrische und mechanische Kraftdichte $\mathbf{k}$

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = -\mathbf{k}_\mathrm{a}(\mathbf{r}), \tag{8.8}$$

so dass

$$\delta U = -\int d^3r\, \mathbf{k}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{s}(\mathbf{r}) \tag{8.9}$$

gelten muss. Wir bringen nun $\delta U$ auf diese Form

$$\delta U = \int d^3r \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{D}} \cdot \delta\mathbf{D} + \left.\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}}\right|_{\mathbf{D}} \delta\rho_\mathrm{m} \right), \quad u = u(\mathbf{D}, \rho_\mathrm{m}). \tag{8.10}$$

Wegen $\partial u/\partial \mathbf{D} = \mathbf{E}/(4\pi)$ formen wir den ersten Term wie im vorhergehenden Abschnitt um in

$$\delta U = \int d^3r \left( \Phi(\mathbf{r}) \delta\rho_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + \left.\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}}\right|_{\mathbf{D}} \delta\rho_\mathrm{m} \right). \tag{8.11}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung $d\rho/dt = -\operatorname{div}\mathbf{j}$ leiten wir nun den Zusammenhang zwischen $\delta\rho$ und $\delta\mathbf{s}$ her. Man muss die Gleichung nur mit $\delta t$ multiplizieren und berücksichtigen, dass $\mathbf{j}\delta t = \rho\mathbf{v}\delta t = \rho\delta\mathbf{s}$ gilt. Mit $(d\rho/dt)\delta t = \delta\rho$ erhalten wir

$$\delta\rho = -\operatorname{div}(\rho\delta\mathbf{s}). \tag{8.12}$$

Es folgt dann

$$\begin{aligned} \delta U &= -\int d^3r \left( \Phi(\mathbf{r}) \operatorname{div}(\rho_\mathrm{f}\delta\mathbf{s}) + \frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} \operatorname{div}(\rho_\mathrm{m}\delta\mathbf{s}) \right) \\ &= \int d^3r \left( \operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r})\rho_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + \left( \operatorname{grad} \frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} \right) \rho_\mathrm{m}(\mathbf{r}) \right) \cdot \delta\mathbf{s}(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{8.13}$$

wobei beim Übergang zur letzten Zeile der Gaußsche Satz (B.62) verwendet wurde. Daraus folgt

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \rho_\mathrm{f}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) - \rho_\mathrm{m}(\mathbf{r}) \operatorname{grad}\left( \frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} \right). \tag{8.14}$$

## 8.b Force Density in Isotropic Dielectric Matter

We may determine the force density in a dielectric medium by moving the masses and free charges from $\mathbf{r}$ to $\mathbf{r} + \delta\mathbf{s}(\mathbf{r})$ and calculating the change of energy $\delta U$. The energy added to the system is

$$\delta U = \int d^3r\, \mathbf{k}_\mathrm{a}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{s}(\mathbf{r}), \tag{8.7}$$

where $\mathbf{k}_\mathrm{a}$ is an external force density. The internal electric and mechanical force density $\mathbf{k}$ acting against it in equilibrium is

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = -\mathbf{k}_\mathrm{a}(\mathbf{r}), \tag{8.8}$$

so that

$$\delta U = -\int d^3r\, \mathbf{k}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{s}(\mathbf{r}) \tag{8.9}$$

holds. We bring now $\delta U$ into this form

$$\delta U = \int d^3r \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{D}} \cdot \delta\mathbf{D} + \left.\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}}\right|_{\mathbf{D}} \delta\rho_\mathrm{m} \right), \quad u = u(\mathbf{D}, \rho_\mathrm{m}). \tag{8.10}$$

Since $\partial u/\partial \mathbf{D} = \mathbf{E}/(4\pi)$ we rewrite the first term as in the previous section

$$\delta U = \int d^3r \left( \Phi(\mathbf{r}) \delta\rho_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + \left.\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}}\right|_{\mathbf{D}} \delta\rho_\mathrm{m} \right). \tag{8.11}$$

From the equation of continuity $d\rho/dt = -\operatorname{div}\mathbf{j}$ we derive the relation between $\delta\rho$ and $\delta\mathbf{s}$. The equation has to be multiplied by $\delta t$ and one has to consider, that $\mathbf{j}\delta t = \rho\mathbf{v}\delta t = \rho\delta\mathbf{s}$ holds. With $(d\rho/dt)\delta t = \delta\rho$ we obtain

$$\delta\rho = -\operatorname{div}(\rho\delta\mathbf{s}). \tag{8.12}$$

Then we obtain

$$\begin{aligned} \delta U &= -\int d^3r \left( \Phi(\mathbf{r}) \operatorname{div}(\rho_\mathrm{f}\delta\mathbf{s}) + \frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} \operatorname{div}(\rho_\mathrm{m}\delta\mathbf{s}) \right) \\ &= \int d^3r \left( \operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r})\rho_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + \left( \operatorname{grad} \frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} \right) \rho_\mathrm{m}(\mathbf{r}) \right) \cdot \delta\mathbf{s}(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{8.13}$$

where the divergence theorem (B.62) has been used by the derivation of the last line. This yields

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \rho_\mathrm{f}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) - \rho_\mathrm{m}(\mathbf{r}) \operatorname{grad}\left( \frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} \right). \tag{8.14}$$

Der erste Beitrag ist die Coulomb-Kraft auf die freien Ladungsträger. Den zweiten Beitrag formen wir noch um. Wir setzen (8.6) $u = u_0(\rho_\mathrm{m}) + D^2/(8\pi\epsilon(\rho_\mathrm{m}))$. Dann ist

The first contribution is the Coulomb-force on the free charges. The second contribution has to be rewritten. We substitute (8.6) $u = u_0(\rho_\mathrm{m}) + D^2/(8\pi\epsilon(\rho_\mathrm{m}))$. Then one has

$$\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} = \frac{du_0}{d\rho_\mathrm{m}} + \frac{1}{8\pi} D^2 \frac{d(1/\epsilon)}{d\rho_\mathrm{m}} = \frac{du_0}{d\rho_\mathrm{m}} - \frac{1}{8\pi} E^2 \frac{d\epsilon}{d\rho_\mathrm{m}}. \tag{8.15}$$

Der erste Term kann geschrieben werden

The first term can be written

$$-\rho_\mathrm{m} \operatorname{grad} \frac{du_0}{d\rho_\mathrm{m}} = -\operatorname{grad}\left(\rho_\mathrm{m} \frac{du_0}{d\rho_\mathrm{m}} - u_0\right) = -\operatorname{grad} P_0(\rho_\mathrm{m}), \tag{8.16}$$

wobei wir verwenden, dass $(du_0/d\rho_\mathrm{m}) \operatorname{grad} \rho_m = \operatorname{grad} u_0$. Hierbei ist $P_0$ der hydrostatische Druck der Flüssigkeit ohne elektrisches Feld

where we use that $(du_0/d\rho_\mathrm{m}) \operatorname{grad} \rho_m = \operatorname{grad} u_0$. Here $P_0$ is the hydrostatic pressure of the liquid without electric field

$$\mathbf{k}_{0,\mathrm{hydro}} = -\operatorname{grad} P_0(\rho_\mathrm{m}(\mathbf{r})). \tag{8.17}$$

Die auf das Volumen $V$ wirkende hydrostatische Kraft kann dann umgeformt werden in ein Oberflächenintegral

The hydrostatic force acting on the volume $V$ can be written in terms of a surface integral

$$\mathbf{K}_0 = -\int_V d^3r \operatorname{grad} P_0(\rho_\mathrm{m}(\mathbf{r})) = -\int_{\partial V} d\mathbf{f} P_0(\rho_\mathrm{m}(\mathbf{r})). \tag{8.18}$$

Dies ist eine Kraft, die auf die Oberfläche $\partial V$ mit dem Druck $P_0$ wirkt. Es bleibt noch der elektrostriktive Anteil

This is a force which acts on the surface $\partial V$ with the pressure $P_0$. There remains the electrostrictive contribution

$$\frac{1}{8\pi}\rho_\mathrm{m} \operatorname{grad}\left(E^2 \frac{d\epsilon}{d\rho_\mathrm{m}}\right) = \frac{1}{8\pi} \operatorname{grad}\left(E^2 \rho_\mathrm{m} \frac{d\epsilon}{d\rho_\mathrm{m}}\right) - \frac{1}{8\pi} E^2 \operatorname{grad}\epsilon, \tag{8.19}$$

wobei $(d\epsilon/d\rho_\mathrm{m}) \operatorname{grad}\rho_\mathrm{m} = \operatorname{grad}\epsilon$ verwendet wurde. Insgesamt ergibt sich dann die Kraftdichte zu

where $(d\epsilon/d\rho_\mathrm{m}) \operatorname{grad}\rho_\mathrm{m} = \operatorname{grad}\epsilon$ has been used. Then the total force density is

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \rho_\mathrm{f}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \operatorname{grad}\left(-P_0(\rho_\mathrm{m}) + \frac{1}{8\pi} E^2 \rho_\mathrm{m} \frac{d\epsilon}{d\rho_\mathrm{m}}\right) - \frac{1}{8\pi} E^2 \operatorname{grad}\epsilon. \tag{8.20}$$

**Anwendungen:**

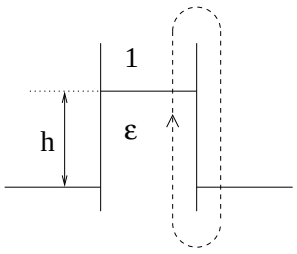
**Applications:**

**Dielektrische Flüssigkeit zwischen zwei senkrechten Kondensatorplatten**. Um welche Höhe $h$ steht die Flüssigkeit zwischen den Kondensatorplatten höher als im feldfreien Raum? Wir führen dazu das Integral über einen geschlossenen Weg zwischen den Kondensatorplatten nach oben und außerhalb nach unten

**Dielectric fluid between two vertical capacitor plates**. What is the difference $h$ in height between between the surface of a fluid between the plates of the capacitor and outside the capacitor? For this purpose we introduce the integral along a closed path which goes up between the plates of the capacitor and outside down

$$\oint \mathbf{k}\cdot d\mathbf{r} = \oint \operatorname{grad}\left(-P_0 + \frac{1}{8\pi} E^2 \rho_\mathrm{m} \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_\mathrm{m}}\right)\cdot d\mathbf{r} - \frac{1}{8\pi}\oint E^2 \operatorname{grad}\epsilon \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{8\pi} E^2(\epsilon - 1). \tag{8.21}$$

Dabei verschwindet das Integral des Gradienten über den geschlossenen Weg, während das Integral über $E^2 \operatorname{grad}\epsilon$ nur etwas an den beiden Punkten ergibt, an denen der Integrationsweg durch die Flüssigkeitsoberfläche tritt. Zusätzlich zu diesen Kräften kommt noch die Gravitationskraft. Beide müssen sich die Waage halten




The integral over the gradient along the closed path vanishes, whereas the integral of $E^2 \operatorname{grad}\epsilon$ yields a contribution at the two points where the path of integration intersects the surface. In addition there is the gravitational force. Both have to compensate each other

$$\mathbf{k} + \mathbf{k}_{\text{grav}} = \mathbf{0}, \tag{8.22}$$

also that is

$$\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}_{\text{grav}} = -\rho_{\text{m}} g h = -\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}, \tag{8.23}$$

woraus sich die Höhe from which one obtains the height

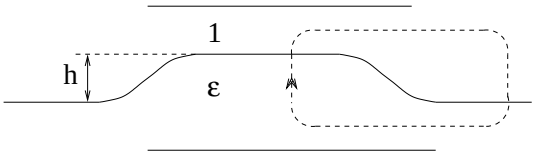
$$h = \frac{E^2(\epsilon - 1)}{8\pi \rho_{\text{m}} g} \tag{8.24}$$

ergibt. .

**Dielektrische Flüssigkeit zwischen zwei waagrechten Kondensatorplatten**

**Dielectric fluid between two horizontal capacitor plates**

Wie groß ist die Steighöhe einer dielektrischen Flüssigkeit zwischen zwei horizontalen Kondensatorplatten? Das Problem lässt sich ähnlich lösen wie zwischen zwei senkrechten Kondensatorplatten.




What is the elevation of a dielectric fluid between two horizontal capacitor plates? The problem can be solved in a similar way as between two vertical plates.

Allerdings ist es zweckmässig, die Umformung It is useful, however, to use

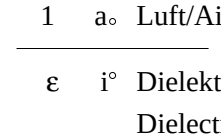
$$-\frac{1}{8\pi} E^2 \operatorname{grad} \epsilon = \frac{1}{8\pi} D^2 \operatorname{grad} \left(\frac{1}{\epsilon}\right) \tag{8.25}$$

zu verwenden. .

**Hydrostatischer Druckunterschied an einer Grenzfläche**

**Hydrostatic pressure difference at a boundary**

Durch Integration durch die Grenzfläche vom Dielektrikum zur Luft erhält man




Performing an integration through the boundary from the dielectric medium to air one obtains

$$0 = \int_{\text{i}}^{\text{a}} \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = \int \operatorname{grad} \left(-P_0 + \frac{1}{8\pi} \rho_{\text{m}} E^2 \frac{d\epsilon}{d\rho_{\text{m}}}\right) \cdot d\mathbf{r} - \frac{1}{8\pi} \int E_{\text{t}}^2 \operatorname{grad} \epsilon \cdot d\mathbf{r} + \frac{1}{8\pi} \int D_{\text{n}}^2 \operatorname{grad} \left(\frac{1}{\epsilon}\right) \cdot d\mathbf{r}. \tag{8.26}$$

Daraus folgt der hydrostatische Druckunterschied auf beiden Seiten der Grenzfläche

This yields the difference in hydrostatic pressure at both sides of the boundary

$$P_{0,\text{i}}(\rho_{\text{m}}) - P_{0,\text{a}} = \frac{1}{8\pi} \left( \rho_{\text{m}} \frac{d\epsilon}{d\rho_{\text{m}}} E^2 - (\epsilon - 1) E_{\text{t}}^2 + \left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right) D_{\text{n}}^2 \right) \tag{8.27}$$

**Druckverlauf im praktisch inkompressiblen Dielektrikum**

**Pressure in a practically incompressible dielectric medium**

Aus From

$$\mathbf{k} + \mathbf{k}_{\text{grav}} = -\operatorname{grad} (P_0(\rho_{\text{m}})) + \rho_{\text{m}} \operatorname{grad} \left(\frac{1}{8\pi} E^2 \frac{d\epsilon}{d\rho_{\text{m}}}\right) - \rho_{\text{m}} \operatorname{grad} (gz) = \mathbf{0}. \tag{8.28}$$

erhält man für annähernd konstantes $\rho_{\mathrm{m}}$

one obtains for approximately constant $\rho_{\mathrm{m}}$

$$P_0 = \rho_{\mathrm{m}}(\frac{1}{8\pi}E^2\frac{d\epsilon}{d\rho_{\mathrm{m}}} - gz) + \text{const.} \tag{8.29}$$

## 8.c Maxwellscher Spannungstensor

## 8.c Maxwell's Stress Tensor

Wir wollen nun die Kraftdichte $\mathbf{k}$ als Divergenz eines Tensors darstellen,

Now we represent the force density $\mathbf{k}$ as divergence of a tensor

$$k_\alpha = \nabla_\beta T_{\alpha,\beta}. \tag{8.30}$$

Hat man eine derartige Darstellung, so ist die auf ein Volumen $V$ wirkende Kraft gegeben durch

If one has such a representation, then the force acting on a volume $V$ is given by

$$\mathbf{K} = \int_V d^3r\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \int d^3r\mathbf{e}_\alpha\nabla_\beta T_{\alpha,\beta} = \int_{\partial V} df_\beta(\mathbf{e}_\alpha T_{\alpha,\beta}). \tag{8.31}$$

Die auf das Volumen wirkende Kraft wird also dargestellt durch eine auf die Oberfläche wirkende Kraft. Wäre sie isotrop $T_{\alpha,\beta} = -P\delta_{\alpha,\beta}$, so würden wir von einem Druck sprechen, der auf die Oberfläche einwirkt. Im hier vorliegenden allgemeineren Fall spricht man von einem Spannungstensor $T$, da der Druck anisotrop sein kann und Scherspannungen auftreten können.

The force acting on the volume is such represented by a force acting on the surface. If it were isotropic $T_{\alpha,\beta} = -P\delta_{\alpha,\beta}$, we would call $P$ the pressure acting on the surface. In the general case we consider here one calls $T$ the stress tensor, since the pressure is anisotropic and there can be shear stress.

Zur Berechnung von $T$ gehen wir aus von

In order to calculate $T$ we start from

$$k_\alpha = \rho_{\mathrm{f}}E_\alpha - \rho_{\mathrm{m}}\nabla_\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial\rho_{\mathrm{m}}}\right). \tag{8.32}$$

Wir formen um

We transform

$$\rho_{\mathrm{f}}E_\alpha = \frac{1}{4\pi}E_\alpha\nabla_\beta D_\beta = \frac{1}{4\pi}\left(\nabla_\beta(E_\alpha D_\beta) - (\nabla_\beta E_\alpha)D_\beta\right) \tag{8.33}$$

und verwenden $\nabla_\beta E_\alpha = \nabla_\alpha E_\beta$ wegen $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Damit folgt

and use $\nabla_\beta E_\alpha = \nabla_\alpha E_\beta$ because of $\mathrm{curl}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}$. This yields

$$k_\alpha = \nabla_\beta(\frac{1}{4\pi}E_\alpha D_\beta) - \rho_{\mathrm{m}}\nabla_\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial\rho_{\mathrm{m}}}\right) - \frac{1}{4\pi}D_\beta\nabla_\alpha E_\beta. \tag{8.34}$$

Nun ist aber

Now there is

$$\nabla_\alpha\left(u - \rho_{\mathrm{m}}\frac{\partial u}{\partial\rho_{\mathrm{m}}} - \frac{1}{4\pi}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\right) = -\rho_{\mathrm{m}}\nabla_\alpha\frac{\partial u}{\partial\rho_{\mathrm{m}}} - \frac{1}{4\pi}D_\beta\nabla_\alpha E_\beta, \tag{8.35}$$

da $\partial u/\partial D_\beta = E_\beta/(4\pi)$. Damit folgt der Ausdruck für den Spannungstensor

since $\partial u/\partial D_\beta = E_\beta/(4\pi)$. This yields the expression for the stress tensor

$$T_{\alpha,\beta} = \frac{1}{4\pi}E_\alpha D_\beta + \delta_{\alpha,\beta}\left(u - \rho_{\mathrm{m}}\frac{\partial u}{\partial\rho_{\mathrm{m}}} - \frac{1}{4\pi}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\right). \tag{8.36}$$

Speziell mit $u = u_0(\rho_{\mathrm{m}}) + D^2/(8\pi\epsilon(\rho_{\mathrm{m}}))$, (8.6) folgt

In particular with $u = u_0(\rho_{\mathrm{m}}) + D^2/(8\pi\epsilon(\rho_{\mathrm{m}}))$, (8.6) one obtains

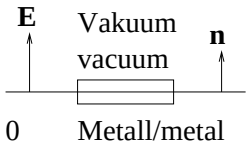
$$T_{\alpha,\beta} = \frac{1}{4\pi}E_\alpha D_\beta + \delta_{\alpha,\beta}\left(-P_0(\rho_{\mathrm{m}}) - \frac{1}{8\pi}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{8\pi}E^2\rho_{\mathrm{m}}\frac{d\epsilon}{d\rho_{\mathrm{m}}}\right). \tag{8.37}$$

Im Vakuum ergibt sich der Maxwellsche Spannungstensor zu

Maxwell's stress tensor reads in vacuum

$$T_{\alpha,\beta} = \frac{1}{4\pi}E_\alpha E_\beta - \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{8\pi}E^2. \tag{8.38}$$

Als Beispiel betrachten wir die elektrostatische Kraft auf ein ebenes Stück Metall der Fläche $F$. Wir haben auszuwerten




As an example we consider the electrostatic force on a plane piece of metal of area $F$. We have to evaluate

$$\mathbf{K} = \int df_\beta (\mathbf{e}_\alpha T_{\alpha,\beta}) = \left( \frac{1}{4\pi} \mathbf{E}(\mathbf{En}) - \frac{1}{8\pi} \mathbf{n} E^2 \right) F = \frac{1}{8\pi} E^2 \mathbf{n} F. \tag{8.39}$$

Dies ist in Übereinstimmung mit dem Ergebnis aus (7.8).

This is in agreement with the result from (7.8).

# C

# Magnetostatik

# Magnetostatics

©2000/01 Franz Wegner Universität Heidelberg

In diesem Kapitel behandeln wir die Magnetostatik ausgehend von den Gleichungen, die für zeitunabhängige Ströme am Anfang des Abschnittes (3.a) hergeleitet wurden.

In this chapter we consider magnetostatics starting from the equations, which were derived at the beginning of section (3.a) for time independent currents.

## 9 Magnetische Induktion und Vektorpotential

## 9 Magnetic Induction and Vector Potential

### 9.a Amperegesetz

Aus

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \tag{9.1}$$

folgt

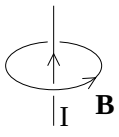
$$\int d\mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} \int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}), \tag{9.2}$$

was mit Hilfe des Stokesschen Satzes (B.56)

$$\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} I \tag{9.3}$$

geschrieben werden kann. Das Linienintegral der magnetischen Induktion $\mathbf{B}$ über eine geschlossene Kurve ergibt das $4\pi/\mathrm{c}$ fache des Stromes $I$ durch die Kurve.

Dabei gilt die Korkenzieher-Regel: Der Strom ist in die Richtung zu messen, in die sich der Korkenzieher bei Drehung in die Richtung des Linienintegrals bewegt.




### 9.a Ampere's Law

From

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \tag{9.1}$$

one obtains

$$\int d\mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} \int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}), \tag{9.2}$$

which can be written by means of Stokes' theorem (B.56)

$$\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} I \tag{9.3}$$

. The line integral of the magnetic induction $\mathbf{B}$ along a closed line yields $4\pi/\mathrm{c}$ times the current through the line.

Here the corkscrew rule applies: If the current moves in the direction of the corkscrew, then the magnetic induction has the direction in which the corkscrew rotates.

### 9.b Magnetischer Fluss

Als magnetischen Fluss $\Psi^{\mathrm{m}}$ durch eine gerichtete Fläche $F$ bezeichnet man das Integral

$$\Psi^{\mathrm{m}} = \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}). \tag{9.4}$$

### 9.b Magnetic Flux

The magnetic flux $\Psi^{\mathrm{m}}$ through an oriented area $F$ is defined as the integral

$$\Psi^{\mathrm{m}} = \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}). \tag{9.4}$$

Der magnetische Fluss hängt nur von der Berandung $\partial F$ der Fläche ab. Zum Beweis bilden wir die Differenz des Flusses durch zwei Flächen $F_1$ und $F_2$ mit der gleichen Berandung und erhalten

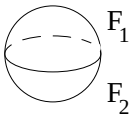
The magnetic flux depends only on the boundary $\partial F$ of the area. To show this we consider the difference of the flux through two areas $F_1$ and $F_2$ with the same boundary and obtain

$$\Psi_1^{\mathrm{m}} - \Psi_2^{\mathrm{m}} = \int_{F_1} d\mathbf{f}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}) - \int_{F_2} d\mathbf{f}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_F d\mathbf{f}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_V d^3r\,\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \tag{9.5}$$

mit Hilfe des Gaußschen Satzes (B.59) und $\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$.

by means of the divergence theorem (B.59) and $\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$.

Dabei seien $F_1$ und $F_2$ in die gleiche Richtung (zum Beispiel nach oben) orientiert. Die geschlossene Fläche $F$ setzt sich aus $F_1$ und $F_2$ zusammen, wobei $F_2$ jetzt in der umgekehrten Richtung orientiert sei.




Suppose $F_1$ and $F_2$ are oriented in the same direction (for example upwards). Then the closed surface $F$ is composed of $F_1$ and $F_2$, where $F_2$ is now oriented in the opposite direction.

Dann hat $F$ eine bestimmte Orientierung (zum Beispiel nach außen) und schließt das Volumen $V$ ein.

Then $F$ has a definite orientation (for example outwards) and includes the volume $V$.

## 9.c Feld einer Stromverteilung

## 9.c Field of a Current Distribution

Aus $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (4\pi/\mathrm{c})\,\mathrm{rot}\,\mathbf{j}(\mathbf{r})$ folgt wegen (B.26)

From $\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (4\pi/\mathrm{c})\,\mathrm{curl}\,\mathbf{j}(\mathbf{r})$ due to (B.26)

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) - \triangle\mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{9.6}$$

und $\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$

and $\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$ one obtains

$$\triangle\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{\mathrm{c}}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}) \tag{9.7}$$

mit der Lösung

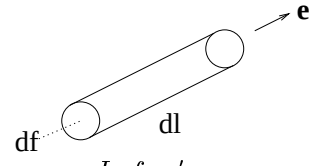
with the solution

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^3r'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{rot}\,'\mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\frac{1}{\mathrm{c}}\int d^3r'(\nabla'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|})\times\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^3r'\frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\times\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \tag{9.8}$$

wobei wir beim zweiten Gleichheitszeichen (B.63) verwendet haben. Der letzte Ausdruck wird als das Gesetz von Biot und Savart bezeichnet.

where we have used (B.63) at the second equals sign. The last expression is called the law of Biot and Savart.

Ist die Ausdehnung eines Drahtes senkrecht zur Stromrichtung vernachlässigbar klein (Stromfaden), so kann man $d^3r'\mathbf{j}(\mathbf{r}') = df'dl'j(\mathbf{r}')\mathbf{e} = Id\mathbf{r}'$ approximieren und erhält

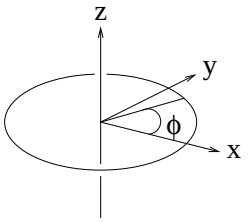



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{\mathrm{c}}\int\frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\times d\mathbf{r}'$$

If the extension of a wire perpendicular to the direction of the current is negligible (filamentary wire) then one can approximate $d^3r'\mathbf{j}(\mathbf{r}') = df'dl'j(\mathbf{r}')\mathbf{e} = Id\mathbf{r}'$ and obtains

(9.9)

Als Beispiel betrachten wir die Induktion in der Mittelachse eines Kreisstromes




As an example we consider the induction in the middle axis of a current along a circle

$$\mathbf{r} = z\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r}' = (R\cos\phi, R\sin\phi, z') \quad d\mathbf{r}' = (-R\sin\phi, R\cos\phi, 0)d\phi \tag{9.10}$$

$$(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times d\mathbf{r}' = (R(z-z')\cos\phi, R(z-z')\sin\phi, R^2)d\phi \tag{9.11}$$

$$\mathbf{B}(0,0,z) = \frac{2\pi I R^2 \mathbf{e}_z}{c(R^2 + (z-z')^2)^{3/2}}. \tag{9.12}$$

Davon ausgehend berechnen wir das Feld in der Mittelachse einer Spule. Sie habe $N$ Windungen und reiche von $z' = -l/2$ bis $z' = +l/2$. Wir erhalten dann

Starting from this result we calculate the field in the axis of a coil. The number of windings be $N$ and it extends from $z' = -l/2$ to $z' = +l/2$. Then we obtain

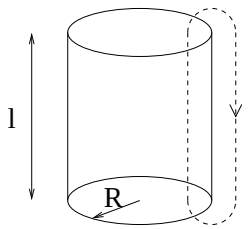
$$\mathbf{B}(0,0,z) = \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{N dz'}{l} \frac{2\pi I R^2 \mathbf{e}_z}{c(R^2 + (z-z')^2)^{3/2}} = \frac{2\pi I N}{cl}\mathbf{e}_z \left( \frac{\frac{l}{2} - z}{\sqrt{R^2 + (\frac{l}{2} - z)^2}} + \frac{\frac{l}{2} + z}{\sqrt{R^2 + (\frac{l}{2} + z)^2}} \right). \tag{9.13}$$

Ist die Spule lang, $R \ll l$, dann kann man für hinreichend große Entfernung vom Spulenende das $R^2$ im Nenner vernachlässigen und erhält für das Innere der Spule

If the coil is long, $R \ll l$, then one may neglect $R^2$ and obtains inside the coil

$$\mathbf{B} = \frac{4\pi I N}{cl}\mathbf{e}_z. \tag{9.14}$$

An den Spulenenden ist das Feld auf die Hälfte des Wertes im Inneren abgefallen. Aus dem Ampereschen Gesetz folgt bei Integration längs des in der Figur angegebenen Weges




At the ends of the coil the field has decayed to one half of its intensity inside the coil. From Ampere's law one obtains by integration along the path described in the figure

$$\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} I N. \tag{9.15}$$

Daher gilt im Innern näherungsweise der in (9.14) bestimmte Wert, während außerhalb die magnetische Induktion klein dagegen ist.

Thus inside the coil one obtains the induction (9.14), whereas the magnetic induction outside is comparatively small.

## 9.d Vektorpotential

## 9.d Vector Potential

Wir formen den Ausdruck für die magnetische Induktion um

We now rewrite the expression for the magnetic induction

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c}\int d^3r' \left(\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \frac{1}{c}\int d^3r' \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \text{rot}\, \mathbf{A}(\mathbf{r}) \tag{9.16}$$

mit

with

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{9.17}$$

Man bezeichnet $\mathbf{A}$ als das Vektorpotential. Wir zeigen noch, dass $\mathbf{A}$ divergenzfrei ist

One calls $\mathbf{A}$ the vector potential. We show, that $\mathbf{A}$ is divergence-free

$$\text{div}\, \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r' \left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\frac{1}{c}\int d^3r' \left(\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')$$

$$= \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla'\mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0. \tag{9.18}$$

Bei dem dritten Gleichheitszeichen haben wir partiell integriert (B.62). Am Schluss haben wir $\mathrm{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$ verwendet.

At the third equals sign we have performed a partial integration (B.62). Finally we have used $\mathrm{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$.

## 9.e Kraft zwischen zwei Stromkreisen

Wir betrachten noch die Kraft zwischen zwei Stromkreisen. Die Kraft, die der Stromkreis (1) auf den Stromkreis (2) ausübt, ist

## 9.e Force Between Two Circuits

Finally, we consider the force between two circuits. The force exerted by circuit (1) on circuit (2) is

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_2 &= \frac{1}{c}\int d^3r \mathbf{j}_2(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{c^2}\int d^3r d^3r' \mathbf{j}_2(\mathbf{r}) \times \left( (\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}) \times \mathbf{j}_1(\mathbf{r}') \right) \\ &= \frac{1}{c^2}\int d^3r d^3r' \big(\mathbf{j}_1(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r})\big)\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{c^2}\int d^3r d^3r' \Big( (\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|})\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r})\Big)\mathbf{j}_1(\mathbf{r}')\end{aligned} \tag{9.19}$$

unter Verwendung von (B.14). Da wegen (B.62)

where (B.14) has been applied. Since due to (B.62)

$$\int d^3r \big(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\big)\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) = -\int d^3r \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) \tag{9.20}$$

und $\mathrm{div}\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) = 0$, folgt schließlich für die Kraft

and $\mathrm{div}\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) = 0$, one obtains finally for the force

$$\mathbf{K}_2 = \frac{1}{c^2}\int d^3r d^3r' \big(\mathbf{j}_1(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r})\big)\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{9.21}$$

Die auf den ersten Stromkreis wirkende Kraft erhält man durch Austauschen von 1 und 2. Gleichzeitig kann man $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ austauschen. Man sieht dann, dass

The force acting on circuit (1) is obtained by exchanging 1 and 2. Simultaneously, one can exchange $\mathbf{r}$ and $\mathbf{r}'$. One sees then, that

$$\mathbf{K}_1 = -\mathbf{K}_2 \tag{9.22}$$

gilt.

holds.

# 10 Ringströme als magnetische Dipole

## 10.a Lokalisierte Stromverteilung und magnetischer Dipol

Wir betrachten eine Stromverteilung, die außerhalb einer Kugel vom Radius $R$ verschwindet ($\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathbf{0}$ für $r' > R$) und fragen nach der magnetischen Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ für $r > R$. Wir können dann das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (9.17) ähnlich wie das elektrische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ in Abschnitt (4) entwickeln

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{cr} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \frac{x_\alpha}{cr^3} \int d^3r' x'_\alpha \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \ldots \tag{10.1}$$

Da durch die Kugeloberfläche kein Strom fließt, folgt

$$0 = \int d\mathbf{f} \cdot g(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \int d^3r \,\mathrm{div}\,(g(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r})) = \int d^3r \,\mathrm{grad}\, g(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) + \int d^3r g(\mathbf{r}) \,\mathrm{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}), \tag{10.2}$$

wobei die Integrale über die Oberfläche beziehungsweise das Volumen der Kugel erstreckt werden. Aus der Kontinuitätsgleichung (1.12,3.1) folgt also

$$\int d^3r \,\mathrm{grad}\, g(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0. \tag{10.3}$$

Dies verwenden wir, um die Integrale in der Entwicklung (10.1) zu vereinfachen. Mit $g(\mathbf{r}) = x_\alpha$ folgt

$$\int d^3r j_\alpha(\mathbf{r}) = 0. \tag{10.4}$$

Damit fällt der erste Term der Entwicklung weg. Es gibt keinen mit $1/r$ abfallenden Beitrag im Vektorpotential für die Magnetostatik, das heißt keinen magnetischen Monopol. Mit $g(\mathbf{r}) = x_\alpha x_\beta$ folgt

$$\int d^3r \big(x_\alpha j_\beta(\mathbf{r}) + x_\beta j_\alpha(\mathbf{r})\big) = 0. \tag{10.5}$$

Damit können wir umformen

$$\int d^3r x_\alpha j_\beta = \frac{1}{2} \int d^3r (x_\alpha j_\beta - x_\beta j_\alpha) + \frac{1}{2} \int d^3r (x_\alpha j_\beta + x_\beta j_\alpha). \tag{10.6}$$

Das zweite Integral verschwindet, wie wir gerade gesehen haben. Das erste ändert sein Vorzeichen bei Austausch der Indices $\alpha$ und $\beta$. Man führt ein

$$\int d^3r x_\alpha j_\beta = \frac{1}{2} \int d^3r (x_\alpha j_\beta - x_\beta j_\alpha) = \mathrm{c}\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} m_\gamma \tag{10.7}$$

# 10 Loops of Current as Magnetic Dipoles

## 10.a Localized Current Distribution and Magnetic Dipole

We consider a distribution of currents which vanishes outside a sphere of radius $R$ ($\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathbf{0}$ for $r' > R$) and determine the magnetic induction $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ for $r > R$. We may expand the vector potential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (9.17) similar to the electric potential $\Phi(\mathbf{r})$ in section (4)

Since no current flows through the surface of the sphere one obtains

where the integrals are extended over the surface and the volume of the sphere, respectively. From the equation of continuity (1.12,3.1) it follows that

This is used to simplify the integral in the expansion (10.1). With $g(\mathbf{r}) = x_\alpha$ one obtains

Thus the first term in the expansion vanishes. There is no contribution to the vector potential decaying like $1/r$ in magnetostatics, that is no magnetic monopole. With $g(\mathbf{r}) = x_\alpha x_\beta$ one obtains

Thus we can rewrite

The second integral vanishes, as we have seen. The first one changes its sign upon exchanging the indices $\alpha$ and $\beta$. One introduces

und bezeichnet den sich daraus ergebenden Vektor

and calls the resulting vector

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2\mathrm{c}} \int d^3r' (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \tag{10.8}$$

als das magnetische Dipolmoment. Damit folgt dann

magnetic dipole moment. Then one obtains

$$A_\beta(\mathbf{r}) = \frac{x_\alpha}{\mathrm{c}r^3} \mathrm{c}\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} m_\gamma + ... \tag{10.9}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} + ... \tag{10.10}$$

Mit $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}(\mathbf{r})$ folgt

with $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathrm{curl}\,\mathbf{A}(\mathbf{r})$ one obtains

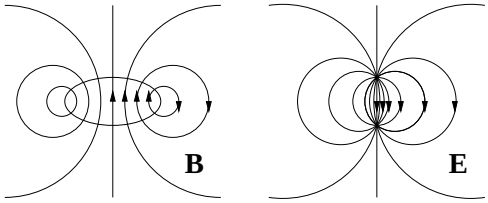
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{m}r^2}{r^5} + ... \tag{10.11}$$

Dies ist das Feld eines magnetischen Dipols. Es hat die gleiche Form wie das elektrische Feld des elektrischen Dipols (4.12)

This is the field of a magnetic dipole. It has the same form as the electric field of an electric dipole (4.12)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\,\mathrm{grad}\,\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\right) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{p}r^2}{r^5}, \tag{10.12}$$

aber es besteht ein Unterschied am Ort des Dipols. Anschaulich entnimmt man das der nebenstehenden Figur. Man berechne den $\delta^3(\mathbf{r})$-Beitrag zu den beiden Dipolmomenten. Vergleiche (B.71).




but there is a difference at the location of the dipole. This can be seen in the accompanying figure. Calculate the $\delta^3(\mathbf{r})$-contribution to both dipolar moments. Compare (B.71).

## 10.b Magnetisches Dipolmoment eines Ringstroms

## 10.b Magnetic Dipolar Moment of a Current Loop

Für das Dipolmoment eines Stromes auf einer geschlossenen Kurve erhält man

The magnetic dipolar moment of a current on a closed curve yields

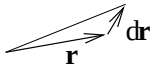
$$\mathbf{m} = \frac{I}{2\mathrm{c}} \int \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \frac{I}{\mathrm{c}} \mathbf{f}, \tag{10.13}$$

zum Beispiel

e.g.

$$m_\mathrm{z} = \frac{I}{2\mathrm{c}} \int (xdy - ydx) = \frac{I}{\mathrm{c}} f_\mathrm{z}. \tag{10.14}$$

Dabei ist $f_\alpha$ die Projektion der vom Leiter eingeschlossenen Fläche auf die von den beiden anderen Achsen aufgespannte Ebene




Here $f_\alpha$ is the projection of the area inside the loop onto the plane spanned by the two other axes

$$d\mathbf{f} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times d\mathbf{r}. \tag{10.15}$$

Falls $\mathbf{j} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$, dann folgt für das magnetische Moment

If $\mathbf{j} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$, then the magnetic moment reads

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2\mathrm{c}} \sum_i q_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \frac{q_i}{2m_i\mathrm{c}} \mathbf{l}_i, \tag{10.16}$$

wobei $m_i$ für die Masse und $\mathbf{l}_i$ für den Drehimpuls steht. Haben wir es mit einer Sorte Ladungsträger zu tun, dann gilt

where $m_i$ is the mass and $\mathbf{l}_i$ the angular momentum. If only one kind of charges is dealt with, then one has

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2mc}\mathbf{l}. \tag{10.17}$$

Dies gilt für Orbitalströme. Für Spins hat man dagegen

This applies for orbital currents. For spins, however, one has

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2mc} g\mathbf{s}, \tag{10.18}$$

wobei $\mathbf{s}$ der Drehimpuls des Spins ist. Für Elektronen ist der gyromagnetische Faktor $g = 2.0023$ und die Komponenten des Spins $\mathbf{s}$ nehmen die Werte $\pm\hbar/2$ an. Da der Bahndrehimpuls quantenmechanisch ganzzahlige Vielfache von $\hbar$ annimmt, führt man als Einheit des magnetischen Moments des Elektrons das Bohrsche Magneton ein, $\mu_B = \frac{e_0\hbar}{2m_0 c} = 0.927 \cdot 10^{-20}$ dyn$^{1/2}$ cm$^2$.

where $\mathbf{s}$ is the angular momentum of the spin. The gyromagnetic factor for electrons is $g = 2.0023$ and the components of the spin $\mathbf{s}$ are $\pm\hbar/2$. Since in quantum mechanics the orbital angular momentum assumes integer multiples of $\hbar$, one introduces as unit for the magnetic moment of the electron Bohr's magneton, $\mu_B = \frac{e_0\hbar}{2m_0 c} = 0.927 \cdot 10^{-20}$ dyn$^{1/2}$ cm$^2$.

## 10.c Kraft und Drehmoment auf einen Dipol im äußeren magnetischen Feld

## 10.c Force and Torque on a Dipole in an External Magnetic Field

### 10.c.$\alpha$ Kraft

Eine äußere magnetische Induktion $\mathbf{B}_\mathrm{a}$ übt auf einen Ringstrom die Lorentz-Kraft

$$\mathbf{K} = \frac{1}{c}\int d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}_\mathrm{a}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c}\mathbf{B}_\mathrm{a}(0) \times \int d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha} \times \int d^3r x_\alpha j_\beta(\mathbf{r}) \mathbf{e}_\beta - \ldots = -\frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha} \times \mathbf{e}_\beta \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} m_\gamma \tag{10.19}$$

aus. Wir formen $m_\gamma \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}\mathbf{e}_\beta = m_\gamma \mathbf{e}_\gamma \times \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{m} \times \mathbf{e}_\alpha$ um und finden

. We rewrite $m_\gamma \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}\mathbf{e}_\beta = m_\gamma \mathbf{e}_\gamma \times \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{m} \times \mathbf{e}_\alpha$ and find

$$\mathbf{K} = -\frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{e}_\alpha) = (\mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha})\mathbf{e}_\alpha - (\mathbf{e}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha})\mathbf{m}. \tag{10.20}$$

Der letzte Term verschwindet wegen $\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$. Für den ersten Term der rechten Seite erhalten wir $(\mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha})\mathbf{e}_\alpha = m_\gamma \frac{\partial B_{\mathrm{a},\gamma}}{\partial x_\alpha}\mathbf{e}_\alpha = m_\gamma \frac{\partial B_{\mathrm{a},\alpha}}{\partial x_\gamma}\mathbf{e}_\alpha = (\mathbf{m}\nabla)\mathbf{B}_\mathrm{a}$, wobei wir $\mathrm{rot}\,\mathbf{B}_\mathrm{a} = \mathbf{0}$ in der Gegend des Dipols verwendet haben. Daher bleibt

The last term vanishes because of $\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$. The first term on the right hand side can be written $(\mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha})\mathbf{e}_\alpha = m_\gamma \frac{\partial B_{\mathrm{a},\gamma}}{\partial x_\alpha}\mathbf{e}_\alpha = m_\gamma \frac{\partial B_{\mathrm{a},\alpha}}{\partial x_\gamma}\mathbf{e}_\alpha = (\mathbf{m}\nabla)\mathbf{B}_\mathrm{a}$, where we have used $\mathrm{curl}\,\mathbf{B}_\mathrm{a} = \mathbf{0}$ in the region of the dipole. Thus we obtain the force

$$\mathbf{K} = (\mathbf{m}\,\mathrm{grad}\,)\mathbf{B}_\mathrm{a} \tag{10.21}$$

als Kraft auf den magnetischen Dipol in Analogie zu (4.35), wo wir als Kraft auf den elektrischen Dipol $(\mathbf{p}\,\mathrm{grad}\,)\mathbf{E}_\mathrm{a}$ erhielten.

acting on the magnetic dipole in analogy to (4.35), where we obtained the force $(\mathbf{p}\,\mathrm{grad}\,)\mathbf{E}_\mathrm{a}$ acting on an electric dipole.

### 10.c.$\beta$ Drehmoment

Das mechanische Drehmoment auf den magnetischen Dipol ergibt sich zu

### 10.c.$\beta$ Torque

The torque on a magnetic dipole is given by

$$\mathbf{M}_\mathrm{mech} = \frac{1}{c}\int d^3r \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}_\mathrm{a}) = -\frac{1}{c}\mathbf{B}_\mathrm{a}\int d^3r(\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) + \frac{1}{c}\int d^3r(\mathbf{B}_\mathrm{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{j}. \tag{10.22}$$

Das erste Integral verschwindet, was man mit (10.3) und $g = r^2/2$ leicht sieht. Das zweite Integral ergibt

The first integral vanishes, which is easily seen from (10.3) and $g = r^2/2$. The second integral yields

$$\mathbf{M}_{\text{mech}} = \frac{1}{\text{c}} \mathbf{e}_\beta B_{\text{a},\alpha} \int d^3 r x_\alpha j_\beta = B_{\text{a},\alpha} \mathbf{e}_\beta \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} m_\gamma = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_\text{a}. \tag{10.23}$$

Analog war das Drehmoment auf einen elektrischen Dipol $\mathbf{p} \times \mathbf{E}_\text{a}$, (4.36).

Analogously the torque on an electric dipole was $\mathbf{p} \times \mathbf{E}_\text{a}$, (4.36).

Aus dem Kraftgesetz schließt man auf die Energie eines magnetischen Dipols im äußeren Feldes zu

From the law of force one concludes the energy of a magnetic dipole in an external field as

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_\text{a}. \tag{10.24}$$

Das ist korrekt für permanente magnetische Dipole. Aber das genaue Zustandekommen dieses Ausdrucks wird erst bei Behandlung des Induktionsgesetzes klar (Abschnitt 13).

This is correct for permanent magnetic moments. However, the precise derivation of this expression becomes clear only when we treat the law of induction (section 13).

# 11 Magnetismus in Materie

Ähnlich wie wir die Polarisationsladungen in der Elektrostatik von den freibeweglichen Ladungen separiert haben, zerlegen wir die Stromdichte in eine freibewegliche Ladungsstromdichte $\mathbf{j}_\mathrm{f}$ und in die Magnetisierungsstromdichte $\mathbf{j}_\mathrm{M}$, die etwa von Orbitalströmen der Elektronen herrührt

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_\mathrm{M}(\mathbf{r}). \tag{11.1}$$

Wir führen dazu die Magnetisierung als magnetische Dipoldichte ein

$$\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{m}_i}{\Delta V} \tag{11.2}$$

und führen wieder den Grenzübergang zum Kontinuum durch

$$\sum_i \mathbf{m}_i f(\mathbf{r}_i) \to \int d^3r' \mathbf{M}(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}'). \tag{11.3}$$

Dann erhalten wir für das Vektorpotential unter Verwendung von (10.10)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \int d^3r' \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{11.4}$$

Das zweite Integral lässt sich umformen in

$$\int d^3r' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}'), \tag{11.5}$$

so dass man

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} (\mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}') + \mathrm{c}\,\mathrm{rot}\,'\mathbf{M}(\mathbf{r}')) \tag{11.6}$$

erhält. Es liegt nahe, $\mathbf{j}_\mathrm{M}(\mathbf{r}') = \mathrm{c}\,\mathrm{rot}\,'\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ als Magnetisierungsstromdichte zu interpretieren. Damit folgt dann für die magnetische Induktion

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} \mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + 4\pi\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M}(\mathbf{r}). \tag{11.7}$$

Man führt nun die magnetische Feldstärke

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) := \mathbf{B}(\mathbf{r}) - 4\pi \mathbf{M}(\mathbf{r}) \tag{11.8}$$

ein, für die dann die Maxwellgleichung

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} \mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) \tag{11.9}$$

gilt. An der anderen Maxwellgleichung $\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$ ändert sich dadurch nichts.

Für para- und diamagnetische Substanzen ist für nicht zu große Feldstärken

$$\mathbf{M} = \chi_\mathrm{m} \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mu = 1 + 4\pi\chi_\mathrm{m}, \tag{11.10}$$

# 11 Magnetism in Matter

In a similar way as we separated the polarization charges from freely accessible charges, we divide the current density into a freely moving current density $\mathbf{j}_\mathrm{f}$ and the density of the magnetization current $\mathbf{j}_\mathrm{M}$, which may come from orbital currents of electrons

We introduce the magnetization as the density of magnetic dipoles

and conduct the continuum limit

Then using (10.10) we obtain for the vector potential

The second integral can be rewritten

so that one obtains

. Thus one interprets $\mathbf{j}_\mathrm{M}(\mathbf{r}') = \mathrm{c}\,\mathrm{curl}\,'\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ as the density of the magnetization current. Then one obtains for the magnetic induction

Now one introduces the magnetic field strength

for which Maxwell's equation

holds. Maxwell's equation $\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$ remains unchanged.

One obtains for paramagnetic and diamagnetic materials in not too strong fields

wobei $\chi_\mathrm{m}$ als magnetische Suszeptibilität und $\mu$ als relative Permeabilität bezeichnet werden. Im Supraleiter erster Art ist $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ (vollständiger Diamagnetismus). Die magnetische Induktion wird dort durch Oberflächenströme vollständig aus dem Material verdrängt.

Als Randbedingungen folgt analog zur Argumentation für die dielektrische Verschiebung und die elektrische Feldstärke die Stetigkeit der Normalkomponente $B_\mathrm{n}$ und bei Abwesenheit von Leitungsströmen die Stetigkeit der Tangentialkomponenten $\mathbf{H}_\mathrm{t}$.

Im Gaußschen Maßsystem werden $\mathbf{M}$ und $\mathbf{H}$ genau so wie $\mathbf{B}$ in $\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}$ gemessen, während im SI-System $\mathbf{B}$ in $\mathrm{Vs/m}^2$, $\mathbf{H}$ und $\mathbf{M}$ in A/m gemessen werden. Dabei bestehen für $\mathbf{H}$ und $\mathbf{M}$ Umrechnungsfaktoren, die sich durch einen Faktor $4\pi$ unterscheiden. Genaueres siehe Anhang A.

where $\chi_\mathrm{m}$ is the magnetic susceptibility and $\mu$ the permeability. In superconductors (of first kind) one finds complete diamagnetism $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. There the magnetic induction is completely expelled from the interior by surface currents.

In analogy to the arguments for the dielectric displacement and the electric field one obtains that the normal component $B_\mathrm{n}$ is continuous, and in the absence of conductive currents also the tangential components $\mathbf{H}_\mathrm{t}$ are continuous across the boundary.

In the Gaussian system of units the fields $\mathbf{M}$ and $\mathbf{H}$ are measured just as $\mathbf{B}$ in $\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}$, whereas in SI-units $\mathbf{B}$ is measured in $\mathrm{Vs/m}^2$, $\mathbf{H}$ and $\mathbf{M}$ in A/m. The conversion factors for $\mathbf{H}$ and $\mathbf{M}$ differ by a factor $4\pi$. For more information see appendix A.

# D

# Induktionsgesetz

# Law of Induction

©2000/01 Franz Wegner Universität Heidelberg

## 12 Faradaysches Induktionsgesetz

Die Kraft auf Ladungsträger ist $q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}/\mathrm{c})$. Dabei ist es für die Ladungsträger einerlei, ob die Kraft vom elektrischen oder vom magnetischen Feld herrührt. Sie spüren also in einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld eine effektive Feldstärke

$$\mathbf{E}^{(\mathrm{ind})}=\mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}}{\mathrm{c}}\times\mathbf{B} \tag{12.1}$$

mit $\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\dot{\mathbf{B}}/\mathrm{c}$. Die längs einer Leiterschleife induzierte Spannung beträgt daher

$$V^{(\mathrm{ind})}=\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}+\oint(\frac{\mathbf{v}}{\mathrm{c}}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{r}. \tag{12.2}$$

Das erste Integral ergibt einen Beitrag auf Grund der Magnetfeldveränderung. Für eine raumfeste Leiterschleife und veränderliches $\mathbf{B}$ folgt (da $\mathbf{v}\parallel d\mathbf{r}$)

$$V^{(\mathrm{ind})}=\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}=\int\operatorname{rot}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{f}=-\frac{1}{\mathrm{c}}\int\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{f}=-\frac{1}{\mathrm{c}}\left.\frac{d\Psi^{\mathrm{m}}}{dt}\right|_{\text{Schleife fest}\quad\text{loop fixed}}. \tag{12.3}$$

Das zweite Integral in (12.2) bringt einen Beitrag auf Grund der Bewegung der Leiterschleife. Um eine Leiterschleife zu untersuchen, die sich bewegt (und verbiegt), verwenden wir eine Parameterdarstellung der Leiterschleife $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t,p)$ mit dem körperfesten Parameter $p$. Für festes $t$ gilt dann $d\mathbf{r}=(\partial\mathbf{r}/\partial p)dp$ und

$$\mathbf{v}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}+\lambda(p,t)\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p} \tag{12.4}$$

mit einem $\lambda=dp/dt$, das von der Bewegung der Ladungen auf dem Leiter abhängt. Es folgt dann

$$dt\oint(\frac{\mathbf{v}}{\mathrm{c}}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{r}=-\frac{1}{\mathrm{c}}\int(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p})\cdot\mathbf{B}\,dp\,dt=-\frac{1}{\mathrm{c}}\int d\mathbf{f}\cdot\mathbf{B}, \tag{12.5}$$

## 12 Faraday's Law of Induction

The force acting on charges is $q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}/\mathrm{c})$. It does not matter for the charges, whether the force is exerted by the electric field or by the magnetic induction. Thus they experience in a time-dependent magnetic field an effective electric field

$$\mathbf{E}^{(\mathrm{ind})}=\mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}}{\mathrm{c}}\times\mathbf{B} \tag{12.1}$$

with $\operatorname{curl}\mathbf{E}=-\dot{\mathbf{B}}/\mathrm{c}$. Therefore the voltage along a loop of a conductor is given by

$$V^{(\mathrm{ind})}=\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}+\oint(\frac{\mathbf{v}}{\mathrm{c}}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{r}. \tag{12.2}$$

The first integral gives a contribution due to the variation of the magnetic induction. For a fixed loop and varying $\mathbf{B}$ one obtains (since $\mathbf{v}\parallel d\mathbf{r}$)

$$V^{(\mathrm{ind})}=\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}=\int\operatorname{rot}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{f}=-\frac{1}{\mathrm{c}}\int\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{f}=-\frac{1}{\mathrm{c}}\left.\frac{d\Psi^{\mathrm{m}}}{dt}\right|_{\text{Schleife fest}\quad\text{loop fixed}}. \tag{12.3}$$

The second integral in (12.2) gives a contribution due to the motion of the loop. In order to investigate a loop which moves (and is distorted) we use a parameter representation of the loop $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t,p)$ with the body-fixed parameter $p$. For fixed $t$ we have $d\mathbf{r}=(\partial\mathbf{r}/\partial p)dp$ and

$$\mathbf{v}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}+\lambda(p,t)\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p} \tag{12.4}$$

with a $\lambda=dp/dt$ which depends on the motion of the charges in the conductor. This yields

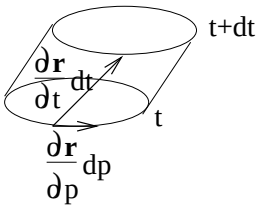
$$dt\oint(\frac{\mathbf{v}}{\mathrm{c}}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{r}=-\frac{1}{\mathrm{c}}\int(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p})\cdot\mathbf{B}\,dp\,dt=-\frac{1}{\mathrm{c}}\int d\mathbf{f}\cdot\mathbf{B}, \tag{12.5}$$

da $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\, dp\, dt$ gerade das Flächenelement ist, das in der Zeit $dt$ vom Leiterelement $dp$ überstrichen wird. Wir finden daher

since $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\, dp\, dt$ is the element of the area which in time $dt$ is swept over by the conductor element $dp$. Therefore we obtain

$$\oint (\frac{\mathbf{v}}{\mathrm{c}} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{\mathrm{c}} \left. \frac{d\Psi^m}{dt} \right|_{\mathbf{B}_{\mathrm{fest}}\ \mathrm{fixed}} . \tag{12.6}$$

Die gesamte induzierte Spannung setzt sich aus der Änderung des Magnetflusses durch Änderung der magnetischen Induktion (12.3) und der Änderung der Leiterschleife (12.6) zusammen




The total induced voltage is composed by the change of the magnetic flux due to the change of the magnetic induction (12.3) and by the motion of the loop (12.6)

$$V^{(\mathrm{ind})} = -\frac{1}{\mathrm{c}} \frac{d\Psi^{\mathrm{m}}}{dt}, \tag{12.7}$$

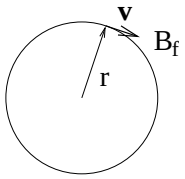
ist also durch die totale Änderung des magnetischen Flusses durch die Leiterschleife gegeben.
Es ist für einen Generator gleichgültig, ob das erzeugende magnetische Feld rotiert oder die Spule, in der die Spannung induziert wird.

and is thus given by the total change of the magnetic flux through the loop.
Thus it does not matter for a generator whether the generating magnetic field rotates or whether the coil is rotating.

**Das Betatron (nicht relativistisch)**

**The betatron (non-relativistic)**

Die Elektronen bewegen sich auf einer Kreisbahn und werden auf dieser durch die Lorentz-Kraft, die vom Führungsfeld $B_{\mathrm{f}}$ ausgeht, gehalten. Dann müssen sich Zentrifugal-Kraft und Lorentz-Kraft kompensieren




The electrons move along circular orbits and are kept on these by the Lorentz force exerted by the guide field $B_{\mathrm{f}}$. Thus the centrifugal force and the Lorentz force have to compensate each other

$$\frac{mv^2}{r} = \mathrm{e}_0 \frac{v}{\mathrm{c}} B_{\mathrm{f}} \quad \rightarrow \quad mv = \frac{\mathrm{e}_0}{\mathrm{c}} B_{\mathrm{f}} r. \tag{12.8}$$

Beschleunigt werden die Elektronen durch die Induktion

The electrons are accelerated by the induction

$$\frac{d}{dt}(mv) = -\mathrm{e}_0 E = \frac{\mathrm{e}_0}{2\pi r} \frac{d}{dt} \frac{1}{\mathrm{c}} \int B\, df = \frac{\mathrm{e}_0}{2\pi r \mathrm{c}} r^2 \pi \frac{d\bar{B}}{dt}. \tag{12.9}$$

Dabei ist $\bar{B}$ die mittlere magnetische Induktion innerhalb des Kreises. Man hat also

Here $\bar{B}$ is the averaged magnetic induction inside the circle. Thus one has

$$mv = \frac{\mathrm{e}_0}{2} \bar{B} \frac{r}{c} = \frac{\mathrm{e}_0}{c} B_{\mathrm{f}} r, \tag{12.10}$$

woraus die Wideröesche Bedingung $B_{\mathrm{f}} = \bar{B}/2$ folgt.

from which the betatron condition $B_{\mathrm{f}} = \bar{B}/2$ follows.

# 13 Induktivitäten und Stromkreise

## 13.a Induktivitäten

Der magnetische Fluss durch eine Spule beziehungsweise den Stromkreis $\#j$ ist gegeben durch

$$\Psi_j^{\mathrm{m}} = \int d\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_j) = \int d\mathbf{f}_j \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}_j) = \oint d\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_j). \tag{13.1}$$

Mehrere Stromkreise erzeugen das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_k \frac{I_k}{\mathrm{c}} \oint \frac{d\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|}. \tag{13.2}$$

Daher lässt sich der magnetische Fluss ausdrücken durch

$$\frac{1}{\mathrm{c}} \Psi_j^{\mathrm{m}} = \sum_k L_{j,k} I_k \tag{13.3}$$

mit

$$L_{j,k} = \frac{1}{\mathrm{c}^2} \int \frac{d\mathbf{r}_j \cdot d\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|}. \tag{13.4}$$

Es gilt daher $L_{j,k} = L_{k,j}$. Ist $j \neq k$, so spricht man von Gegeninduktivitäten, bei $j = k$ von Selbstinduktivitäten. Bei der Berechnung der Selbstinduktivitäten nach (13.4) tritt eine logarithmische Divergenz auf, wenn man die Stromverteilung über den Querschnitt nicht berücksichtigt. Bei einem Drahtradius $r_0$ muss man $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k| < r_0/(2\mathrm{e}^{1/4})$ ausschließen (vgl. Becker-Sauter), falls der Strom gleichmäßig über den kreisförmigen Querschnitt verteilt ist.

Die Dimension der Induktivitäten ergibt sich zu $\mathrm{s}^2/\mathrm{cm}$. Die Umrechnung in das SI-System ist gegeben durch $1\mathrm{s}^2/\mathrm{cm} \mathrel{\hat{=}} 9 \cdot 10^{11} \mathrm{Vs/A} = 9 \cdot 10^{11}$ H (Henry).

Sind die Bereiche des wesentlichen magnetischen Flusses mit einem Material der Permeabilität $\mu$ ausgefüllt, so folgt aus $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}_{\mathrm{f}}/\mathrm{c}$ der Zusammenhang $\operatorname{rot}(\mathbf{B}/\mu) = 4\pi \mathbf{j}_{\mathrm{f}}/\mathrm{c}$, so dass

$$L_{j,k}^{\mathrm{Mat}} = \mu L_{j,k}^{\mathrm{Vak}}. \tag{13.5}$$

Man erhält also hohe Induktivitäten durch Kerne hoher Permeabilität $\mu \approx 10^3 ... 10^4$ im Joch.

# 13 Inductances and Electric Circuits

## 13.a Inductances

The magnetic flux through a coil and a circuit $\#j$, resp. is given by

Several circuits generate the vector-potential

Therefore the magnetic flux can be expressed by

with

Therefore one has $L_{j,k} = L_{k,j}$. For $j \neq k$ they are called mutual inductances, for $j = k$ self-inductances. In calculating the self-inductances according to (13.4) logarithmic divergencies appear, when $\mathbf{r}_j$ approaches $\mathbf{r}_k$, if the current distribution across the cross-section is not taken into account. The contributions $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r} - k| < r_0/(2\mathrm{e}^{1/4})$ have to be excluded from the integral, where $r_0$ is the radius of the circular cross-section of the wire (compare Becker-Sauter).

The dimension of the inductances is given by $\mathrm{s}^2/\mathrm{cm}$. The conversion into the SI-system is given by $1\mathrm{s}^2/\mathrm{cm} \mathrel{\hat{=}} 9 \cdot 10^{11} \mathrm{Vs/A} = 9 \cdot 10^{11}$ H (Henry).

If the regions in which the magnetic flux is of appreciable strength is filled with a material of permeability $\mu$, then from $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}_{\mathrm{f}}/\mathrm{c}$ one obtains $\operatorname{rot}(\mathbf{B}/\mu) = 4\pi \mathbf{j}_{\mathrm{f}}/\mathrm{c}$, so that

Thus one obtains large inductances by cores of high permeability $\mu \approx 10^3 ... 10^4$ in the yoke.

**Induktivität einer langen Spule**
Ist ein geschlossenes magnetisches Joch der Länge $l$ und des Querschnitts $f$ mit $N$ Drahtwindungen umwickelt, die ein Strom $I$ durchfliesst, so folgt aus dem Ampereschen Gesetz $Hl = 4\pi IN/\mathrm{c}$ und daraus die magnetische Induktion $B = 4\pi IN\mu/(\mathrm{c}l)$. Der magnetische Fluss lässt sich dann $Bf = \mathrm{c}L_0 NI$ mit $L_0 = 4\pi\mu f/\mathrm{c}^2 l$ schreiben. Für $N$ Windungen ist der magnetische Fluss mit $N$ zu multiplizieren, was auf die Selbstinduktion $L = L_0 N^2$ führt. Für die Gegeninduktivität zwischen zwei Schleifen mit $N_1$ und $N_2$ Windungen ergibt sich dann $L_{1,2} = L_0 N_1 N_2$. Es gilt dann also generell

**Inductance of a long coil**
If a closed magnetic yoke of length $l$ and cross-section $f$ is surrounded by $N$ windings of wire, through which a current $I$ flows, then from Ampere's law $Hl = 4\pi IN/\mathrm{c}$ one obtains the magnetic induction $B = 4\pi IN\mu/(\mathrm{c}l)$. The magnetic flux can then be written $Bf = \mathrm{c}L_0 NI$ with $L_0 = 4\pi\mu f/\mathrm{c}^2 l$. For $N$ turns the magnetic flux is to be multiplied by $N$, which yields the self-induction $L = L_0 N^2$. For mutual inductances between two circuits with $N_1$ and $N_2$ turns one obtains $L_{1,2} = L_0 N_1 N_2$. Thus we obtain in general

$$L_{i,j} = L_0 N_i N_j, \quad L_0 = \frac{4\pi\mu f}{\mathrm{c}^2 l}. \tag{13.6}$$

## 13.b Stromkreis-Elemente

Wir wollen nun Stromkreise betrachten, die folgende Elemente enthalten: Spannungsquellen, Ohmsche Widerstände, Induktivitäten und Kapazitäten. Während wir Induktivitäten und Kapazitäten bereits eingeführt haben, ist noch kurz etwas zu den beiden anderen Elementen zu sagen:

**Spannungsquellen** Eine Spannungsquelle habe eine Spannung oder elektromotorische Kraft $V^{(\mathrm{e})}(t)$. Sie führt dem System die Leistung $V^{(\mathrm{e})}I$ zu. Ein Beispiel stellt eine Batterie dar, die chemische Energie in elektromagnetische umwandelt. Auch die Spannungen $V^{(\mathrm{ind})}$ der Induktivitäten zählt man zu den elektromotorischen Kräften.

**Ohmsche Widerstände** Für viele Materialien ist bei nicht zu großen elektrischen Feldstärken die Stromdichte der Feldstärke proportional. Der Proportionalitätskoeffizient $\sigma$ heißt Leitfähigkeit

## 13.b Elements of Circuits

We consider now circuits, which contain the following elements: voltage sources, ohmic resistors, inductances, and capacitors. Whereas we have already introduced inductances and capacitors, we have to say a few words on the two other elements.

**Voltage sources** A voltage source or electromotive force with voltage $V^{(\mathrm{e})}(t)$ feeds the power $V^{(\mathrm{e})}I$ into the system. An example is a battery which transforms chemical energy into electromagnetic one. The voltages $V^{(\mathrm{ind})}$ of the inductances are also called electromotive forces.

**Ohmic resistors** In many materials the current density and the electric field are proportional if the field is not too strong. The coefficient of proportionality $\sigma$ is called conductivity

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}. \tag{13.7}$$

Für einen Draht der Länge $l$ und des Querschnitts $f$ folgt

For a wire of length $l$ and cross-section $f$ one obtains

$$I = jf = \sigma f E = \sigma\frac{f}{l}V^{(\mathrm{R})}. \tag{13.8}$$

Dabei ist $V^{(\mathrm{R})}$ der Ohmsche Spannungsabfall längs des Leiters. Man hat also das Gesetz

Here $V^{(\mathrm{R})}$ is the ohmic voltage drop along the conductor. Thus one has

$$V^{(\mathrm{R})} = RI, \quad R = \frac{l}{\sigma f} \tag{13.9}$$

mit dem Ohmschen Widerstand $R$. Im Gaußschen Maßsystem wird die Leitfähigkeit $\sigma$ in 1/s und der Widerstand $R$ in s/cm gemessen. Die Umrechnung in das SI-System erfolgt durch $\mathrm{c}^{-1}\hat{=}30\Omega$. In einem Ohmschen Widerstand wird pro Zeiteinheit $V^{(\mathrm{R})}I$ an elektromagnetischer Energie in Wärme umgewandelt.

with the ohmic resistance $R$. In Gaussian units the conductivity $\sigma$ is measured in 1/s and the resistance $R$ in s/cm. The conversion into the SI-system is obtained by $\mathrm{c}^{-1}\hat{=}30\Omega$. The electromagnetic energy is dissipated in an ohmic resistor into heat at the rate $V^{(\mathrm{R})}I$.

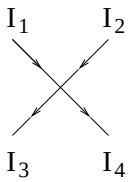
## 13.c Kirchhoffsche Regeln

### 1. Kirchhoffsche Regel (Knotenpunktsgesetz für die Ströme)

Das erste Kirchhoffsche Gesetz besagt, dass an jedem Knoten, an dem mehrere Leiter enden, die Summe der einlaufenden Ströme gleich der der auslaufenden ist

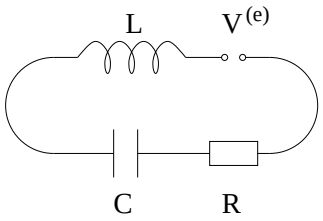
$$\sum_{\text{einlaufend}} I = \sum_{\text{auslaufend}} I. \qquad (13.10)$$

Diese Regel stellt also die makroskopische Form von $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ dar. Im nebenstehenden Fall beinhaltet sie $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$.




### 2. Kirchhoffsche Regel (Maschengesetz für die Spannungen)

Diese Regel besagt, dass längs eines Maschenumlaufs die Summe der elektromotorischen Kräfte gleich der übrigen Spannungsabfälle ist




$$\sum \left(V^{(\mathrm{e})} + V^{(\mathrm{ind})}\right) = \sum \left(V^{(\mathrm{R})} + V^{(\mathrm{C})}\right), \qquad (13.11)$$

wobei

$$V^{(\mathrm{ind})} = -d(LI)/dt, \quad V^{(\mathrm{C})} = q/C, \quad dV^{(\mathrm{C})}/dt = I/C. \qquad (13.12)$$

Diese Regel ist also das Faradaysche Induktionsgesetz in makroskopischer Form.

## 13.c Kirchhoff's Rules

### Kirchhoff's first Law (Current Law)

Kirchhoff's first law says, that at each electrical contact, where several wires are joined, the sum of the incoming currents equals the sum of the outgoing currents

$$\sum_{\text{incoming}} I = \sum_{\text{outgoing}} I. \qquad (13.10)$$

This rule is the macroscopic form of $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$. In the figure aside it implies $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$.

### Kirchhoff's second Law (Voltage Law)

The second law says, that along a closed path the sum of electromotive forces equals the sum of the other voltage drops

where

## 13.d Energie von Induktivitäten

Um die Energie von Induktivitäten zu bestimmen, betrachten wir Stromkreise mit eingeprägten Spannungen, ohmschen Widerständen und induktiven Kopplungen

$$V_j^{(\mathrm{e})} + V_j^{(\mathrm{ind})} = R_j I_j. \qquad (13.13)$$

Die zeitliche Änderung der elektromagnetischen Energie des Systems ergibt sich dann zu

$$\dot{U}_{\mathrm{em}} = \sum_j I_j V_j^{(\mathrm{e})} - \sum_j R_j I_j^2 + L_{\mathrm{mech}} = -\sum_j I_j V_j^{(\mathrm{ind})} + L_{\mathrm{mech}} \qquad (13.14)$$

## 13.d Energy of Inductances

In order to determine the energies of inductances we consider circuits with electromotive forces, ohmic resistors and inductive couplings

The variation of the electromagnetic energy as a function of time is then given by

mit

$$V_j^{(\mathrm{ind})} = -\frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\Psi}_j^{\mathrm{m}} = -\frac{d}{dt}(\sum_k L_{j,k} I_k). \tag{13.15}$$

Dabei ist $L_{\mathrm{mech}}$ die an dem System verrichtete mechanische Leistung.

Wir betrachten nun mehrere Fälle:

### 13.d.$\alpha$ Konstante Induktivitäten

Wir halten die Stromkreise fest, dann gilt $L_{j,k} =$ const, $L_{\mathrm{mech}} = 0$. Dann folgt

$$\dot{U}_{\mathrm{em}} = \sum_{j,k} I_j L_{j,k} \dot{I}_k, \tag{13.16}$$

woraus sich die Energie der Induktivitäten zu

$$U_{\mathrm{em}} = \frac{1}{2}\sum_{j,k} I_j L_{j,k} I_k \tag{13.17}$$

ergibt.

### 13.d.$\beta$ Gegeneinander bewegte Stromkreise

Wir bewegen nun die Stromkreise gegeneinander. Dann folgt

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{mech}} &= \dot{U}_{\mathrm{em}} + \sum_j I_j V_j^{(\mathrm{ind})} = \sum_{j,k}(I_j L_{j,k}\dot{I}_k + \frac{1}{2} I_j \dot{L}_{j,k} I_k) - \sum_{j,k}(I_j \dot{L}_{j,k} I_k + I_j L_{j,k}\dot{I}_k) \\ &= -\frac{1}{2} I_j \dot{L}_{j,k} I_k = -\left.\frac{\partial U_{\mathrm{em}}}{\partial t}\right|_I . \end{aligned} \tag{13.18}$$

Die mechanische Arbeit, die zu verrichten ist, wird also nicht durch die Veränderung der elektromagnetischen Energie $U_{\mathrm{em}}$ bei konstanten Strömen $I$ gegeben, sondern durch ihr Negatives.

### 13.d.$\gamma$ Konstante magnetische Flüsse

Falls wir keine eingeprägten Spannungen $V_j^{(\mathrm{e})} = 0$ haben und keine Widerstände $R_j = 0$, dann gilt nach (13.13) $V^{(\mathrm{ind})} = 0$, woraus folgt, dass die magnetischen Flüsse $\Psi_j^{\mathrm{m}}$ unverändert bleiben. Die Induktion ist also bestrebt, die Magnetflüsse aufrecht zu erhalten (Beispiel supraleitende Ringströme). Drücken wir $U_{\mathrm{em}}$ durch die Flüsse aus,

$$U_{\mathrm{em}} = \frac{1}{2\mathrm{c}^2}\sum_{j,k} \Psi_j^{\mathrm{m}} (L^{-1})_{j,k} \Psi_k^{\mathrm{m}}, \tag{13.19}$$

with

Here $L_{\mathrm{mech}}$ is the mechanical power fed into the system.

Now we consider various cases:

### 13.d.$\alpha$ Constant Inductances

We keep the circuits fixed, then $L_{j,k} =$ const, $L_{\mathrm{mech}} = 0$ holds. From this it follows that

from which we obtain the energies of the inductances

.

### 13.d.$\beta$ Moving Loops of Currents

Now we move the circuits against each other. This yields

Thus the mechanical work to be done is not given by the change of the electromagnetic energy $U_{\mathrm{em}}$ at constant currents $I$, but by its negative.

### 13.d.$\gamma$ Constant Magnetic Fluxes

In case there are no electromotive forces $V_j^{(\mathrm{e})} = 0$ and no resistors $R_j = 0$ in the loops, then according to (13.13) we have $V^{(\mathrm{ind})} = 0$, from which we conclude that the magnetic fluxes $\Psi_j^{\mathrm{m}}$ remain unchanged. Thus the induction tries to keep the magnetic fluxes unaltered (example superconducting loop-currents). If we express the energy $U_{\mathrm{em}}$ in terms of the fluxes

so folgt mit der Matrix-Identität $\dot{L}^{-1} = -L^{-1}\dot{L}L^{-1}$ (die Identität erhält man durch Ableiten von $LL^{-1} = 1$ und Auflösen nach $\dot{L}^{-1}$)

and use the matrix identity $\dot{L}^{-1} = -L^{-1}\dot{L}L^{-1}$ then we obtain (the identity can be obtained by differentiating $LL^{-1} = 1$ and solving for $\dot{L}^{-1}$)

$$\left.\frac{\partial U_{\rm em}}{\partial t}\right|_{\Psi^{\rm m}} = -\frac{1}{2}\sum_{j,k} I_j \dot{L}_{j,k} I_k = L_{\rm mech}. \tag{13.20}$$

Die mechanische Leistung ist daher die zeitliche Ableitung der elektromagnetischen Energie bei konstanten magnetischen Flüssen.

The mechanical power is thus the rate by which the electromagnetic energy changes at constant magnetic fluxes.

### 13.d.$\delta$ Kraft zwischen zwei Stromkreisen

Nach diesen Betrachtungen kommen wir auf die Kraft zwischen zwei Stromkreisen zurück. Wir hatten im Abschnitt (9.e) die Kraft des Stromkreises 1 auf den Stromkreis 2 zu (9.21)

### 13.d.$\delta$ Force between two Electric Circuits

After these considerations we return to the force between two electric circuits. In section (9.e) we calculated the force from circuit 1 on circuit 2 as (9.21)

$$\mathbf{K}_2 = \frac{1}{\rm c^2}\int d^3r d^3r' (\mathbf{j}_1(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r}))\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{13.21}$$

berechnet. Gehen wir nun zu zwei Stromfäden über

. Now if we consider two filamentary wires

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a} \qquad \mathbf{r}' = \mathbf{r}_1 \tag{13.22}$$

$$d^3r'\mathbf{j}_1(\mathbf{r}') \to d\mathbf{r}_1 I_1, \qquad d^3r\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) \to d\mathbf{r}_2 I_2, \tag{13.23}$$

so folgt

we obtain

$$\mathbf{K}_2 = \frac{I_1 I_2}{\rm c^2}\int (d\mathbf{r}_1\cdot d\mathbf{r}_2)\nabla_2\frac{1}{|\mathbf{r}_2+\mathbf{a}-\mathbf{r}_1|} = I_1 I_2 \nabla_a L_{1,2}(\mathbf{a}). \tag{13.24}$$

Daher ist

Thus

$$L_{\rm mech} = -\mathbf{K}_2\cdot\dot{\mathbf{a}} = -I_1 I_2 \dot{L}_{1,2} \tag{13.25}$$

in Übereinstimmung mit (13.18).

is in agreement with (13.18).

### 13.d.$\epsilon$ Energie eines magnetischen Dipols im äußeren Magnetfeld

Wir können andererseits die Wechselwirkungsenergie eines magnetischen Dipols erzeugt durch eine Stromdichte $\mathbf{j}$ in einem äußeren Feld $\mathbf{B}_{\rm a}$ erzeugt durch eine Stromverteilung $\mathbf{j}_{\rm a}$ jetzt schreiben als

### 13.d.$\epsilon$ Energy of a Magnetic Dipole in an External Magnetic Induction

On the other hand we may now write the interaction energy between a magnetic dipole generated by a density of current $\mathbf{j}$ in an external magnetic field $\mathbf{B}_{\rm a}$ generated by a density of current $\mathbf{j}_{\rm a}$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{\rm c^2}\int d^3r d^3r' (\mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}_{\rm a}(\mathbf{r}'))\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\rm c^2}\int d^3r\mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot\int d^3r'\frac{\mathbf{j}_{\rm a}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\rm c}\int d^3r\mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{A}_{\rm a}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{\rm c}\int d^3r\mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot(\mathbf{A}_{\rm a}(0) + x_\alpha\nabla_\alpha\mathbf{A}_{\rm a}|_{r=0} + ...) = \frac{1}{\rm c}\int d^3r x_\alpha j_\beta \nabla_\alpha A_{{\rm a},\beta} \\ &= \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} m_\gamma \nabla_\alpha A_{{\rm a},\beta} = \mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_{\rm a}. \end{aligned} \tag{13.26}$$

Dies ist jetzt der korrekte Ausdruck für die Energie eines magnetischen Dipols $\mathbf{m}$ in einer äußeren magnetischen Induktion $\mathbf{B}_{\rm a}$.

This is the correct expression for the energy of a magnetic dipole $\mathbf{m}$ in an external magnetic induction $\mathbf{B}_{\rm a}$.

### 13.d.ζ Permanente magnetische Momente

Permanente magnetische Momente kann man als Stromkreise mit sehr großer Selbstinduktivität $L_{j,j}$ und konstantem Fluss $\Psi_j^{\mathrm{m}}$ auffassen. Zur weiteren Berechnung lösen wir (13.3) nach $I_j$ auf

$$I_j = \frac{\Psi_j^{\mathrm{m}}}{\mathrm{c}L_{j,j}} - \sum_{k\neq j} \frac{L_{j,k}I_k}{L_{j,j}}. \tag{13.27}$$

Bei Verschiebung der magnetischen Momente verändern sich die Gegeninduktivitäten und man erhält

$$\dot{I}_j = -\frac{1}{L_{j,j}}\Big(\sum_{k\neq j} \dot{L}_{j,k}I_k + \sum_{k\neq j} L_{j,k}\dot{I}_k\Big). \tag{13.28}$$

Falls die Selbstinduktivitäten $L_{j,j}$ sehr groß gegen die Gegeninduktivitäten sind, ändern sich die Ströme nur wenig und die zweite Summe ist vernachlässigbar. Dann erhält man für den Selbst-Induktions-Beitrag aus der Energie

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_{j,j}I_j^2\right) = L_{j,j}I_j\dot{I}_j = -I_j\sum_{k\neq j}\dot{L}_{j,k}I_k. \tag{13.29}$$

Daher erhält man durch eine Änderung von $L_{j,k}$ den Beitrag $\dot{L}_{j,k}I_jI_k$ direkt aus der Wechselwirkung zwischen den Strömen $I_j$ und $I_k$, die einen Beitrag der Form (13.26) zu $U_{\mathrm{em}}$ liefern und zwei Beiträge mit dem umgekehrten Vorzeichen aus $\frac{1}{2}L_{j,j}I_j^2$ und $\frac{1}{2}L_{k,k}I_k^2$. Dies erklärt den Unterschied zwischen (10.24) und (13.26).

### 13.d.ζ Permanent Magnetic Moments

Permanent magnetic moments may be considered as loop currents with large self inductance $L_{j,j}$ and constant flux $\Psi_j^{\mathrm{m}}$. For further calculation we first solve (13.3) for $I_j$

$$I_j = \frac{\Psi_j^{\mathrm{m}}}{\mathrm{c}L_{j,j}} - \sum_{k\neq j} \frac{L_{j,k}I_k}{L_{j,j}}. \tag{13.27}$$

Upon moving the magnetic moments the mutual inductances change, and one obtains

$$\dot{I}_j = -\frac{1}{L_{j,j}}\Big(\sum_{k\neq j} \dot{L}_{j,k}I_k + \sum_{k\neq j} L_{j,k}\dot{I}_k\Big). \tag{13.28}$$

If the self-inductances $L_{j,j}$ are very large in comparison to the mutual inductances, the currents vary only a little bit, and the second sum is negligible. Then one obtains from the self-inductance contribution of the energy

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_{j,j}I_j^2\right) = L_{j,j}I_j\dot{I}_j = -I_j\sum_{k\neq j}\dot{L}_{j,k}I_k. \tag{13.29}$$

Thus one obtains from a change of $L_{j,k}$ a contribution $\dot{L}_{j,k}I_jI_k$ directly from the interaction between the currents $I_j$ and $I_k$, which yields a contribution of the form (13.26) to $U_{\mathrm{em}}$ and two contributions with the opposite sign from $\frac{1}{2}L_{j,j}I_j^2$ and $\frac{1}{2}L_{k,k}I_k^2$. This explains the difference between (10.24) and (13.26).

# E

# Maxwell-Gleichungen

# Maxwell's Equations

©2000/01 Franz Wegner Universität Heidelberg

## 14 Vollständige Maxwell-Gleichungen

## 14 Complete Set of Maxwell's Equations

### 14.a Widerspruchsfreiheit der Maxwell-Gleichungen

Im Abschnitt (1) haben wir die vier Maxwell-Gleichungen (1.13-1.16)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\mathrm{c}\partial t} &= \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) && (14.1)\\ \operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= 4\pi\rho(\mathbf{r},t) && (14.2)\\ \operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\mathrm{c}\partial t} &= \mathbf{0} && (14.3)\\ \operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= 0 && (14.4) \end{aligned}$$

angegeben. Es sind dies acht Komponentengleichungen für die insgesamt sechs Komponenten $B_\alpha$ und $E_\alpha$. Die Gleichungen können daher nicht unabhängig voneinander sein. In der Tat bilden wir die Divergenz der ersten Gleichung und vergleichen mit der zweiten Gleichung, so finden wir

$$-\frac{1}{\mathrm{c}}\operatorname{div}\dot{E} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\operatorname{div}\mathbf{j} = -\frac{4\pi}{\mathrm{c}}\dot{\rho}, \qquad (14.5)$$

woraus wir sehen, dass in diesen beiden Gleichungen die Kontinuitätsgleichung (1.12) enthalten ist, und diese auch nur erfüllt werden können, wenn die Ladung erhalten ist. Zum anderen folgt daraus aber auch

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\mathbf{E} - 4\pi\rho) = 0. \qquad (14.6)$$

Wenn also zu einer Zeit die Gleichung (14.2) und zu allen Zeiten die Kontinuitäts-Gleichung erfüllt sind, so garantiert (14.1) dafür, dass (14.6) zu allen Zeiten erfüllt ist.

### 14.a Consistency of Maxwell's Equations

In section (1) we have introduced the four Maxwell's equations (1.13-1.16)

. These are eight component equations for six components $B_\alpha$ and $E_\alpha$. Thus the equations cannot be independent from each other. Indeed calculating the divergence of the first equation and comparing it with the second equation we find

from which we see that the equation of continuity (1.12) is contained in both equations, and these equations can only be fulfilled if charge is conserved. But it also follows that

Thus if at a certain time equation (14.2) and at all times the equation of continuity is fulfilled, then equation (14.1) guarantees that (14.6) is fulfilled at all times.

Ähnlich folgt aus der Divergenz von (14.3)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\mathbf{B}) = 0. \tag{14.7}$$

Wenn also (14.4) zu einer Zeit erfüllt ist, so ist sie auf Grund von (14.3) zu allen Zeiten erfüllt.

Die Gleichungen (14.1) und (14.3) erlauben die Berechnung von $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$, falls $\mathbf{j}$ zu allen Zeiten gegeben ist und $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$ zu einer Zeit $t_0$ gegeben sind und zu dieser Zeit (14.2) und (14.4) erfüllt sind. $\rho$ ergibt sich dann aus der Kontinuitätsgleichung.

Der einzige Beitrag, den wir bisher nicht betrachtet haben, ist der Beitrag proportional zu $\dot{\mathbf{E}}$ in (14.1). Er wurde von Maxwell gefunden. Er hat $\dot{\mathbf{E}}/(4\pi)$ als Verschiebungsstrom bezeichnet, da (14.1) in der Form

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi}\dot{\mathbf{E}}) \tag{14.8}$$

geschrieben werden kann. Mit der Einführung dieses Terms wurde das Gleichungssystem (14.1-14.4) widerspruchsfrei. Gleichzeitig erlaubt dieses System dann die Beschreibung elektromagnetischer Wellen.

Similarly, it follows from the divergence of (14.3) that

Thus if (14.4) is fulfilled at a certain time, then due to equation (14.3) it is fulfilled at all times.

Equations (14.1) and (14.3) allow the calculation of $\mathbf{B}$ and $\mathbf{E}$ if $\mathbf{j}$ is given at all times and $\mathbf{B}$ and $\mathbf{E}$ are given at a time $t_0$ and (14.2) and (14.4) are fulfilled at that time. Then $\rho$ is determined by the equation of continuity.

The only contribution we have not yet considered is the contribution proportional to $\dot{\mathbf{E}}$ in (14.1). It was found by Maxwell. He called $\dot{\mathbf{E}}/(4\pi)$ displacement current, since (14.1) may be rewritten

. With the introduction of this term the system of equations (14.1-14.4) became consistent. Simultaneously this system allowed the description of electromagnetic waves.

## 14.b Maxwell-Gleichungen für freibewegliche Ladungen und Ströme

Die Ladungsdichte und die Stromdichte werden zerlegt (vgl. Abschnitt 6.a und 11)

$$\rho = \rho_{\mathrm{f}} + \rho_{\mathrm{P}} \tag{14.9}$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\mathrm{f}} + \mathbf{j}_{\mathrm{P}} + \mathbf{j}_{\mathrm{M}}. \tag{14.10}$$

Dabei waren $\rho_{\mathrm{f}}$ und $\mathbf{j}_{\mathrm{f}}$ die freibeweglichen Anteile, während $\rho_{\mathrm{P}}$ und das hier eingeführte $\mathbf{j}_{\mathrm{P}}$ die Polarisations-Anteile sind. Wir hatten für das elektrische Dipolmoment im Volumen $\Delta V$ ausgedrückt durch die Dipolmomente $\mathbf{p}_i$, die wieder durch Ladungspaare $\pm q_i$ im Abstand $\mathbf{a}_i$ dargestellt werden

$$\mathbf{P}\Delta V = \sum \mathbf{p}_i = \sum q_i \mathbf{a}_i \tag{14.11}$$

$$\mathbf{j}_{\mathrm{P}}\Delta V = \sum \dot{\mathbf{p}}_i = \sum q_i \dot{\mathbf{a}}_i \tag{14.12}$$

mit $\mathbf{j}_{\mathrm{P}} = \dot{\mathbf{P}}$ (in ruhender Materie). Dazu kommt dann noch die in Abschnitt 11 eingeführte Magnetisierungsstromdichte

$$\mathbf{j}_{\mathrm{M}} = \mathrm{c}\operatorname{rot}\mathbf{M}. \tag{14.13}$$

## 14.b Maxwell's Equations for Freely Moving Charges and Currents

The density of the charges and currents are separated into (compare sections 6.a and 11)

Here $\rho_{\mathrm{f}}$ and $\mathbf{j}_{\mathrm{f}}$ are the freely moving contributions, whereas $\rho_{\mathrm{P}}$ and the newly introduced $\mathbf{j}_{\mathrm{P}}$ are the polarization contributions. We expressed the electric dipole moment in the volume $\Delta V$ by the dipole moments $\mathbf{p}_i$, and those by the pairs of charges $\pm q_i$ at distance $\mathbf{a}_i$

with $\mathbf{j}_{\mathrm{P}} = \dot{\mathbf{P}}$ (in matter at rest). In addition, there is a current density from the magnetization as introduced in section 11

Für diese Ladungs- und Stromdichten gilt

For these charge and current densities one obtains

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{f}}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{\mathrm{f}} = 0 \tag{14.14}$$

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{P}}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{\mathrm{P}} = 0 \tag{14.15}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_{\mathrm{M}} = 0. \tag{14.16}$$

Durch Einsetzen dieser Ladungs- und Stromdichten in (14.1) ergibt sich

By inserting these charge and current densities into (14.1) one obtains

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{\mathrm{c}} \dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} (\mathbf{j}_{\mathrm{f}} + \dot{\mathbf{P}} + \mathrm{c} \operatorname{rot} \mathbf{M}), \tag{14.17}$$

woraus

from which it follows that

$$\operatorname{rot} (\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}) - \frac{\partial}{\mathrm{c} \partial t} (\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} \mathbf{j}_{\mathrm{f}} \tag{14.18}$$

folgt. Führen wir wieder wie in (11.8) und (6.6) das magnetische Feld $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ und die dielektrische Verschiebung $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ ein, so wird (11.9) erweitert zu

. If we now introduce the magnetic field $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ and the dielectric displacement $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ in (11.8) and (6.6), eq. (11.9) becomes

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{\mathrm{c}} \dot{\mathbf{D}} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} \mathbf{j}_{\mathrm{f}}. \tag{14.19}$$

Entsprechend folgt aus (14.2) wie in (6.7)

Similarly, one obtains from (14.2) as in (6.7)

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_{\mathrm{f}}. \tag{14.20}$$

Die Maxwell-Gleichungen (14.3) und (14.4) bleiben unverändert.

Maxwell's equations (14.3) and (14.4) remain unchanged.

# 15 Energie- und Impuls-Bilanz

## 15.a Energie

Wir betrachten ein Volumen eines Systems mit freibeweglichen Ladungen und festgehaltener Materie. Auf die freibeweglichen Ladungen wirkt die Kraftdichte $\mathbf{k} = \rho_\mathrm{f}(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}/\mathrm{c})$. Bewegen wir die Ladungen mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$, so müssen wir dem System gegen diese Kraftdichte die Leistung $-\int d^3r \mathbf{j}_\mathrm{f}\cdot\mathbf{E}$ zuführen. Wir formen nun mittels (14.19), (B.30) und (14.3) um

$$\begin{aligned} -\mathbf{j}_\mathrm{f}\cdot\mathbf{E} &= -\frac{\mathrm{c}}{4\pi}\mathbf{E}\cdot\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}} = \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\,\mathrm{div}\,(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) - \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\mathbf{H}\cdot\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}} \\ &= \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\,\mathrm{div}\,(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{H}\cdot\dot{\mathbf{B}} + \mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}}). \end{aligned} \tag{15.1}$$

Diese Beiträge interpretiert man folgendermaßen: In ruhender Materie stellt der zweite Beitrag die zeitliche Änderung der Energiedichte $u(\rho_\mathrm{m},\mathbf{D},\mathbf{B})$ dar mit

$$du = \frac{\partial u}{\partial\rho_\mathrm{m}}d\rho_\mathrm{m} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{D} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}. \tag{15.2}$$

Wir gehen der Einfachheit halber davon aus, dass die Energie der Materie von ihrer Massendichte $\rho_\mathrm{m}$, aber nicht vom vollständigen Verzerrungszustand abhängt. Wir hatten schon früher gesehen, dass $\partial u/\partial\mathbf{D} = \mathbf{E}/(4\pi)$ gilt. Ähnlich kann man aus dem Induktionsgesetz zeigen, dass $\partial u/\partial\mathbf{B} = \mathbf{H}/(4\pi)$ für starre Materie gilt. Hier die Herleitung in Kurzform

$$\begin{aligned} \delta U_\mathrm{em} &= -\sum_j V_j^{(\mathrm{ind})}\delta t I_j = \frac{1}{\mathrm{c}}\sum_j I_j\delta\Psi_j^\mathrm{m} = \frac{1}{\mathrm{c}}\sum_j I_j\int d\mathbf{f}_j\cdot\delta\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{c}}\sum_j I_j\int d\mathbf{r}\cdot\delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^3r\mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r})\cdot\delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}(\mathbf{r})\cdot\delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r\mathbf{H}(\mathbf{r})\cdot\,\mathrm{rot}\,\delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{4\pi}\int\mathbf{H}(\mathbf{r})\cdot\delta\mathbf{B}(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{15.3}$$

Da die Materie festgehalten wird, trägt $\partial u/\partial\rho_\mathrm{m}\dot{\rho}_\mathrm{m}$ nichts bei. Wir setzen daher für die Energie des Volumens $V$

$$U(V) = \int_V d^3r\,u(\rho_\mathrm{m}(\mathbf{r}),\mathbf{D}(\mathbf{r}),\mathbf{B}(\mathbf{r})) \tag{15.4}$$

und führen den Poynting-Vektor

$$\mathbf{S} = \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H} \tag{15.5}$$

# 15 Energy and Momentum Balance

## 15.a Energy

We consider a volume of a system with freely moving charges and matter at rest. The force density on the freely moving charges is given by $\mathbf{k} = \rho_\mathrm{f}(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}/\mathrm{c})$. If the charges are moved with velocity $\mathbf{v}$, the power $-\int d^3r\mathbf{j}_\mathrm{f}\cdot\mathbf{E}$ has to be fed into the system against the force density. We rewrite this expression by using (14.19), (B.30) and (14.3)

These contributions are interpreted in the following way: In matter at rest the second contribution is the temporal change of the energy density $u(\rho_\mathrm{m},\mathbf{D},\mathbf{B})$ with

For simplicity we assume that the energy of the matter depends on its density $\rho_\mathrm{m}$, but not on the complete state of strain. We have seen earlier that $\partial u/\partial\mathbf{D} = \mathbf{E}/(4\pi)$ holds. Similarly, one can show from the law of induction that $\partial u/\partial\mathbf{B} = \mathbf{H}/(4\pi)$ holds for rigid matter. We give a short account of the derivation

Since the matter is pinned, $\partial u/\partial\rho_\mathrm{m}\dot{\rho}_\mathrm{m}$ does not contribute. Therefore we write the energy of volume $V$ as

and introduce the Poynting vector

ein. Es gilt dann

. Then one has

$$-\int_V d^3r \mathbf{j}_\mathrm{f} \cdot \mathbf{E} = \dot{U}(V) + \int_V d^3r \,\mathrm{div}\,\mathbf{S} = \dot{U}(V) + \int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}). \tag{15.6}$$

Die dem Volumen $V$ zugeführte Energie wird zum Teil im Volumen gespeichert ($\dot{U}$), zum anderen Teil aber durch die Oberfläche des Systems transportiert. Dieser Energietransport ist durch die Energiestromdichte $\mathbf{S}$ gegeben. Ähnlich wie durch eine Fläche pro Zeiteinheit die Ladung $\int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{j}_\mathrm{f}$ transportiert wird, wird (in ruhender Materie) die Energie $\int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{S}$ transportiert. Der Poynting-Vektor gibt daher die elektromagnetische Energiestromdichte an.

The energy added to volume $V$ is partially stored in the volume. This stored part is given by ($\dot{U}$). Another part is transported through the surface of the system. This transport of energy is given by the energy current through the surface expressed by the surface integral over $\mathbf{S}$. Similar to the transport of the charge $\int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{j}_\mathrm{f}$ through a surface per unit time, one has (in matter at rest) the energy transport $\int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{S}$ through a surface. Thus the Poynting vector is the density of the electromagnetic energy current.

Wir bemerken, dass für $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$

We note that for $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ one obtains

$$u = u^0(\rho_\mathrm{m}) + \frac{1}{8\pi}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \tag{15.7}$$

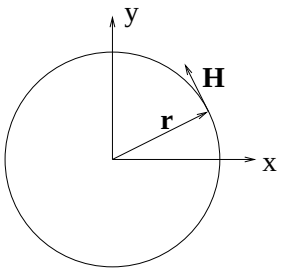
folgt.

.

**Beispiel: Stromdurchflossener gerader Leiter**

**Example: Current-carrying straight wire**

Wir betrachten einen vom Strom $I$ durchflossenen geraden Draht in Richtung der z-Achse. Auf Grund des Amereschen Gesetzes gilt bei Integration auf einem konzentrischen Kreis mit Radius $r$ um den Leiter




We consider a straight wire which carries the current $I$ in the direction of the z-axis. Due to Ampere's law the integral along a concentric circle with radius $r$ around the conductor yields

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} I, \quad \mathbf{H} = \frac{2I}{\mathrm{c}r}\mathbf{e}_\phi. \tag{15.8}$$

Längs des Leiters bestehe auf Grund des ohmschen Widerstandes ein Spannungsabfall $V^{(\mathrm{R})}$, verknüpft mit einem elektrischen Feld parallel zum Draht, $\mathbf{E} = E_0\mathbf{e}_\mathrm{z}$. Daraus folgt der Poynting-Vektor

There is a voltage drop along the wire due to the ohmic resistance $V^{(\mathrm{R})}$, which is related to the electric field parallel to the wire, $\mathbf{E} = E_0\mathbf{e}_\mathrm{z}$. This yields the Poynting-vector

$$\mathbf{S} = \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{H} = -\frac{IE_0\mathbf{e}_\mathrm{r}}{2\pi r} \tag{15.9}$$

mit einem Energiefluss

with the energy flux

$$\int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f} = -IE_0 l = -IV^{(\mathrm{R})} \tag{15.10}$$

durch den Zylindermantel des Drahtes über die Länge $l$ nach außen. Mit anderen Worten, es fließt in den Draht die ohmsche Leistung $IV^{(\mathrm{R})}$. Diese wird im Draht in Wärme umgewandelt.

through the lateral surface of the cylinder of the wire of length $l$ in outward direction. In other words, the ohmic power $IV^{(\mathrm{R})}$ flows into the wire. There it is transformed into heat.

## 15.b Impuls-Bilanz

Wir führen die Impuls-Bilanz nur für das Vakuum mit Ladungsdichten $\rho$ und Stromdichten $\mathbf{j}$ durch. Wir wollen das System in Ruhe halten. Dann müssen wir gegen die Kraftdichte $\mathbf{k} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}/\mathrm{c}$ eine Gegenkraftdichte $-\mathbf{k}$ wirken lassen, so dass einem Volumen $V$ pro Zeiteinheit der Impuls $-\int_V d^3r\,\mathbf{k}$ zugeführt wird. Wir formen nun wieder mit (14.1) und (14.3) um

$$-\mathbf{k} = -\rho\mathbf{E} - \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{B} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{B} + \frac{1}{4\pi\mathrm{c}}\dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{B}. \tag{15.11}$$

Mit (14.3) und (14.4)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\dot{} - \mathbf{E} \times \dot{\mathbf{B}} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\dot{} + \mathrm{c}\mathbf{E} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{E} && (15.12)\\ \mathbf{B}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B} &= 0 && (15.13) \end{aligned}$$

folgt

$$-\mathbf{k} = \frac{1}{4\pi\mathrm{c}}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})\dot{} + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{E} - \mathbf{E}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} + \mathbf{B} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{B} - \mathbf{B}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B}). \tag{15.14}$$

Nun ist

$$\mathbf{E}_\mathrm{c} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E}_\mathrm{c}(\nabla\mathbf{E}) = \nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_\mathrm{c}) - \mathbf{E}(\nabla\mathbf{E}_\mathrm{c}) - \mathbf{E}_\mathrm{c}(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{2}\nabla E^2 - (\nabla\mathbf{E})\mathbf{E}. \tag{15.15}$$

Wir haben hier Größen, auf die der $\nabla$-Operator nicht wirkt, mit einem Index $_\mathrm{c}$ gekennzeichnet. Im letzten Term des obigen Ausdrucks wirkt der $\nabla$-Operator tatsächlich auf beide Faktoren $\mathbf{E}$. Damit können wir schreiben

$$-\mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}_\mathrm{s} - \nabla_\beta T_{\alpha,\beta}\mathbf{e}_\alpha, \tag{15.16}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\mathrm{s} &= \frac{1}{4\pi\mathrm{c}}\mathbf{E} \times \mathbf{B}, && (15.17)\\ T_{\alpha,\beta} &= \frac{1}{4\pi}(E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta) - \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{8\pi}(E^2 + B^2). && (15.18) \end{aligned}$$

Dabei wird $\mathbf{g}_\mathrm{s}$ als die Strahlungsimpulsdichte bezeichnet, und $T_{\alpha,\beta}$ sind die Komponenten des Spannungstensors, dessen elektrostatischen Anteil wir bereits in der Elektrostatik (8.38) kennengelernt haben. Mit diesen Größen gilt dann

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3r\,\mathbf{g}_\mathrm{s}(\mathbf{r}) = -\int_V d^3r\,\mathbf{k} + \int_{\partial V} \mathbf{e}_\alpha T_{\alpha,\beta}\,df_\beta. \tag{15.19}$$

## 15.b Momentum Balance

We consider the momentum balance only for the vacuum with charge densities $\rho$ and current densities $\mathbf{j}$. If we keep the system at rest, a force density $-\mathbf{k}$ has to act against the Lorentz force density $\mathbf{k} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}/\mathrm{c}$, so that the momentum $-\int_V d^3r\,\mathbf{k}$ is added to the volume $V$ per unit time. We transform by means of (14.1) and (14.3)

$$-\mathbf{k} = -\rho\mathbf{E} - \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{B} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{B} + \frac{1}{4\pi\mathrm{c}}\dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{B}. \tag{15.11}$$

With (14.3) and (14.4)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\dot{} - \mathbf{E} \times \dot{\mathbf{B}} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\dot{} + \mathrm{c}\mathbf{E} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{E} && (15.12)\\ \mathbf{B}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B} &= 0 && (15.13) \end{aligned}$$

one obtains

$$-\mathbf{k} = \frac{1}{4\pi\mathrm{c}}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})\dot{} + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{E} - \mathbf{E}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} + \mathbf{B} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{B} - \mathbf{B}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B}). \tag{15.14}$$

One has

$$\mathbf{E}_\mathrm{c} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E}_\mathrm{c}(\nabla\mathbf{E}) = \nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_\mathrm{c}) - \mathbf{E}(\nabla\mathbf{E}_\mathrm{c}) - \mathbf{E}_\mathrm{c}(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{2}\nabla E^2 - (\nabla\mathbf{E})\mathbf{E}. \tag{15.15}$$

We have indicated quantities on which the $\nabla$-operator does not act with an index $_\mathrm{c}$. The $\nabla$-operator acts on both factors $\mathbf{E}$ in the last term of the expression above. Then we may write

$$-\mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}_\mathrm{s} - \nabla_\beta T_{\alpha,\beta}\mathbf{e}_\alpha, \tag{15.16}$$

with

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\mathrm{s} &= \frac{1}{4\pi\mathrm{c}}\mathbf{E} \times \mathbf{B}, && (15.17)\\ T_{\alpha,\beta} &= \frac{1}{4\pi}(E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta) - \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{8\pi}(E^2 + B^2). && (15.18) \end{aligned}$$

Here $\mathbf{g}_\mathrm{s}$ is called the density of the electromagnetic momentum and $T_{\alpha,\beta}$ are the components of the electromagnetic stress tensor, whose electrostatic part (8.38) we already know. With these quantities we have

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3r\,\mathbf{g}_\mathrm{s}(\mathbf{r}) = -\int_V d^3r\,\mathbf{k} + \int_{\partial V} \mathbf{e}_\alpha T_{\alpha,\beta}\,df_\beta. \tag{15.19}$$

Dies ist die Impuls-Bilanz für das Volumen $V$. Die linke Seite stellt die zeitliche Änderung des Impulses im Volumen $V$ dar, die rechte Seite den zugeführten Impuls. Er besteht aus zwei Anteilen: Der erste ist der Impuls, den wir hinzufügen, indem wir gegen die elektromagnetische Kraftdichte $\mathbf{k}$ eine Gegenkraft wirken lassen. Der zweite Anteil wirkt in Form von Spannungen an der Oberfläche. Man kann ihn auch als Fluss des Impulses betrachten. Der Spannungstensor stellt bis auf das Vorzeichen eine Impulsflussdichte dar. Er trägt zwei Indices. Einer ($\alpha$) bezieht sich auf die Komponente des Impulses, der andere ($\beta$) auf die Richtung des Flusses.

This is the momentum balance for the volume $V$. The left handside gives the rate of change of momentum in the volume $V$, the right handside the rate of momentum added to the volume. It consists of two contributions: the first one is the momentum which is added by the action of the reactive force against the Lorentz force density $\mathbf{k}$. The second contribution acts by means of stress on the surface. It may also be considered as a flux of momentum through the surface. Thus the stress tensor is apart from its sign the density of momentum flux. It carries two indices. One ($\alpha$) relates to the components of momentum, the other one ($\beta$) to the direction of the flux.

Wir haben hier nur den elektromagnetischen Impuls im Vakuum behandelt, während wir die elektromagnetische Energie auch in Materie untersucht haben. Warum ist es schwieriger, den Impuls in Materie zu behandeln? In beiden Fällen haben wir das System in Ruhe untersucht. Hält man die Materie fest, so tragen die dabei aufgewendeten Kräfte nicht zur Energie-Bilanz bei. Schließlich ist die Leistung als Kraft mal Geschwindigkeit gegeben. Da die Geschwindigkeit der Materie gleich Null ist, trägt die auf die Materie wirkende Kraft nicht zur Energie-Bilanz bei. Anders ist es bei der Impuls-Bilanz. Da tragen alle Kräfte bei. Man könnte daran denken, von einem kräftefreien Zustand auszugehen. Dann tritt allerdings das Problem auf, dass bei Verschiebung der freibeweglichen Ladungen überall in der Materie Kräfte auftreten können, die wir erst kennen müssten. Daher können wir hier die Energie-Bilanz in Materie behandeln, hätten aber mit der Impuls-Bilanz Probleme.

We have only considered the electromagnetic momentum in vacuum, whereas we have considered the electromagnetic energy also in matter. Why is it more difficult to determine momentum in matter? In both cases we consider the system at rest. If one pins the matter, the acting forces do not contribute to the balance of energy, since the power is given by force times velocity. Since velocity vanishes, the forces acting on the matter do not contribute to the balance of the energy. This is different for the balance of momentum. There all forces contribute. One could imagine starting out from a force-free state. Then, however, we have the problem that by moving the free charges, forces will appear which we would have to know. Therefore we can consider here the energy balance in matter, whereas the momentum balance in matter would be more difficult.

In der Literatur gibt es widersprüchliche Aussagen: Minkowski hat 1908 für den elektromagnetischen Impuls in Materie $\mathbf{D} \times \mathbf{B}/(4\pi c)$ angegeben. Man findet dies auch im Lehrbuch von Sommerfeld (allerdings mit Einschränkungen). Andererseits gibt Abraham 1910 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}/(4\pi c)$ an. Man findet dies auch im Lehrbuch von Landau und Lifschitz.

In literature there are inconsistent statements: In 1908 Minkowski gave $\mathbf{D} \times \mathbf{B}/(4\pi c)$ for the electromagnetic momentum density in matter. This can also be found in the book by Sommerfeld (however with words of caution). On the other hand in 1910 Abraham gave $\mathbf{E} \times \mathbf{H}/(4\pi c)$. This is also found in the textbook by Landau and Lifshitz.

Tatsächlich sind zwei Dinge zu beachten, die häufig nicht berücksichtigt werden:
1) Die Wechselwirkung zwischen elektromagnetischem Feld und Materie muss berücksichtigt werden. Die Materie kann nicht als starr angenommen werden.

There are two points to be considered, which are often overlooked:
i) The interaction between the electromagnetic field and matter has to be taken into account. Matter cannot be considered rigid.

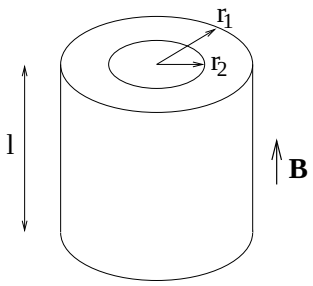
2) Man muss genau definieren, was man unter dem elektromagnetischen Impuls versteht, da man sonst alles in den unbekannten Rest mechanischen Impuls schieben kann, also keine Aussage gemacht hat.
Ohne Herleitung sei nur angegeben, dass man ein System modellieren kann, dem man entnimmt: Im lokalen Ruhesystem der Materie ist die Impulsdichte $\mathbf{E}\times\mathbf{H}/(4\pi\mathrm{c}) = \mathbf{S}/\mathrm{c}^2$. Allerdings kann man zeigen, dass es in homogener Materie eine weitere Erhaltungsgröße auf Grund dieser Homogenität gibt, die im lokalen Ruhesystem den Wert $\mathbf{D}\times\mathbf{B}/(4\pi\mathrm{c})$ annimmt. Vollzieht man Sommerfelds Argument nach, so stellt man in der Tat fest, daß es sich nur für eine ortsunabhängige Dielektrizitätskonstante $\epsilon$ durchführen lässt.

ii) One has to define precisely what is meant by the electromagnetic momentum, since otherwise any difference can be attributed to the mechanical momentum and the statement is empty.

Without derivation it should just be mentioned that a model system can be given which yields the following: The momentum density in the local rest system is $\mathbf{E}\times\mathbf{H}/(4\pi\mathrm{c}) = \mathbf{S}/\mathrm{c}^2$. However, in homogeneous matter there is a further conserved quantity which in the local rest system is given by $\mathbf{D}\times\mathbf{B}/(4\pi\mathrm{c})$. If one goes through Sommerfeld's argument, one realizes, that it can be carried through only for a space-independent dielectric constant $\epsilon$.

**Beispiel: Zylinderkondensator im Magnetfeld**

Wir betrachten einen Zylinderkondensator der Länge $l$ mit Außenradius $r_1$ und Innenradius $r_2$ mit einer Ladung $q$ außen und $-q$ innen. Zwischen den beiden Zylindern sei Vakuum. Parallel zur Achse sei ein Magnetfeld $B_0$. Dann haben wir in Zylinderkoordinaten




**Example: Cylindric capacitor in a magnetic field**

We consider a cylindric capacitor of length $l$ with outer radius $r_1$ and inner radius $r_2$ with charge $q$ outside and $-q$ inside. We assume that between both cylinders is vacuum. Parallel to the axis be a magnetic field $B_0$. Then one has in cylinder coordinates

$$\mathbf{E} = -\frac{2q}{lr}\mathbf{e}_\mathrm{r}, \quad \mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_\mathrm{z}, \quad \mathbf{g}_\mathrm{s} = \frac{1}{4\pi\mathrm{c}}\frac{2qB_0}{lr}\mathbf{e}_\phi. \tag{15.20}$$

Daraus errechnet sich ein Drehimpuls $\mathbf{L}$ in z-Richtung

From this we calculate the angular momentum $\mathbf{L}$ in z-direction

$$L_\mathrm{z} = \int dz d^2r(\mathbf{r}\times\mathbf{g}_\mathrm{s})_\mathrm{z} = \int dz d^2r r\frac{2qB_0}{4\pi\mathrm{c}lr} = \frac{qB_0}{2\mathrm{c}}(r_1^2 - r_2^2). \tag{15.21}$$

Wenn wir den Kondensator nun entladen, dann muss der Entladungsstrom durch das Magnetfeld fließen. Dabei wirkt die Lorentz-Kraft, die dem System ein mechanisches Drehmoment $\mathbf{M}_\mathrm{mech}$ gibt

If the capacitor is decharged, the decharging current flows through the magnetic field. Then the Lorentz force acts which gives the system a mechanical torque $\mathbf{M}_\mathrm{mech}$

$$\mathbf{M}_\mathrm{mech} = \int d^3r\,\mathbf{r}\times(\frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{j}\times\mathbf{B}) = \frac{I}{\mathrm{c}}\int \mathbf{r}\times(d\mathbf{r}\times\mathbf{B}) = \frac{I}{\mathrm{c}}\int((\mathbf{r}\cdot\mathbf{B})d\mathbf{r} - (\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r})\mathbf{B}), \tag{15.22}$$

woraus sich

from which one obtains

$$M_\mathrm{mech,z} = -\frac{IB_0}{\mathrm{c}}\int_{r_1}^{r_2} r dr = \frac{IB_0}{2\mathrm{c}}(r_1^2 - r_2^2) \tag{15.23}$$

und damit der mechanische Drehimpuls

and thus the mechanical angular momentum

$$L_\mathrm{z} = \frac{qB_0}{2\mathrm{c}}(r_1^2 - r_2^2) \tag{15.24}$$

errechnet. Durch die Entladung wurde also der elektromagnetische Drehimpuls (15.21) in mechanischen (15.24) umgewandelt. Anstatt den Kondensator zu entladen, kann man auch das Magnetfeld abschalten. Dabei wird eine elektrische Feldstärke

. Thus the electromagnetic angular momentum (15.21) is transformed into a mechanical angular momentum during decharging. Instead of decharging the capacitor one may switch off the magnetic field. Then the electric field

$$\oint \mathbf{E}^{(\mathrm{ind})} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{\mathrm{c}} \int \dot{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{f} = -\frac{1}{\mathrm{c}} \pi r^2 \dot{B}_0, \quad \mathbf{E}^{(\mathrm{ind})} = -\frac{1}{2\mathrm{c}} r \dot{B}_0 \mathbf{e}_\phi \tag{15.25}$$

induziert, die auf die Ladungen ein Drehmoment

is induced, which exerts the torque

$$\mathbf{M}_{\mathrm{mech}} = q\mathbf{r}_1 \times \mathbf{E}^{(\mathrm{ind})}(\mathbf{r}_1) - q\mathbf{r}_2 \times \mathbf{E}^{(\mathrm{ind})}(\mathbf{r}_2) \tag{15.26}$$

$$M_{\mathrm{mech,z}} = qr_1(-\frac{1}{2\mathrm{c}} r_1 \dot{B}_0) - qr_2(-\frac{1}{2\mathrm{c}} r_2 \dot{B}_0) \tag{15.27}$$

ausübt, so dass der Kondensator die mechanische Drehimpulskomponente

so that the capacitor receives the mechanical component of the angular momentum

$$L_{\mathrm{z}} = \frac{qB_0}{2\mathrm{c}}(r_1^2 - r_2^2) \tag{15.28}$$

erhält. In beiden Fällen wird also der elektromagnetische Drehimpuls in den gleichen mechanischen Drehimpuls umgewandelt.

. In both cases the electromagnetic angular momentum is transformed into a mechanical one.

# F

# Elektromagnetische Wellen

# Electromagnetic Waves

©2000/01 Franz Wegner Universität Heidelberg

## 16 Elektromagnetische Wellen im Vakuum und in homogenen isotropen Isolatoren

### 16.a Wellengleichung

Wir betrachten elektromagnetische Wellen in einem homogenen isotropen Isolator einschließlich dem Vakuum. Das heißt, wir verlangen, dass die Dielektrizitätskonstante $\epsilon$ und die Permeabilität $\mu$ orts- und zeitunabhängig sind. Wir verlangen weiterhin, dass keine freien Ströme und Ladungen auftreten $\rho_{\rm f} = 0$, $\mathbf{j}_{\rm f} = \mathbf{0}$. Das Material ist also ein Isolator. Damit lauten dann die vier Maxwell-Gleichungen, ausgedrückt durch $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ mit Hilfe von $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ und $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \tag{16.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\epsilon}{\rm c}\dot{\mathbf{E}}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\mu}{\rm c}\dot{\mathbf{H}}. \tag{16.2}$$

Daraus folgt

$$\operatorname{rot}\,\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\epsilon}{\rm c}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} = -\frac{\epsilon\mu}{\rm c^2}\ddot{\mathbf{H}} \tag{16.3}$$

Mit

$$\operatorname{rot}\,\operatorname{rot}\mathbf{H} = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{H}) = -\triangle\mathbf{H} + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{H}) \tag{16.4}$$

folgt unter Berücksichtigung von (16.1) für $\mathbf{H}$ und analog für $\mathbf{E}$

$$\triangle\mathbf{H} = \frac{1}{c'^2}\ddot{\mathbf{H}}, \tag{16.5}$$

$$\triangle\mathbf{E} = \frac{1}{c'^2}\ddot{\mathbf{E}}, \tag{16.6}$$

$$c' = \frac{\rm c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \tag{16.7}$$

## 16 Electromagnetic Waves in Vacuum and in Homogeneous Isotropic Insulators

### 16.a Wave Equation

We consider electromagnetic waves in a homogeneous isotropic insulator including the vacuum. More precisely we require that the dielectric constant $\epsilon$ and the permeability $\mu$ are independent of space and time. Further we require that there are no freely moving currents and charges $\rho_{\rm f} = 0$, $\mathbf{j}_{\rm f} = \mathbf{0}$. Thus the matter is an insulator. Then Maxwell's equations read, expressed in terms of $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ by means of $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ and $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$

From these equations one obtains

With

one obtains for $\mathbf{H}$ using (16.1) and similarly for $\mathbf{E}$

Die Gleichungen (16.5) und (16.6) heißen Wellengleichungen.

## 16.b Ebene Wellen

Wir suchen nun partikuläre Lösungen der Wellengleichungen und beginnen mit Lösungen, die nur von $z$ und $t$ abhängen, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(z,t)$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(z,t)$. Für die z-Komponenten folgt dann

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E_\mathrm{z}}{\partial z} = 0 \tag{16.8}$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{H})_\mathrm{z} = 0 = \frac{\epsilon}{\mathrm{c}}\dot{E}_\mathrm{z} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E_\mathrm{z}}{\partial t} = 0. \tag{16.9}$$

In der z-Richtung ist mit diesem Ansatz also nur ein statisches homogenes Feld, das heißt ein konstantes Feld $E_\mathrm{z}$ möglich. Entsprechendes gilt auch für $H_\mathrm{z}$. Wir sehen hieraus bereits, dass elektromagnetische Wellen Transversal-Wellen sind.

Für die x- und die y-Komponenten folgt

$$(\nabla \times \mathbf{H})_\mathrm{x} = \frac{\epsilon}{\mathrm{c}}\dot{E}_\mathrm{x} \;\rightarrow\; -\nabla_\mathrm{z} H_\mathrm{y} = \frac{\epsilon}{\mathrm{c}}\dot{E}_\mathrm{x} \;\rightarrow\; -\nabla_\mathrm{z}(\sqrt{\mu}H_\mathrm{y}) = \frac{1}{c'}(\sqrt{\epsilon}E_\mathrm{x})^{\cdot} \tag{16.10}$$

$$(\nabla \times \mathbf{E})_\mathrm{y} = -\frac{\mu}{\mathrm{c}}\dot{H}_\mathrm{y} \;\rightarrow\; \nabla_\mathrm{z} E_\mathrm{x} = -\frac{\mu}{\mathrm{c}}\dot{H}_\mathrm{y} \;\rightarrow\; \nabla_\mathrm{z}(\sqrt{\epsilon}E_\mathrm{x}) = -\frac{1}{c'}(\sqrt{\mu}H_\mathrm{y})^{\cdot} \tag{16.11}$$

$E_\mathrm{x}$ ist mit $H_\mathrm{y}$ verknüpft, analog $E_\mathrm{y}$ mit $-H_\mathrm{x}$. Wir können die beiden Gleichungen (16.10) und (16.11) zusammenfassen zu

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\epsilon}E_\mathrm{x} \pm \sqrt{\mu}H_\mathrm{y}) = \mp c'\frac{\partial}{\partial z}(\sqrt{\epsilon}E_\mathrm{x} \pm \sqrt{\mu}H_\mathrm{y}). \tag{16.12}$$

Die Lösung dieser Gleichung und der entsprechenden für $E_\mathrm{y}$ mit $-H_\mathrm{x}$ ist

$$\sqrt{\epsilon}E_\mathrm{x} \pm \sqrt{\mu}H_\mathrm{y} = 2f_\pm(z \mp c't), \tag{16.13}$$

$$\sqrt{\epsilon}E_\mathrm{y} \mp \sqrt{\mu}H_\mathrm{x} = 2g_\pm(z \mp c't), \tag{16.14}$$

mit beliebigen (differenzierbaren) Funktionen $f_\pm$ und $g_\pm$, woraus dann

$$\sqrt{\epsilon}E_\mathrm{x} = f_+(z-c't) + f_-(z+c't) \tag{16.15}$$

$$\sqrt{\mu}H_\mathrm{y} = f_+(z-c't) - f_-(z+c't) \tag{16.16}$$

$$\sqrt{\epsilon}E_\mathrm{y} = g_+(z-c't) + g_-(z+c't) \tag{16.17}$$

$$\sqrt{\mu}H_\mathrm{x} = -g_+(z-c't) + g_-(z+c't) \tag{16.18}$$

folgt. Es handelt sich also um die Überlagerung von Wellen beliebiger Form, die nach oben ($f_+$, $g_+$) und nach unten ($f_-$, $g_-$) mit der Geschwindigkeit $c'$ laufen. $c' = \mathrm{c}/\sqrt{\epsilon\mu}$ ist also die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen (des Lichtes) in dem jeweiligen Medium. Insbesondere finden wir, dass c die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit ist.

The equations (16.5) and (16.6) are called wave equations.

## 16.b Plane Waves

Now we look for particular solutions of the wave equations and begin with solutions which depend only on $z$ and $t$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(z,t)$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(z,t)$. One obtains for the z-components

Thus only a static homogeneous field is possible with this ansatz in z-direction, that is a constant field $E_\mathrm{z}$. The same is true for $H_\mathrm{z}$. We already see, that electromagnetic waves are transversal waves.

For the x- and y-components one obtains

$E_\mathrm{x}$ is connected with $H_\mathrm{y}$, and in the same way $E_\mathrm{y}$ with $-H_\mathrm{x}$. We may combine the equations (16.10) and (16.11)

The solution of this equation and the corresponding one for $E_\mathrm{y}$ with $-H_\mathrm{x}$ is

with arbitrary (differentiable) functions $f_\pm$ and $g_\pm$, from which one obtains

. This is the superposition of waves of arbitrary shapes, which propagate upward ($f_+$, $g_+$) and downward ($f_-$, $g_-$), resp, with velocity $c'$. Thus $c' = \mathrm{c}/\sqrt{\epsilon\mu}$ is the velocity of propagation of the electromagnetic wave (light) in the corresponding medium. In particular we find that c is the light velocity in vacuum.

Wir berechnen noch die Energiedichte

We calculate the density of energy

$$u = \frac{1}{8\pi}(\epsilon E^2 + \mu H^2) = \frac{1}{4\pi}(f_+^2 + g_+^2 + f_-^2 + g_-^2) \tag{16.19}$$

und die Energiestromdichte in Form des Poynting-Vektors

and the density of the energy current by means of the Poynting vector

$$\mathbf{S} = \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{\mathrm{c}'\mathbf{e}_\mathrm{z}}{4\pi}(f_+^2 + g_+^2 - f_-^2 - g_-^2), \tag{16.20}$$

wobei wir ein homogenes Feld in z-Richtung nicht berücksichtigt haben. Durch Vergleich der Ausdrücke für $u$ und $\mathbf{S}$ jeweils nur für die nach oben oder unten laufenden Anteile sieht man, dass die Energie mit der Geschwindigkeit der Welle $\pm c'\mathbf{e}_\mathrm{z}$ transportiert wird, da $\mathbf{S} = \pm c'\mathbf{e}_\mathrm{z} u$. Wir bemerken noch, dass die Welle, für die $E_\mathrm{y} = 0$ und $H_\mathrm{x} = 0$, das heißt $g_\pm = 0$, linear polarisiert in x-Richtung heißt. Für die Angabe der Polarisationsrichtung ist immer die Richtung des Vektors $\mathbf{E}$ maßgeblich.

where a homogeneous field in z-direction is not considered. Comparing the expressions for $u$ and $\mathbf{S}$ separately for the waves moving up and down, one observes, that the energy of the wave is transported with velocity $\pm c'\mathbf{e}_\mathrm{z}$, since $\mathbf{S} = \pm c'\mathbf{e}_\mathrm{z} u$. We remark, that the wave which obeys $E_\mathrm{y} = 0$ and $H_\mathrm{x} = 0$, that is $g_\pm = 0$, is called linearly polarized in x-direction. For the notation of the direction of polarization one always considers that of the vector $\mathbf{E}$.

## 16.c Überlagerung ebener periodischer Wellen

Allgemein kann man die elektrische Feldstärke als Fourier-Integral ansetzen

## 16.c Superposition of Plane Periodic Waves

In general one may describe the electric field in terms of a Fourier integral

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int d^3k d\omega \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \tag{16.21}$$

analog für $\mathbf{H}$. Damit drücken wir die Felder als Überlagerung ebener periodischer Wellen aus.

analogously for $\mathbf{H}$. Then the fields are expressed as a superposition of plane periodic waves.

### 16.c.$\alpha$ Einschub über Fourier-Reihen und Integrale

Die Fourier-Reihe einer Funktion mit Periode $L$, $f(x + L) = f(x)$, lautet

### 16.c.$\alpha$ Insertion on Fourier Series and Integrals

The Fourier series of a function with period $L$, $f(x + L) = f(x)$ reads

$$f(x) = \hat{c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \mathrm{e}^{2\pi i n x/L}. \tag{16.22}$$

$f_n$ sind die Fourier-Koeffizienten von $f$. Die Darstellung ist möglich für quadrat-integrable Funktionen, mit einer endlichen Anzahl von Unstetigkeits-Stellen. $\hat{c}$ ist eine geeignete Konstante. Die Rücktransformation, das heißt die Berechnung der Fourier-Koeffizienten gewinnt man aus

$f_n$ are the Fourier coefficients of $f$. This representation is possible for square integrable functions with a finite number of points of discontinuity. $\hat{c}$ is an appropriate constant. The back-transformation, that is the calculation of the Fourier coefficients is obtained from

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-2\pi i n x/L} f(x) = \hat{c} L f_n, \tag{16.23}$$

wie man durch Einsetzen in (16.22) und Vertauschen von Summation und Integration leicht sehen kann. Die Fourier-Transformation für eine von $-\infty$ bis $+\infty$ definierte nicht notwendig periodische Funktion $f(x)$ gewinnt man, indem man den Grenzübergang $L \to \infty$ durchführt und

as can be seen easily by inserting in (16.22) and exchanging summation and integration. The Fourier transform for a (normally not-periodic) function defined from $-\infty$ to $+\infty$ can be obtained by performing the limit $L \to \infty$ and introducing

$$k := \frac{2\pi n}{L}, \quad f_n = f_0(k), \quad \hat{c} = \Delta k = \frac{2\pi}{L} \tag{16.24}$$

definiert. Dann geht nämlich (16.22) in

. Then (16.22) transforms into

$$f(x) = \sum \Delta k f_0(k) \mathrm{e}^{ikx} \to \int_{-\infty}^{\infty} dk f_0(k) \mathrm{e}^{ikx} \tag{16.25}$$

über und die Rück-Transformation (16.23) in

and the back-transformation (16.23) into

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \mathrm{e}^{-ikx} = 2\pi f_0(k). \tag{16.26}$$

Damit können wir zum Beispiel die Rücktransformation von (16.21) zu

This allows us, e.g., to give the back-transformation from (16.21) to

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 r dt \mathrm{e}^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \tag{16.27}$$

angeben.

.

### 16.c.$\beta$ Zurück zu den Maxwell-Gleichungen

Die Darstellung durch die Fourier-Transformierte hat den Vorteil, dass die Gleichungen einfacher werden. Durch Anwendung der Operationen $\nabla$ und $\partial/\partial t$ auf die Exponentialfunktion

### 16.c.$\beta$ Back to Maxwell's Equations

The representation by the Fourier transform has the advantage, that the equations become simpler. Applying the operations $\nabla$ and $\partial/\partial t$ on the exponential function

$$\nabla \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} = i\mathbf{k} \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} = -i\omega \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \tag{16.28}$$

in den Maxwell-Gleichungen folgt für die Fourier-Komponenten

in Maxwell's equations yields for the Fourier components

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \to \quad i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) = 0 \tag{16.29}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad \to \quad i\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0(\mathbf{k}, \omega) = 0 \tag{16.30}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{\mathrm{c}} \dot{\mathbf{E}} \quad \to \quad i\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0(\mathbf{k}, \omega) = -i\frac{\epsilon}{\mathrm{c}} \omega \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) \tag{16.31}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\mu}{\mathrm{c}} \dot{\mathbf{H}} \quad \to \quad i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) = i\frac{\mu}{\mathrm{c}} \omega \mathbf{H}_0(\mathbf{k}, \omega). \tag{16.32}$$

Der Vorteil dieser Darstellung besteht darin, daß immer nur Fourier-Komponenten mit gleichem $\mathbf{k}$ und $\omega$ miteinander verknüpft sind. Für $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ folgt $\omega = 0$, wobei $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ beliebig sein können. Dies sind die statischen homogenen Felder. Für $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ folgt aus (16.29) und (16.30), dass

The advantage of this representation is that only Fourier components with the same $\mathbf{k}$ and $\omega$ are connected to each other. For $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ one obtains $\omega = 0$, where $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ are arbitrary. These are the static homogeneous fields. For $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ one obtains from (16.29) and (16.30)

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) \perp \mathbf{k}, \quad \mathbf{H}_0(\mathbf{k}, \omega) \perp \mathbf{k}. \tag{16.33}$$

Aus den beiden anderen Gleichungen (16.31) und (16.32) folgt

From the two other equations (16.31) and (16.32) one obtains

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega)) = \frac{\mu}{\mathrm{c}} \omega \mathbf{k} \times \mathbf{H}_0(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{\epsilon\mu}{\mathrm{c}^2} \omega^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega). \tag{16.34}$$

Daraus folgt

From this one obtains

$$\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega)) - k^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{c'^2} \omega^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega), \tag{16.35}$$

analog für $\mathbf{H}_0$. Wegen (16.29) verschwindet der erste Term auf der linken Seite von (16.35). Es gibt also nicht verschwindende Lösungen, wenn die Beziehung $\omega = \pm c'k$ erfüllt ist. Dies ist die Dispersionsrelation für elektromagnetische Wellen, das heißt der Zusammenhang zwischen Frequenz und Wellenvektor für elektromagnetische Wellen. Unter Berücksichtigung dieser Bedingung können wir schreiben

analogously for $\mathbf{H}_0$. The first term on the left hand-side of (16.35) vanishes because of (16.29). Thus there are non-vanishing solutions, if the condition $\omega = \pm c'k$ is fulfilled. This is the dispersion relation for electromagnetic waves that is the relation between frequency and wave-vector for electromagnetic waves. Taking these conditions into account we may write

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{k},\omega) = \frac{1}{2}\delta(\omega - c'k)\mathbf{E}_1(\mathbf{k}) + \frac{1}{2}\delta(\omega + c'k)\mathbf{E}_2(\mathbf{k}). \tag{16.36}$$

und damit

and thus

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \int d^3k \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}_1(\mathbf{k})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_2(\mathbf{k})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+c'kt)}\right). \tag{16.37}$$

Da die elektrische Feldstärke reell sein muss, muss sie mit ihrem Konjugiert-komplexen übereinstimmen

Since the electric field has to be real, it must coincide with its conjugate complex.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^*(\mathbf{r},t) &= \int d^3k \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}_1^*(\mathbf{k})\mathrm{e}^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_2^*(\mathbf{k})\mathrm{e}^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+c'kt)}\right)\\ &= \int d^3k \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}_1^*(-\mathbf{k})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+c'kt)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_2^*(-\mathbf{k})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)}\right).\end{aligned} \tag{16.38}$$

Durch Koeffizienten-Vergleich folgt

From comparison of the coefficients one obtains

$$\mathbf{E}_2^*(\mathbf{k}) = \mathbf{E}_1(-\mathbf{k}). \tag{16.39}$$

Damit haben wir dann

Thus we obtain

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \int d^3k \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}_1(\mathbf{k})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_1^*(-\mathbf{k})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+c'kt)}\right)\\ &= \int d^3k \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}_1(\mathbf{k})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_1^*(\mathbf{k})\mathrm{e}^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)}\right)\\ &= \Re\Big(\int d^3k\mathbf{E}_1(\mathbf{k})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)}\Big).\end{aligned} \tag{16.40}$$

Für $\mathbf{H}_0$ folgt dann aus (16.32)

Eq. (16.32) yields for $\mathbf{H}_0$

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{k},\omega) = \frac{\mathrm{c}}{\mu\omega}\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0(\mathbf{k},\omega) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\left(\delta(\omega - c'k)\frac{\mathbf{k}}{2k}\times\mathbf{E}_1(\mathbf{k}) - \delta(\omega + c'k)\frac{\mathbf{k}}{2k}\times\mathbf{E}_2(\mathbf{k})\right) \tag{16.41}$$

und damit für $\mathbf{H}$

and thus for $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \Re\Big(\int d^3k\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\frac{\mathbf{k}}{k}\times\mathbf{E}_1(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)}\Big). \tag{16.42}$$

Trägt nur eine Fourier-Komponente bei, $\mathbf{E}_1(\mathbf{k}) = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\mathbf{E}_{1,0}$ (Idealisierung), so spricht man von einer monochromatischen Welle,

If only one Fourier component $\mathbf{E}_1(\mathbf{k}) = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)\mathbf{E}_{1,0}$ (idealization) contributes then one has a monochromatic wave

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \Re(\mathbf{E}_{1,0}\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}-c'k_0t)}) \tag{16.43}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\Re\Big(\frac{\mathbf{k}_0}{k_0}\times\mathbf{E}_{1,0}\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}-c'k_0t)}\Big). \tag{16.44}$$

Von linear polarisierten Wellen (Licht) spricht man, wenn $\mathbf{E}_{1,0} = \mathbf{e}_1 E_{1,0}$ mit einem reellen Einheitsvektor $\mathbf{e}_1$, von zirkular polarisierten, wenn $\mathbf{E}_{1,0} = (\mathbf{e}_1 \mp i\mathbf{e}_2)E_{1,0}/\sqrt{2}$ mit reellen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$, wobei $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{k}_0$ eine orthogonale Rechtsbasis bilden. Für das obere Vorzeichen ist die Welle rechts-, für das untere linkspolarisiert.

The wave (light) is called linearly polarized, if $\mathbf{E}_{1,0} = \mathbf{e}_1 E_{1,0}$ with a real unit-vector $\mathbf{e}_1$, it is called circularly polarized if $\mathbf{E}_{1,0} = (\mathbf{e}_1 \mp i\mathbf{e}_2)E_{1,0}/\sqrt{2}$ with real unit vectors $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$, where $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ and $\mathbf{k}_0$ form an orthogonal right-handed basis. The upper sign applies for a right-, the lower for a left-polarized wave.

### 16.c.$\gamma$ Zeitmittelwerte und Zeitintegrale

Die Energiedichte und der Poynting-Vektor sind Größen, die bilinear in den Feldern sind. Hat man etwa monochromatische Wellen, wie in (16.43) und (16.44), so oszillieren diese Größen. Man ist aber oft am Mittelwert dieser Größen interessiert. Haben wir also zwei Größen

### 16.c.$\gamma$ Time averages and time integrals

Energy-density and Poynting-vector are quantities bilinear in the fields. In case of a monochromatic wave as in (16.43) and (16.44) these quantities oscillate. One is often interested in the averages of these quantities. Thus if we have two quantities

$$a = \Re\big(a_0 \mathrm{e}^{-i\omega t}\big), \quad b = \Re\big(b_0 \mathrm{e}^{-i\omega t}\big), \tag{16.45}$$

so ist

then one has

$$ab = \frac{1}{4} a_0 b_0 \mathrm{e}^{-2i\omega t} + \frac{1}{4}(a_0 b_0^* + a_0^* b_0) + \frac{1}{4} a_0^* b_0^* e^{2i\omega t}. \tag{16.46}$$

Der erste und der letzte Term oszillieren (wir nehmen $\omega \neq 0$ an). Sie heben sich im Zeitmittel weg, so dass im Zeitmittel bleibt

The first and the last term oscillate (we assume $\omega \neq 0$). They cancel in the time average. Thus one obtains in the time average

$$\overline{ab} = \frac{1}{4}(a_0 b_0^* + a_0^* b_0) = \frac{1}{2}\Re(a_0^* b_0). \tag{16.47}$$

Man beachte, dass $a_0$ und $b_0$ im allgemeinen komplex sind, und das Zeitmittel wesentlich von der relativen Phase beider Größen und nicht nur von den Beträgen $|a_0|$ und $|b_0|$ abhängt.

Please note, that $a_0$ and $b_0$ are in general complex, and that the time average depends essentially on the relative phase between both quantities and not only on the moduli $|a_0|$ and $|b_0|$.

Sind $a$ und $b$ durch Fourier-Integrale gegeben,

If $a$ and $b$ are given by Fourier integrals

$$a(t) = \Re\Big(\int d\omega a_0(\omega) \mathrm{e}^{-i\omega t}\Big) \tag{16.48}$$

und analog für $b(t)$, so werden häufig die Zeitintegrale über diese Größen und deren Produkte endlich sein. Hierzu müssen wir das Zeitintegral $\int_{-\infty}^{\infty} dt \mathrm{e}^{-i\omega t}$ bestimmen. Dieses Integral ist nicht wohl definiert. Tatsächlich soll es aber mit einer in $\omega$ stetigen Funktion multipliziert werden, so dass es auch genügt, herauszubekommen, wie sich das Zeit-Integral über dieses Frequenz-Integral verhält. Hierzu gehen wir auf die Notation unseres Einschubs mit $x$ und $k$ zurück und stellen fest, dass

and analogously for $b(t)$, then often the time integrals of these quantities and their products over all times will be finite. For this purpose the time integral $\int_{-\infty}^{\infty} dt \mathrm{e}^{-i\omega t}$ has to be determined. This integral is not well defined. In practice it has often to be multiplied with a function continuous in $\omega$. Thus it is sufficient to find out how the time-integral of this frequency-integral behaves. For this purpose we go back to the insertion on Fourier series with $x$ und $k$ and find, that

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx \mathrm{e}^{-2\pi i n x/L} = L\delta_{0,n}, \tag{16.49}$$

also

thus

$$\sum_{n=n_-}^{n_+} \int_{-L/2}^{L/2} dx \mathrm{e}^{-2\pi i n x/L} = L, \tag{16.50}$$

falls $n_- \leq 0$ und $n_+ \geq 0$ sind, sonst verschwindet die Summe. Jetzt führen wir wieder den Limes $L \to \infty$ durch und erhalten

if $n_- \leq 0$ and $n_+ \geq 0$. Otherwise the sum vanishes. Now we perform again the limit $L \to \infty$ and obtain

$$\sum_{k_-}^{k_+} \Delta k \int_{-L/2}^{L/2} dx \mathrm{e}^{-ikx} = \Delta k L \to \int_{k_-}^{k_+} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathrm{e}^{-ikx} = 2\pi, \tag{16.51}$$

falls $k_-$ negativ und $k_+$ positiv sind, sonst ist es Null. Daraus folgt

if $k_-$ is negative and $k_+$ positive, otherwise it vanishes. Thus we obtain

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \mathrm{e}^{-ikx} = 2\pi\delta(k). \tag{16.52}$$

Mit diesem Ergebnis finden wir

With this result we obtain

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt a(t)b(t) = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \big(a_0(\omega) + a_0^*(-\omega)\big)\big(b_0(-\omega) + b_0^*(\omega)\big). \tag{16.53}$$

Treten nur positive Frequenzen $\omega$ unter dem Integral auf, so erhält man

If there are only positive frequencies $\omega$ under the integral then one obtains

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt a(t)b(t) = \frac{\pi}{2} \int_{0}^{\infty} d\omega \big(a_0(\omega)b_0^*(\omega) + a_0^*(\omega)b_0(\omega)\big) = \pi\Re\Big(\int_0^{\infty} d\omega a_0^*(\omega)b_0(\omega)\Big). \tag{16.54}$$

# 17 Elektromagnetische Wellen in homogenen Leitern

## 17.a Transversal-Schwingungen bei niedrigen Frequenzen

Wir untersuchen Transversal-Schwingungen in einem homogenen Leiter. Dabei setzen wir $\mu = 1$. Aus

$$\mathbf{j}_\mathrm{f} = \sigma \mathbf{E} \tag{17.1}$$

folgt

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{\mathrm{c}} \epsilon \dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} \sigma \mathbf{E}. \tag{17.2}$$

Bei periodischen Feldern der Kreisfrequenz $\omega$,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{-i\omega t}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{-i\omega t}, \tag{17.3}$$

entsprechend auch für $\rho_\mathrm{f}$ und $\mathbf{j}_\mathrm{f}$, folgt dann

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_0 + (\frac{i\omega}{\mathrm{c}} \epsilon - \frac{4\pi}{\mathrm{c}} \sigma) \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}. \tag{17.4}$$

Dies können wir auch schreiben

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_0 + \frac{i\omega}{\mathrm{c}} \epsilon(\omega) \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}, \quad \epsilon(\omega) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma}{i\omega}. \tag{17.5}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho}_\mathrm{f} + \operatorname{div} \mathbf{j}_\mathrm{f} = 0 \tag{17.6}$$

folgt

$$-i\omega \rho_{\mathrm{f},0} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{\mathrm{f},0} = 0 \tag{17.7}$$

und damit

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_0 = 4\pi \rho_{\mathrm{f},0} = \frac{4\pi}{i\omega} \operatorname{div} \mathbf{j}_{\mathrm{f},0} = \frac{4\pi\sigma}{i\omega} \operatorname{div} \mathbf{E}_0. \tag{17.8}$$

Damit gilt

$$\epsilon(\omega) \operatorname{div} \mathbf{E}_0 = 0 \tag{17.9}$$

wegen $\operatorname{div} \mathbf{D}_0 = \epsilon \operatorname{div} \mathbf{E}_0$. Wir können daher unsere bisherigen Ergebnisse von Isolatoren auf Leiter übertragen, indem wir $\epsilon$ durch $\epsilon(\omega)$ ersetzen. So finden wir

$$k^2 = \epsilon(\omega) \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}. \tag{17.10}$$

Da $\epsilon(\omega)$ komplex ist, ist für reelles $\omega$ der Wellenvektor $\mathbf{k}$ komplex. Wir setzen

$$\sqrt{\epsilon(\omega)} = n + i\kappa, \quad k = \frac{\omega}{\mathrm{c}}(n + i\kappa) \tag{17.11}$$

# 17 Electromagnetic Waves in Homogeneous Conductors

## 17.a Transverse Oscillations at Low Frequencies

We investigate the transverse oscillations in a homogeneous conductor. We put $\mu = 1$. From

$$\mathbf{j}_\mathrm{f} = \sigma \mathbf{E} \tag{17.1}$$

one obtains

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{\mathrm{c}} \epsilon \dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} \sigma \mathbf{E}. \tag{17.2}$$

For periodic fields of frequency $\omega$,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{-i\omega t}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{-i\omega t}, \tag{17.3}$$

and similarly for $\rho_\mathrm{f}$ and $\mathbf{j}_\mathrm{f}$, one obtains

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_0 + (\frac{i\omega}{\mathrm{c}} \epsilon - \frac{4\pi}{\mathrm{c}} \sigma) \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}. \tag{17.4}$$

This can be written

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_0 + \frac{i\omega}{\mathrm{c}} \epsilon(\omega) \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}, \quad \epsilon(\omega) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma}{i\omega}. \tag{17.5}$$

From the equation of continuity

$$\dot{\rho}_\mathrm{f} + \operatorname{div} \mathbf{j}_\mathrm{f} = 0 \tag{17.6}$$

one obtains

$$-i\omega \rho_{\mathrm{f},0} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{\mathrm{f},0} = 0 \tag{17.7}$$

and thus

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_0 = 4\pi \rho_{\mathrm{f},0} = \frac{4\pi}{i\omega} \operatorname{div} \mathbf{j}_{\mathrm{f},0} = \frac{4\pi\sigma}{i\omega} \operatorname{div} \mathbf{E}_0. \tag{17.8}$$

Thus we have

$$\epsilon(\omega) \operatorname{div} \mathbf{E}_0 = 0 \tag{17.9}$$

because of $\operatorname{div} \mathbf{D}_0 = \epsilon \operatorname{div} \mathbf{E}_0$. We may thus transfer our results from insulators to conductors, if we replace $\epsilon$ by $\epsilon(\omega)$. Thus we obtain

$$k^2 = \epsilon(\omega) \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}. \tag{17.10}$$

Since $\epsilon(\omega)$ is complex, one obtains for real $\omega$ a complex wave-vector $\mathbf{k}$. We put

$$\sqrt{\epsilon(\omega)} = n + i\kappa, \quad k = \frac{\omega}{\mathrm{c}}(n + i\kappa) \tag{17.11}$$

und erhalten mit

$$e^{ikz} = e^{i\omega nz/c - \omega\kappa z/c} \tag{17.12}$$

eine gedämpfte Welle. Für die Felder ergibt sich dann

$$\mathbf{E} = \Re(\mathbf{E}_0 e^{i\omega(nz/c-t)})e^{-\omega\kappa z/c}, \tag{17.13}$$

$$\mathbf{B} = \Re(\sqrt{\epsilon(\omega)}\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_0 e^{i\omega(nz/c-t)})e^{-\omega\kappa z/c}. \tag{17.14}$$

Die Amplitude fällt auf der Strecke $d = \frac{c}{\omega\kappa}$ auf 1/e ab (Eindringtiefe). Für kleine Frequenzen kann man approximieren

$$\sqrt{\epsilon(\omega)} \approx \sqrt{-\frac{4\pi\sigma}{i\omega}} = (1+i)\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}, \quad n = \kappa = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}, \quad d = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}. \tag{17.15}$$

Für Kupfer hat man $\sigma = 5.8 \cdot 10^{17}$ s$^{-1}$, für $\omega = 2\pi \cdot 50$ s$^{-1}$ folgt $d = 9$ mm. Man spricht vom Skin-Effekt. Der Wechselstrom fällt im Leiter nach innen exponentiell ab, wobei der Abfall für höhere Frequenzen rapider ist.

## 17.b Transversal-Schwingungen bei hohen Frequenzen

Tatsächlich hängen $\epsilon$ und $\sigma$ von $\omega$ ab. Wir wollen das Frequenz-Verhalten der Leitfähigkeit modellmäßig betrachten und gehen von der Bewegungsgleichung eines Ladungsträgers (zum Beispiel eines Elektrons im Metall) aus,

$$m_0\ddot{\mathbf{r}} = e_0\mathbf{E} - \frac{m_0}{\tau}\dot{\mathbf{r}}, \tag{17.16}$$

wobei $m_0$ und $e_0$ Masse und Ladung des Ladungsträgers seien. Der letzte Term ist ein Reibungsterm, der die Stöße mit anderen Teilchen pauschal beschreibt. Dabei ist $\tau$ die Relaxationszeit, die angibt, wie rasch die Bewegung ohne elektrisches Feld abklingt. Mit $\mathbf{j}_f = \rho_f\dot{\mathbf{r}} = n_0 e_0\dot{\mathbf{r}}$, wobei $n_0$ die Dichte der freibeweglichen Ladungsträger ist, folgt dann

$$\frac{m_0}{n_0 e_0}\frac{\partial \mathbf{j}_f}{\partial t} = e_0\mathbf{E} - \frac{m_0}{n_0\tau e_0}\mathbf{j}_f. \tag{17.17}$$

Im stationären Fall $\partial\mathbf{j}_f/\partial t = \mathbf{0}$ folgt die statische Leitfähigkeit $\sigma_0 = \frac{n_0\tau e_0^2}{m_0}$, so dass wir

$$\tau\frac{\partial \mathbf{j}_f}{\partial t} = \sigma_0\mathbf{E} - \mathbf{j}_f \tag{17.18}$$

schreiben können. Mit der Zeitabhängigkeit $\propto e^{-i\omega\tau}$ folgt dann

$$(1 - i\omega\tau)\mathbf{j}_{f,0} = \sigma_0\mathbf{E}_0, \tag{17.19}$$

and obtain a damped wave with

. For the fields we obtain

The amplitude decays in a distance $d = \frac{c}{\omega\kappa}$ by a factor 1/e. This distance is called penetration depth or skin depth. For small frequencies one can approximate

For copper one has $\sigma = 5.8 \cdot 10^{17}$ s$^{-1}$, for $\omega = 2\pi \cdot 50$ s$^{-1}$ one obtains $d = 9$ mm. This effect is called the skin-effect. The alternating current decays exponentially inside the conductor. For larger frequencies the decay is more rapidly.

## 17.b Transverse Oscillations at High Frequencies

In reality $\epsilon$ and $\sigma$ depend on $\omega$. We will now consider the frequency dependence of the conductivity within a simple model and start out from the equation of motion of a charge (for example an electron in a metal)

where $m_0$ and $e_0$ are mass and charge of the carrier. The last term is a friction term which takes the collisions with other particles in a rough way into account. There $\tau$ is the relaxation time, which describes how fast the velocity decays in the absense of an electric field. One obtains with $\mathbf{j}_f = \rho_f\dot{\mathbf{r}} = n_0 e_0\dot{\mathbf{r}}$, where $n_0$ is the density of the freely moving carriers

In the stationary case $\partial\mathbf{j}_f/\partial t = \mathbf{0}$ one obtains the static conductivity $\sigma_0 = \frac{n_0\tau e_0^2}{m_0}$. Thus we can write

. With the time dependence $\propto e^{-i\omega\tau}$ one obtains

was aufgelöst wird zu

which can be rewritten

$$\mathbf{j}_{\mathrm{f},0} = \sigma(\omega)\mathbf{E}_0 \tag{17.20}$$

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1-i\omega\tau} \tag{17.21}$$

$$\epsilon(\omega) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma_0}{i\omega(1-i\omega\tau)}. \tag{17.22}$$

Für hohe Frequenzen, $\omega\tau \gg 1$ folgt daraus

For large frequencies, $\omega\tau \gg 1$ one obtains

$$\epsilon(\omega) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma_0}{\tau\omega^2} = \epsilon - \frac{4\pi n_0 e_0^2}{m_0\omega^2} = \epsilon\big(1 - \frac{\omega_{\mathrm{P}}^2}{\omega^2}\big) \tag{17.23}$$

mit der Plasmafrequenz

with the plasma frequency

$$\omega_{\mathrm{P}} = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e_0^2}{\epsilon m_0}}. \tag{17.24}$$

Für $\omega < \omega_{\mathrm{P}}$ erhält man ein negatives $\epsilon(\omega)$, das heißt

For $\omega < \omega_{\mathrm{P}}$ one obtains a negative $\epsilon(\omega)$, that is

$$n = 0, \quad \kappa = \sqrt{\epsilon\big(\frac{\omega_{\mathrm{P}}^2}{\omega^2} - 1\big)} \tag{17.25}$$

mit einem exponentiellen Abfall der Welle. Für $\omega > \omega_{\mathrm{P}}$ dagegen wird $\epsilon$ positiv,

with an exponential decay of the wave. However, for $\omega > \omega_{\mathrm{P}}$ one obtains a positive $\epsilon$

$$n = \sqrt{\epsilon\big(1 - \frac{\omega_{\mathrm{P}}^2}{\omega^2}\big)}, \quad \kappa = 0. \tag{17.26}$$

Für diese hohen Frequenzen ist der Leiter durchsichtig. Für Kupfer hat man $1/\tau = 3.7 \cdot 10^{13}$ s$^{-1}$, $\sigma_0 = 5.8 \cdot 10^{17}$ s$^{-1}$ und $\omega_{\mathrm{P}} = 1.6 \cdot 10^{16}$ s$^{-1}$. Für sichtbares Licht hat man den Frequenz-Bereich $\omega = 2.4...5.2 \cdot 10^{15}$ s$^{-1}$, so dass Kupfer im sichtbaren Bereich undurchsichtig ist. In Elektrolyten ist jedoch die Ladungsträgerdichte niedriger, die Masse der Ladungsträger höher, so dass die Plasmafrequenz niedriger ist. Daher sind Elektrolyte in der Regel durchsichtig.

For such large frequencies the conductor becomes transparent. For copper one has $1/\tau = 3.7 \cdot 10^{13}$ s$^{-1}$, $\sigma_0 = 5.8 \cdot 10^{17}$ s$^{-1}$ and $\omega_{\mathrm{P}} = 1.6 \cdot 10^{16}$ s$^{-1}$. For visible light one has the frequency-region $\omega = 2.4...5.2 \cdot 10^{15}$ s$^{-1}$, so that copper is non-transparent in the visible range. In electrolytes, however, the carrier density is less, the mass is bigger, so that the plasma-frequency is smaller. Thus electrolytes are normally transparent.

## 17.c Longitudinale = Plasma-Schwingungen

Für $\omega = \omega_{\mathrm{P}}$ ist $\epsilon(\omega) = 0$. Dann erlaubt (17.9) longitudinale elektrische Wellen

## 17.c Longitudinal = Plasma Oscilations

One has $\epsilon(\omega) = 0$ for $\omega = \omega_{\mathrm{P}}$. Then (17.9) allows for longitudinal electric waves

$$\mathbf{E} = E_0\mathbf{e}_z \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega_{\mathrm{P}} t)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}. \tag{17.27}$$

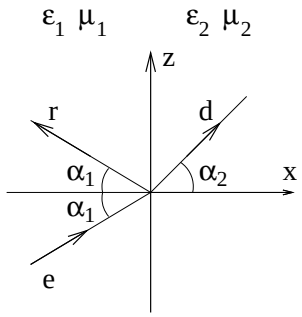
Diese gehen mit longitudinalen Schwingungen der Ladungsträger einher, die man erhält, wenn man den Reibungsterm in (17.17) vernachlässigt.

These go along with longitudinal oscillations of the charge carriers, which are obtained by neglecting the friction term in (17.17).

# 18 Reflexion und Brechung an einer ebenen Grenzfläche

## 18.a Problemstellung und Ausbreitungsrichtung

Wir betrachten eine einlaufende ebene Welle $\propto \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}_\mathrm{e}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ für $x < 0$, $\mathbf{k}_\mathrm{e} = (k', 0, k_\mathrm{z})$, die auf die Grenzfläche $x = 0$ auftrifft. Für $x < 0$ habe man die Dielektrizitätskonstante $\epsilon_1$ und die Permeabilität $\mu_1$, für $x > 0$ habe man $\epsilon_2$ und $\mu_2$. An der Grenzfläche $x = 0$ variiert die Welle wie $\propto \mathrm{e}^{i(k_\mathrm{z}z-\omega t)}$. Für die reflektierte und die gebrochene Welle hat man das gleiche Verhalten an der Grenzfläche, das heißt sie stimmen alle in $k_\mathrm{z}$, $k_\mathrm{y}$ und $\omega$ überein und unterscheiden sich nur in $k_\mathrm{x}$. Aus




$$\mathbf{k}_i^2 = \frac{\epsilon_i\mu_i\omega^2}{\mathrm{c}^2} = \frac{n_i^2\omega^2}{\mathrm{c}^2}, \quad n_i = \sqrt{\epsilon_i\mu_i} \tag{18.1}$$

folgt

$$k_1^2 = k_\mathrm{z}^2 + k'^2 = \frac{n_1^2\omega^2}{\mathrm{c}^2} \qquad \mathbf{k}_\mathrm{r} = (-k', 0, k_\mathrm{z}) \tag{18.2}$$

$$k_2^2 = k_\mathrm{z}^2 + k''^2 = \frac{n_2^2\omega^2}{\mathrm{c}^2} \qquad \mathbf{k}_\mathrm{d} = (k'', 0, k_\mathrm{z}). \tag{18.3}$$

Dabei sind $n_{1,2}$ die Brechzahlen der beiden Medien. Die x-Komponente des Wellenvektors der reflektierten Welle $\mathbf{k}_\mathrm{r}$ ist gerade das Negative der einlaufenden Welle. Daher stimmt der Einfallswinkel $\alpha_1$ mit dem Reflexionswinkel überein. Falls $k''$ reell ist, muss man $k'' > 0$ wählen, damit die Welle ausläuft und nicht einläuft. Falls $k''$ imaginär ist, muss man $\Im k'' > 0$ wählen, damit die Welle im Material 2 exponentiell abklingt und nicht anwächst. Für reelles $k''$ hat man

$$k_\mathrm{z} = k_1 \sin\alpha_1 = k_2 \sin\alpha_2. \tag{18.4}$$

Daraus folgt mit (18.1) das Snelliussche Brechungsgesetz

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2. \tag{18.5}$$

# 18 Reflection and Refraction at a Planar Surface

## 18.a Problem and Direction of Propagation

We consider an incident plane wave $\propto \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}_\mathrm{e}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ for $x < 0$, $\mathbf{k}_\mathrm{e} = (k', 0, k_\mathrm{z})$, which hits the plane boundary $x = 0$. For $x < 0$ the dielectric constant and the permeability be $\epsilon_1$ and $\mu_1$, resp., for $x > 0$ these constants are $\epsilon_2$ and $\mu_2$. At the boundary $x = 0$ the wave oscillates $\propto \mathrm{e}^{i(k_\mathrm{z}z-\omega t)}$. The reflected and the refracted wave show the same behaviour at the boundary, that is all three waves have $k_\mathrm{z}$, $k_\mathrm{y}$ and $\omega$ in common and differ only in $k_\mathrm{x}$. From

one obtains

Here $n_{1,2}$ are the indices of refraction of both media. The x-component of the wave-vector of the reflected wave $\mathbf{k}_\mathrm{r}$ is the negative of that of the incident wave. Thus the angle of the incident wave $\alpha_1$ and of the reflected wave are equal. If $k''$ is real then $k'' > 0$ has to be chosen so that the wave is outgoing and not incoming. If $k''$ is imaginary then $\Im k'' > 0$ has to be chosen, so that the wave decays exponentially in the medium 2 and does grow exponentially. For real $k''$ one has

Thus Snell's law follows from (18.1)

Falls sich $\sin\alpha_2 > 1$ ergibt, entspricht das einem imaginären $k''$. Wir bemerken schließlich noch

If $\sin\alpha_2 > 1$ results, then this corresponds to an imaginary $k''$. We finally remark

$$\frac{k'}{k''} = \frac{k_1 \cos\alpha_1}{k_2 \cos\alpha_2} = \frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1}. \tag{18.6}$$

## 18.b Grenzbedingungen, Amplituden

Wir müssen nun zwei Polarisationen unterscheiden. Diese werden auf die Einfallsebene bezogen. Diese ist die von der Richtung des einfallenden Strahls und von der Normalen auf die Grenzfläche aufgespannte Ebene (in unseren Koordinaten die x-z-Ebene). Die Polarisation 1 liegt senkrecht zur Einfallsebene, das heißt **E** ist in y-Richtung polarisiert. Die Polarisation 2 liegt in der Einfallsebene, **H** liegt in y-Richtung. Man erhält dann folgende Polarisationen und Stetigkeitsbedingungen

## 18.b Boundary Conditions, Amplitudes

In the following we have to distinguish two polarizations. They are referred to the plane of incidence. The plane of incidence is spaned by the direction of the incident wave and by the normal to the boundary (in our coordinates the x-z-plane). The polarization 1 is perpendicular to the plane of incidence, that is **E** is polarized in y-direction. The polarization 2 lies in the plane of incidence, **H** points in y-direction. One obtains the following conditions on polarization and continuity

| | Polarisation 1<br>polarization 1 | Polarisation 2<br>polarization 2 | |
|---|---|---|---|
| **E** | $\perp$ Einfallsebene<br>$\perp$ plane of inc. | in Einfallsebene<br>in plane of inc. | |
| **H** | in Einfallsebene<br>in plane of inc. | $\perp$ Einfallsebene<br>$\perp$ plane of inc. | |
| $\mathbf{E}_\mathrm{t}$ | $E_{1,\mathrm{y}} = E_{2,\mathrm{y}}$ | $E_{1,\mathrm{z}} = E_{2,\mathrm{z}}$ | (18.7) |
| $D_\mathrm{n} = \epsilon E_\mathrm{n}$ | | $\epsilon_1 E_{1,\mathrm{x}} = \epsilon_2 E_{2,\mathrm{x}}$ | (18.8) |
| $\mathbf{H}_\mathrm{t}$ | $H_{1,\mathrm{z}} = H_{2,\mathrm{z}}$ | $H_{1,\mathrm{y}} = H_{2,\mathrm{y}}$ | (18.9) |
| $B_\mathrm{n} = \mu H_\mathrm{n}$ | $\mu_1 H_{1,\mathrm{x}} = \mu_2 H_{2,\mathrm{x}}$ | | (18.10) |

Für die Polarisation 1 hat man daher für die elektrische Feldstärke

Thus the ansatz for the electric field of polarization 1 is

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{e}^{i(k_\mathrm{z} z - \omega t)}\mathbf{e}_\mathrm{y} \cdot \begin{cases} (E_\mathrm{e}\mathrm{e}^{ik'x} + E_\mathrm{r}\mathrm{e}^{-ik'x}) & x < 0 \\ E_\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{ik''x} & x > 0 \end{cases} \tag{18.11}$$

anzusetzen. Aus den Maxwell-Gleichungen erhält man daraus die magnetische Feldstärke

. From Maxwell's equations one obtains for the magnetic field

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\mu}{\mathrm{c}}\dot{\mathbf{H}} = \frac{i\omega\mu}{\mathrm{c}}\mathbf{H}, \tag{18.12}$$

$$\mu H_\mathrm{x} = \frac{\mathrm{c}}{i\omega}(\mathrm{rot}\,\mathbf{E})_\mathrm{x} = -\frac{\mathrm{c}}{i\omega}\frac{\partial E_\mathrm{y}}{\partial z} = -\frac{\mathrm{c}k_\mathrm{z}}{\omega}E_\mathrm{y} \tag{18.13}$$

$$H_\mathrm{z} = \frac{\mathrm{c}}{i\mu\omega}\frac{\partial E_\mathrm{y}}{\partial x} = \mathrm{e}^{i(k_\mathrm{z}z-\omega t)}\frac{\mathrm{c}}{\omega} \cdot \begin{cases} \frac{k'}{\mu_1}(E_\mathrm{e}e^{ik'x} - E_\mathrm{r}e^{-ik'x}) & x < 0 \\ \frac{k''}{\mu_2}E_\mathrm{d}e^{ik''x} & x > 0. \end{cases} \tag{18.14}$$

Die Randbedingungen ergeben sich aus der Stetigkeit von $E_\mathrm{y}$, die mit der Stetigkeit von $H_\mathrm{x}$ identisch ist, und aus der Stetigkeit von $H_\mathrm{z}$,

The boundary conditions come from the continuity of $E_\mathrm{y}$, which is identical to the continuity of $H_\mathrm{x}$, and from the continuity of $H_\mathrm{z}$,

$$E_\mathrm{e} + E_\mathrm{r} = E_\mathrm{d}, \quad \frac{k'}{\mu_1}(E_\mathrm{e} - E_\mathrm{r}) = \frac{k''}{\mu_2}E_\mathrm{d}, \tag{18.15}$$

woraus die Amplituden

from which one obtains the amplitudes

$$E_\mathrm{r} = \frac{\mu_2 k' - \mu_1 k''}{\mu_2 k' + \mu_1 k''}E_\mathrm{e}, \quad E_\mathrm{d} = \frac{2\mu_2 k'}{\mu_2 k' + \mu_1 k''}E_\mathrm{e} \tag{18.16}$$

folgen.

.

Von der Polarisation 1 gelangt man zur Polarisation 2 durch die Transformation

One comes from polarization 1 to polarization 2 by the transformation

$$\mathbf{E} \to \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \to -\mathbf{E}, \quad \epsilon \leftrightarrow \mu. \tag{18.17}$$

Daher erhält man für die Amplituden

Thus one obtains for the amplitudes

$$H_{\rm r} = \frac{\epsilon_2 k' - \epsilon_1 k''}{\epsilon_2 k' + \epsilon_1 k''} H_{\rm e}, \quad H_{\rm d} = \frac{2\epsilon_2 k'}{\epsilon_2 k' + \epsilon_1 k''} H_{\rm e}. \tag{18.18}$$

## 18.c Diskussion für $\mu_1 = \mu_2$

## 18.c Discussion for $\mu_1 = \mu_2$

Wir diskutieren nun die Ergebnisse für $\mu_1 = \mu_2$, da für viele Materialien die Permeabilität praktisch gleich 1 ist.

Now we discuss the results for $\mu = 1 = \mu_2$, since for many media the permeability is practically equal to 1.

### 18.c.$\alpha$ Isolator, $|\sin\alpha_2| < 1$: Brechung

### 18.c.$\alpha$ Insulator, $|sin\alpha_2| < 1$: Refraction

Wir bestimmen nun die Amplitude der reflektierten Welle aus der der einfallenden Welle. Der Reflexionskoeffizient $R$, das heißt der Anteil der Strahlungsleistung, die reflektiert wird, ergibt sich zu

Now we determine the amplitude of the reflected wave from that of the incident wave. The reflection coefficient $R$, that is the percentage of the incident power which is reflected is given by

$$R = \left(\frac{E_{\rm r}}{E_{\rm e}}\right)^2 = \left(\frac{H_{\rm r}}{H_{\rm e}}\right)^2, \tag{18.19}$$

da der zeitgemittelte Poynting-Vektor $\mathbf{S} = \mathrm{c}\mathbf{E} \times \mathbf{H}/(4\pi)$ für Vektoren $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$, die orthogonal auf einander stehen, sich betragsmäßig zu

since the modulus of the time averaged Poynting vector $\mathbf{S} = \mathrm{c}\mathbf{E} \times \mathbf{H}/(4\pi)$ for vectors $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ which are orthogonal to each other yields

$$\overline{|\mathbf{S}|} = \frac{\mathrm{c}}{8\pi} |\mathbf{E}| \cdot |\mathbf{H}| = \frac{c'}{8\pi} \epsilon E^2 = \frac{c'}{8\pi} \mu H^2 \tag{18.20}$$

ergibt. Für die Polarisation 1 ergibt sich mit (18.6)

. For the polarisation 1 one obtains with (18.6)

$$E_{\rm r} = \frac{k' - k''}{k' + k''} E_{\rm e} = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{\tan\alpha_2 + \tan\alpha_1} E_{\rm e} = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_2 + \alpha_1)} E_{\rm e}. \tag{18.21}$$

Für die Polarisation 2 folgt

For polarization 2 one has

$$H_{\rm r} = \frac{n_2^2 k' - n_1^2 k''}{n_2^2 k' + n_1^2 k''} H_{\rm e} = \frac{\sin^2\alpha_1 \tan\alpha_2 - \sin^2\alpha_2 \tan\alpha_1}{\sin^2\alpha_1 \tan\alpha_2 + \sin^2\alpha_2 \tan\alpha_1} H_{\rm e} = \frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_2)} H_{\rm e}. \tag{18.22}$$

Man erkennt, dass bei der Polarisation 2 die Reflexion verschwindet, wenn $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^0$, woraus dann wegen $\sin\alpha_2 = \cos\alpha_1$ und (18.5) $\tan\alpha_1 = n_2/n_1$ folgt. Dies ist der Brewstersche Winkel. Bei Einfall von Licht unter diesem Winkel wird nur Licht der Polarisation 1 reflektiert. Dies kann zur Erzeugung linear polarisierten Lichtes verwendet werden. Im Limes $\alpha$ gegen Null, das heißt bei senkrechtem Auffall des Lichtes ergibt sich für beide Polarisationen (die in diesem Limes nicht mehr zu unterscheiden sind)

One finds, that the reflection vanishes for polarization 2 for $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^0$, from which one obtains $\tan\alpha_1 = n_2/n_1$ because of $\sin\alpha_2 = \cos\alpha_1$ and (18.5). This angle is called Brewster's angle. By incidence of light under this angle only light of polarization 1 is reflected. This can be used to generate linearly polarized light. In the limit $\alpha$ approaching zero, that is by incidence of the light perpendicular to the surface one obtains for both polarizations (which can no longer be distinguished)

$$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2, \quad \alpha = 0 \tag{18.23}$$

### 18.c.$\beta$ Isolator, $|\sin\alpha_2| > 1$: Totalreflexion

In diesem Fall ist $k''$ imaginär. Die Welle dringt nur noch exponentiell abklingend in das zweite Material ein. Jeweils den ersten Ausdrücken in (18.21) und (18.22) entnimmt man, da der Zähler des Bruchs das konjugiert Komplexe des Nenners ist, dass

$$|E_\mathrm{r}| = |E_\mathrm{e}|, \quad |H_\mathrm{r}| = |H_\mathrm{e}|. \quad R = 1, \tag{18.24}$$

Man hat also Totalreflexion.

### 18.c.$\beta$ Insulator, $|sin\alpha_2| > 1$: Total Reflection

In this case $k''$ is imaginary. The wave penetrates only exponentially decaying into the second medium. From the first expressions of (18.21) and (18.22) one finds since the numerator of the fraction is the conjugate complex of the denominator, that

Thus one has total reflection.

### 18.c.$\gamma$ Metallische Reflexion, $\alpha = 0$

Im Falle der metallischen Reflexion setzen wir $n_1 = 1$ (Vakuum oder Luft) und $n_2 = n + i\kappa$ (17.11). Dann folgt für den Reflexionskoeffizient für $\alpha = 0$ aus (18.23)

$$R = \left|\frac{n + i\kappa - 1}{n + i\kappa + 1}\right| = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2} = 1 - \frac{4n}{(n+1)^2 + \kappa^2}. \tag{18.25}$$

Für $\omega\epsilon \ll 2\pi\sigma$ folgt dann aus (17.5) und (17.15)

$$n \approx \kappa \approx \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}, \quad R \approx 1 - \frac{2}{n} \approx 1 - \sqrt{\frac{2\omega}{\pi\sigma}}, \tag{18.26}$$

ein Ergebnis, das nach Hagen und Rubens benannt ist.

### 18.c.$\gamma$ Metallic Reflection, $\alpha = 0$

In the case of metallic reflection we set $n_1 = 1$ (vacuum or air) and $n_2 = n + i\kappa$ (17.11). Then one obtains from (18.23) for $\alpha = 0$ the reflection coefficient

For $\omega\epsilon \ll 2\pi\sigma$ one obtains from (17.5) and (17.15)

a result named after Hagen and Rubens.

### 18.c.$\delta$ Oberflächenwellen am Leiter

Wir wollen nun noch Wellen betrachten, die sich an der Grenzfläche von Leiter und Vakuum entlang bewegen. Wir setzen also $\epsilon_1 = 1$ und $\epsilon_2 = \epsilon(\omega)$ aus (17.5). Wir benötigen dann auf jeder Seite der Grenzfläche genau eine Welle. Das erreichen wir, wenn wir die Lösung aufsuchen, bei der keine Welle reflektiert wird. Das heißt, wir nehmen formal die Welle mit Polarisation 2, bei der $H_\mathrm{r}$ in (18.18) verschwindet, also

$$\epsilon(\omega)k' = k'' \tag{18.27}$$

gilt. Zusammen mit (18.2) und (18.3)

$$k_\mathrm{z}^2 + k'^2 = \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}, \quad k_\mathrm{z}^2 + k''^2 = \frac{\epsilon(\omega)\omega^2}{\mathrm{c}^2} \tag{18.28}$$

findet man die Lösung

$$k_\mathrm{z} = \frac{\omega}{\mathrm{c}}\sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{1+\epsilon(\omega)}}, \quad k' = \frac{k_\mathrm{z}}{\sqrt{\epsilon(\omega)}}, \quad k'' = \sqrt{\epsilon(\omega)}k_\mathrm{z}. \tag{18.29}$$

### 18.c.$\delta$ Surfave Waves along a Conductor

Finally we consider waves, which run along the boundary of a conductor with the vacuum. Thus we set $\epsilon_1 = 1$ and $\epsilon_2 = \epsilon(\omega)$ from (17.5). Then we need one wave on each side of the boundary. We obtain this by looking for a solution, where no wave is reflected. Formally this means that we choose a wave of polarization 2 for which $H_\mathrm{r}$ in (18.18) vanishes, thus

has to hold. With (18.2) and (18.3)

one obtains the solution

Mit der Näherung (17.15) erhält man für nicht zu große Frequenzen

Using approximation (17.15) one obtains for frequencies which are not too large

$$k_z = \frac{\omega}{c}\left(1 + \frac{i\omega}{8\pi\sigma}\right) \tag{18.30}$$

$$k' = \frac{(1-i)\omega^{3/2}}{2c\sqrt{2\pi\sigma}} \tag{18.31}$$

$$k'' = \frac{(1+i)\omega^{1/2}\sqrt{2\pi\sigma}}{c}. \tag{18.32}$$

Für kleine Frequenzen, $\omega < \sigma$, ist daher der exponentielle Abfall in Ausbreitungsrichtung ($k_z$) am langsamsten, in das Vakuum hinein etwas schneller ($k'$) und im Metall am schnellsten ($k''$).

Thus for small frequencies, $\omega < \sigma$, the exponential decay in direction of propagation ($k_z$) is smallest, into the vacuum it is faster ($k'$) and into the metal it is fastest ($k''$).

# 19 Hohlleiter

Es gibt verschiedene Arten von Wellenleitern. Diese können zum Beispiel aus zwei Leitern bestehen, die entweder nebeneinander herlaufen (zwei Drähte) oder koaxiale Leiter sind. Man kann aber auch elektromagnetische Wellen in einem dielektrischen Wellenleiter (Lichtleiter) oder in einem Hohlleiter führen.

In allen Fällen wollen wir davon ausgehen, dass Translationsinvarianz in z-Richtung besteht, so dass die Materialgrößen $\epsilon$, $\mu$ und $\sigma$ nur Funktionen von $x$ und $y$ sind. Dann kann man die elektromagnetischen Felder ansetzen zu

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x,y)e^{i(k_\mathrm{z} z-\omega t)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0(x,y)e^{i(k_\mathrm{z} z-\omega t)}. \tag{19.1}$$

Es bleiben nun die Funktionen $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ und $\omega(k_\mathrm{z})$ zu bestimmen.

## 19.a Hohlleiter

Wir wollen das Programm für einen Hohlleiter durchführen, das heißt für einen Metallzylinder (nicht notwendig mit kreisförmigem Querschnitt). Wir beginnen mit den Randbedingungen, wobei wir die metallische Oberfläche als idealen Leiter annehmen, $\sigma = \infty$. Dann gilt an der Oberfläche

$$\mathbf{E}_\mathrm{t} = \mathbf{0}, \tag{19.2}$$

da eine tangentiale Komponente eine unendlich große Stromdichte an der Oberfläche bewirken würde. Weiter folgt aus $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}/\mathrm{c}$

$$ikB_\mathrm{n} = (\mathrm{rot}\,\mathbf{E})_\mathrm{n} = (\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_\mathrm{t})\cdot\mathbf{e}_\mathrm{n} \quad k = \omega/\mathrm{c}, \tag{19.3}$$

woraus

$$B_\mathrm{n} = 0 \tag{19.4}$$

folgt.

Im Inneren des Hohlleiters gilt

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{E})_\mathrm{y} = -\frac{1}{\mathrm{c}}\dot{B}_\mathrm{y} \quad \rightarrow \quad ik_\mathrm{z}E_{0,\mathrm{x}} - \nabla_\mathrm{x}E_{0,\mathrm{z}} = ikB_{0,\mathrm{y}} \tag{19.5}$$

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{B})_\mathrm{x} = \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{E}_\mathrm{x} \quad \rightarrow \quad \nabla_\mathrm{y}B_{0,\mathrm{z}} - ik_\mathrm{z}B_{0,\mathrm{y}} = -ikE_{0,\mathrm{x}}. \tag{19.6}$$

Unter Verwendung von

$$k_\perp^2 = k^2 - k_\mathrm{z}^2 \tag{19.7}$$

# 19 Wave Guides

There are various kinds of wave guides. They may consist for example of two conductors, which run in parallel (two wires) or which are coaxial conductors. But one may also guide an electromagnetic wave in a dielectric wave guide (for light e.g.) or in a hollow metallic cylinder.

In all cases we assume translational invariance in z-direction, so that material properties $\epsilon$, $\mu$, and $\sigma$ are only functions of $x$ and $y$. Then the electromagnetic fields can be written

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x,y)e^{i(k_\mathrm{z} z-\omega t)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0(x,y)e^{i(k_\mathrm{z} z-\omega t)}. \tag{19.1}$$

Then the functions $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ and $\omega(k_\mathrm{z})$ have to be determined.

## 19.a Wave Guides

We will carry through this program for a wave guide which is a hollow metallic cylinder (not necessarily with circular cross-section). We start out from the boundary conditions, where we assume that the cylinder surface is an ideal metal $\sigma = \infty$. Then one has at the surface

$$\mathbf{E}_\mathrm{t} = \mathbf{0}, \tag{19.2}$$

since a tangential component would yield an infinite current density at the surface. Further from $\mathrm{curl}\,\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}/\mathrm{c}$ it follows, that

$$ikB_\mathrm{n} = (\mathrm{rot}\,\mathbf{E})_\mathrm{n} = (\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_\mathrm{t})\cdot\mathbf{e}_\mathrm{n} \quad k = \omega/\mathrm{c}, \tag{19.3}$$

from which one obtains

$$B_\mathrm{n} = 0 \tag{19.4}$$

.

Inside the wave guide one has

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{E})_\mathrm{y} = -\frac{1}{\mathrm{c}}\dot{B}_\mathrm{y} \quad \rightarrow \quad ik_\mathrm{z}E_{0,\mathrm{x}} - \nabla_\mathrm{x}E_{0,\mathrm{z}} = ikB_{0,\mathrm{y}} \tag{19.5}$$

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{B})_\mathrm{x} = \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{E}_\mathrm{x} \quad \rightarrow \quad \nabla_\mathrm{y}B_{0,\mathrm{z}} - ik_\mathrm{z}B_{0,\mathrm{y}} = -ikE_{0,\mathrm{x}}. \tag{19.6}$$

By use of

$$k_\perp^2 = k^2 - k_\mathrm{z}^2 \tag{19.7}$$

lassen sich die Transversalkomponenten durch die Longitudinalkomponenten ausdrücken

one can express the transverse components by the longitudinal components

$$k_\perp^2 E_{0,\mathrm{x}} = ik_\mathrm{z}\nabla_\mathrm{x} E_{0,\mathrm{z}} + ik\nabla_\mathrm{y} B_{0,\mathrm{z}} \tag{19.8}$$

$$k_\perp^2 B_{0,\mathrm{y}} = ik\nabla_\mathrm{x} E_{0,\mathrm{z}} + ik_\mathrm{z}\nabla_\mathrm{y} B_{0,\mathrm{z}}. \tag{19.9}$$

Ähnliche Gleichungen gelten für $E_{0,\mathrm{y}}$ und $B_{0,\mathrm{x}}$. Zur Bestimmung der Longitudinalkomponenten verwenden wir die Wellengleichung

Similar equations hold for $E_{0,\mathrm{y}}$ and $B_{0,\mathrm{x}}$. In order to determine the longitudinal components we use the wave equation

$$(\triangle - \frac{\partial^2}{\mathrm{c}^2\partial t^2})(E_{0,\mathrm{z}} e^{i(k_\mathrm{z} z - \omega t)}) = 0, \tag{19.10}$$

woraus

from which one obtains

$$(\nabla_\mathrm{x}^2 + \nabla_\mathrm{y}^2 + k_\perp^2) E_{0,\mathrm{z}}(x,y) = 0 \tag{19.11}$$

und analog

and similarly

$$(\nabla_\mathrm{x}^2 + \nabla_\mathrm{y}^2 + k_\perp^2) B_{0,\mathrm{z}}(x,y) = 0 \tag{19.12}$$

folgt. Man kann zeigen, dass damit für $k_\perp \neq 0$ auch die übrigen Maxwell-Gleichungen erfüllt sind. Es gilt nämlich

. One can show that the other equations of Maxwell are fulfilled for $k_\perp \neq 0$, since

$$\left.\begin{array}{r} k_\perp^2 \,\mathrm{div}\,\mathbf{E} = ik_\mathrm{z} \\ k_\perp^2 (\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B} - \dot{\mathbf{E}}/\mathrm{c})_\mathrm{z} = ik \end{array}\right\} \cdot (\nabla_\mathrm{x}^2 + \nabla_\mathrm{y}^2 + k_\perp^2) E_{0,\mathrm{z}} e^{i(k_\mathrm{z} z - \omega t)} \tag{19.13}$$

$$\left.\begin{array}{r} k_\perp^2 \,\mathrm{div}\,\mathbf{B} = ik_\mathrm{z} \\ k_\perp^2 (\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}}/\mathrm{c})_\mathrm{z} = -ik \end{array}\right\} \cdot (\nabla_\mathrm{x}^2 + \nabla_\mathrm{y}^2 + k_\perp^2) B_{0,\mathrm{z}} e^{i(k_\mathrm{z} z - \omega t)}. \tag{19.14}$$

Es genügt daher, die Wellengleichungen zu erfüllen. Wir bemerken weiter, dass $E_{0,\mathrm{z}}$ und $B_{0,\mathrm{z}}$ von einander unabhängig sind. Man unterscheidet dementsprechend TE-Moden (transversal elektrisch) mit $E_{0,\mathrm{z}} = 0$ und TM-Moden (transversal magnetisch) mit $B_{0,\mathrm{z}} = 0$.

Thus it is sufficient to fulfill the wave equations. We further note, that $E_{0,\mathrm{z}}$ and $B_{0,\mathrm{z}}$ are independent from each other. Correspondingly one distinguishes TE-modes (transverse electric) with $E_{0,\mathrm{z}} = 0$ and TM-modes (transverse magnetic) with $B_{0,\mathrm{z}} = 0$.

Wir kommen nun nochmals auf die Randbedingungen zurück. Die Komponenten senkrecht zu der Ausbreitungsrichtung z lassen sich

We return to the boundary conditions. The components perpendicular to the direction of propagation z read

$$k_\perp^2 (\mathbf{e}_\mathrm{x} E_{0,\mathrm{x}} + \mathbf{e}_\mathrm{y} E_{0,\mathrm{y}}) = ik_\mathrm{z}\,\mathrm{grad}\,E_{0,\mathrm{z}} - ik\mathbf{e}_\mathrm{z} \times \mathrm{grad}\,B_{0,\mathrm{z}} \tag{19.15}$$

$$k_\perp^2 (\mathbf{e}_\mathrm{x} B_{0,\mathrm{x}} + \mathbf{e}_\mathrm{y} B_{0,\mathrm{y}}) = ik_\mathrm{z}\,\mathrm{grad}\,B_{0,\mathrm{z}} + ik\mathbf{e}_\mathrm{z} \times \mathrm{grad}\,E_{0,\mathrm{z}} \tag{19.16}$$

schreiben. Für die TE-Mode ist $E_{0,\mathrm{z}} = 0$. Am Rand muss $\mathbf{E}_\mathrm{t} = \mathbf{0}$ sein. $E_{0,\mathrm{z}}$ ist bereits Null. Es muss noch die Komponente von $\mathbf{E}_0$ parallel zur Oberfläche verschwinden. Das ist genau der Fall, wenn die Normalkomponente von $\mathrm{grad}\,B_{0,\mathrm{z}}$ verschwindet, $(\mathrm{grad}\,B_{0,\mathrm{z}})_\mathrm{n} = 0$. Damit folgt gleichzeitig $B_\mathrm{n} = 0$. Für die TM-Mode ist $B_{0,\mathrm{z}} = 0$. Wegen $\mathbf{E}_\mathrm{t} = 0$ muss $E_{0,\mathrm{z}} = 0$ auf der Oberfläche gelten. Dann ist $\mathrm{grad}\,E_{0,\mathrm{z}}$ senkrecht auf der Oberfläche und $\mathbf{E}_\mathrm{t} = \mathbf{0}$ und $B_\mathrm{n} = 0$ sind auf der Oberfläche erfüllt.

. For the TE-mode one has $E_{0,\mathrm{z}} = 0$. At the boundary $\mathbf{E}_\mathrm{t} = \mathbf{0}$ is required. $E_{0,\mathrm{z}}$ vanishes already. The component of $\mathbf{E}_0$ parallel to the surface has to vanish. This is precisely the case when the normal component of $\mathrm{grad}\,B_{0,\mathrm{z}}$ vanishes, $(\mathrm{grad}\,B_{0,\mathrm{z}})_\mathrm{n} = 0$. Then one has simultaneously $B_\mathrm{n} = 0$. For the TM-mode one has $B_{0,\mathrm{z}} = 0$. Because of $\mathbf{E}_\mathrm{t} = 0$ one requires $E_{0,\mathrm{z}} = 0$ at the surface. Then $\mathrm{grad}\,E_{0,\mathrm{z}}$ is perpendicular to the surface and $\mathbf{E}_\mathrm{t} = \mathbf{0}$ and $B_\mathrm{n} = 0$ are fulfilled on the surface.

Damit ist das folgende Eigenwert-Problem zu lösen

Then the following eigenvalue problem has to be solved

$$\text{TM-Mode:} \quad (\nabla_{\mathrm{x}}^2 + \nabla_{\mathrm{y}}^2 + k_\perp^2) E_{0,\mathrm{z}} = 0, \quad E_{0,\mathrm{z}} = 0 \begin{matrix}\text{auf der Oberfläche} \\ \text{at the surface}\end{matrix}, \tag{19.17}$$

$$\text{TE-Mode:} \quad (\nabla_{\mathrm{x}}^2 + \nabla_{\mathrm{y}}^2 + k_\perp^2) B_{0,\mathrm{z}} = 0, \quad (\operatorname{grad} B_{0,\mathrm{z}})_{\mathrm{n}} = 0 \begin{matrix}\text{auf der Oberfläche} \\ \text{at the surface}\end{matrix}. \tag{19.18}$$

Es folgt das Dispersionsgesetz

Then one obtains the dispersion law

$$\omega = \mathrm{c}\sqrt{k_{\mathrm{z}}^2 + k_\perp^2}. \tag{19.19}$$

**TEM-Moden** Wir haben den Fall $k_\perp = 0$ bisher nicht diskutiert. Wir wollen dies nicht in allen Details tun. Man kann zeigen, dass für diese Moden beide Longitudinal-Komponenten verschwinden, $E_{0,\mathrm{z}} = B_{0,\mathrm{z}} = 0$. Man spricht daher von TEM-Moden. Für diese folgt mit $k_{\mathrm{z}} = \pm k$ aus (19.5) und analog durch eine Drehung von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ um $90^0$ um die z-Achse $E_{0,\mathrm{x}} \to E_{0,\mathrm{y}}$, $B_{0,\mathrm{y}} \to -B_{0,\mathrm{x}}$

**TEM-modes** By now we did not discuss the case $k_\perp = 0$. We will not do this in all details. One can show that for these modes both longitudinal components vanish, $E_{0,\mathrm{z}} = B_{0,\mathrm{z}} = 0$. Thus one calls them TEM-modes. Using $k_{\mathrm{z}} = \pm k$ from (19.5) and similarly after a rotation of $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ around the z-axis by $90^0$ $E_{0,\mathrm{x}} \to E_{0,\mathrm{y}}$, $B_{0,\mathrm{y}} \to -B_{0,\mathrm{x}}$ one obtains

$$B_{0,\mathrm{y}} = \pm E_{0,\mathrm{x}}, \quad B_{0,\mathrm{x}} = \mp E_{0,\mathrm{y}}. \tag{19.20}$$

Aus $(\operatorname{rot}\mathbf{E})_{\mathrm{z}} = 0$ folgt dann, dass man $\mathbf{E}_0$ durch den Gradienten eines Potentials darstellen kann

From $(\operatorname{curl}\mathbf{E})_{\mathrm{z}} = 0$ it follows that $\mathbf{E}_0$ can be expressed by the gradient of a potential

$$\mathbf{E}_0 = -\operatorname{grad}\Phi(x,y), \tag{19.21}$$

das wegen $\operatorname{div}\mathbf{E}_0 = 0$ die Potentialgleichung erfüllt

which due to $\operatorname{div}\mathbf{E}_0 = 0$ fulfills Laplace's equation

$$(\nabla_{\mathrm{x}}^2 + \nabla_{\mathrm{y}}^2)\Phi(x,y) = 0. \tag{19.22}$$

Es ist also die homogene Laplace-Gleichung in zwei Dimensionen zu lösen. Wegen $\mathbf{E}_{0,\mathrm{t}} = \mathbf{0}$ muss auf der Leiteroberfläche das Potential konstant sein. Daher erhält man eine nicht-triviale Lösung nur in mehrfach zusammenhängenden Gebieten, also nicht im Innern eines kreisförmigen oder rechteckigen Querschnitts, aber außerhalb, oder in Koaxialkabeln, oder im Außenraum zweier Drähte.

Thus Laplace's homogeneous equation in two dimensions has to be solved. Because of $\mathbf{E}_{0,\mathrm{t}} = \mathbf{0}$ the potential on the surface has to be constant. Thus one obtains a non-trivial solution only in multiply connected regions, that is not inside a circular or rectangular cross-section, but outside such a region or in a coaxial wire or outside two wires.

## 19.b Lösung für rechteckigen Querschnitt

## 19.b Solution for a Rectangular Cross Section

Wir bestimmen die Wellen im Hohlleiter für einen rechteckigen Querschnitt mit Seitenlängen $a$ und $b$. Für die TM-Wellen machen wir den Produkt-Ansatz

We determine the waves in a wave guide of rectangular cross-section with sides $a$ and $b$. For the TM-wave we start with the factorization ansatz

$$E_{0,\mathrm{z}}(x,y) = f(x)g(y) \tag{19.23}$$

Einsetzen in (19.11) gibt

Insertion into (19.11) yields

$$f''g + fg'' + k_\perp^2 fg = 0 \tag{19.24}$$

oder

and equivalently

$$\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} = -k_\perp^2, \tag{19.25}$$

woraus folgt, dass $f''/f$ und $g''/g$ konstant sind. Da $E_{0,z}$ am Rand verschwinden muss, folgt

from which one concludes, that $f''/f$ and $g''/g$ have to be constant. Since $E_{0,z}$ has to vanish at the boundary, one obtains

$$E_{0,z}(x,y) = E_0 \sin(\frac{n\pi x}{a}) \sin(\frac{m\pi y}{b}), \quad k_\perp^2 = (\frac{n\pi}{a})^2 + (\frac{m\pi}{b})^2, \quad n \geq 1, m \geq 1. \tag{19.26}$$

Für die TE-Welle erhält man mit dem entsprechendenen Ansatz

For the TE-wave one obtains with the corresponding ansatz

$$B_{0,z}(x,y) = f(x)g(y) \tag{19.27}$$

und der Randbedingung $(\operatorname{grad} B_{0,z})_n = 0$ die Lösungen

and the boundary condition $(\operatorname{grad} B_{0,z})_n = 0$ the solutions

$$B_{0,z}(x,y) = B_0 \cos(\frac{n\pi x}{a}) \cos(\frac{m\pi y}{b}), \quad k_\perp^2 = (\frac{n\pi}{a})^2 + (\frac{m\pi}{b})^2, \quad n \geq 0, \quad m \geq 0, \quad n+m \geq 1. \tag{19.28}$$

## 19.c Wellenpakete

Vielfach hat man es nicht mit monochromatischen Wellen, sondern mit Wellenpaketen zu tun, die aus Fourierkomponenten mit $k_z \approx k_{z,0}$ bestehen

## 19.c Wave Packets

Often one does not deal with monochromatic waves, but with wave packets, which consist of Fourier components with $k_z \approx k_{z,0}$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x,y) \int dk_z f_0(k_z) e^{i(k_z z - \omega(k_z)t)}, \tag{19.29}$$

wobei $f_0(k_z)$ bei $k_z = k_{z,0}$ ein Maximum hat und für andere $k_z$-Werte rasch abfällt. Dann entwickeln wir $\omega(k_z)$ um $k_{z,0}$

where $f_0(k_z)$ has a maximum at $k_z = k_{z,0}$ and decays rapidly for other values of $k_z$. Then one expands $\omega(k_z)$ around $k_{z,0}$

$$\omega(k_z) = \omega(k_{z,0}) + v_{gr}(k_z - k_{z,0}) + ... \tag{19.30}$$

$$v_{gr} = \left.\frac{d\omega(k_z)}{dk_z}\right|_{k_z = k_{z,0}}. \tag{19.31}$$

In linearer Näherung dieser Entwicklung folgt dann

In linear approximation of this expansion one obtains

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x,y) e^{i(k_{z,0}z - \omega(k_{z,0})t)} f(z - v_{gr}t), \quad f(z - v_{gr}t) = \int dk_z f_0(k_z) e^{i(k_z - k_{z,0})(z - v_{gr}t)}. \tag{19.32}$$

Der Vorfaktor enthält die Phase $\phi = k_{z,0}z - \omega(k_{z,0})t$. Das Paket oszilliert also mit der Phasengeschwindigkeit

The factor in front contains the phase $\phi = k_{z,0}z - \omega(k_{z,0})t$. Thus the wave packet oscillates with the phase velocity

$$v_{ph} = \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_\phi = \frac{\omega(k_{z,0})}{k_{z,0}}. \tag{19.33}$$

Die Ortsabhängigkeit der Amplitude steckt dagegen in der Funktion $f(z - v_{gr}t)$. Das Wellenpaket bewegt sich also mit der Gruppengeschwindigkeit (auch Signalgeschwindigkeit) $v_{gr}$, (19.31).

On the other hand the local dependence of the amplitude is contained in the function $f(z - v_{gr}t)$. Thus the wave packet moves with the group velocity (signal velocity) $v_{gr}$, (19.31).

Für die Wellen des Hohlleiters finden wir aus (19.19)

For the waves in the wave-guide we obtain from (19.19)

$$v_{ph} = c\frac{\sqrt{k_\perp^2 + k_{z,0}^2}}{k_{z,0}}, \tag{19.34}$$

$$v_{gr} = c\frac{k_{z,0}}{\sqrt{k_\perp^2 + k_{z,0}^2}}. \tag{19.35}$$

Die Phasengeschwindigkeit ist größer als die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c, die Gruppen- oder Signalgeschwindigkeit aber kleiner als die Lichtgeschwindigkeit. Geht man bei der Entwicklung (19.30) über den linearen Term hinaus, so findet man, dass die Wellenpakete auseinanderfließen.

The phase velocity is larger than the velocity of light in vacuum c, the group velocity (velocity of a signal) less than c. If one performs the expansion (19.30) beyond the linear term, then one finds, that the wave packets spread in time.

**Aufgabe** Bestimme $\omega(k)$ für Transversal-Schwingungen in einem Leiter oberhalb der Plasmafrequenz (Abschnitt 17.b) für $\epsilon = 1$ und die daraus resultierende Phasen- und Gruppengeschwindigkeit.

**Exercise** Determine $\omega(k)$ for transverse oscillations in a conductor above the plasma frequency (section 17.b) for $\epsilon = 1$ and the resulting phase- and group-velocities, resp.

# G

# Elektrodynamische Potentiale

# Electrodynamic Potentials

©2000/01 Franz Wegner Universität Heidelberg

## 20 Elektrodynamische Potentiale, Eichtransformationen

In der Elektrostatik haben wir bereits das elektrische Potential $\Phi$ kennengelernt, in der Magnetostatik das Vektorpotential $\mathbf{A}$. Beide können auch für die zeitabhängigen Probleme eingeführt werden und erlauben auch dann die Bestimmung von $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$.

### 20.a Potentiale

Die dritte und vierte Maxwell-Gleichung sind homogen, das heißt, sie enthalten die Ladungen und Ströme nicht explizit. Sie erlauben, die Felder $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$ durch Potentiale auszudrücken. Aus $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$ folgt

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r},t). \tag{20.1}$$

Beweis: Wegen $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$ gilt $\triangle\mathbf{B} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B}$ (B.26), woraus dann ähnlich wie in (9.16) und (9.17)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r'\big(\operatorname{rot}'\operatorname{rot}'\mathbf{B}(\mathbf{r}')\big)\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\int d^3r'\frac{\operatorname{rot}'\mathbf{B}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{20.2}$$

bei der Einführung des Vektorpotentials in der Magnetostatik folgt. Ein elementarer Beweis folgt als Übungsaufgabe.

Aus $\operatorname{rot}\mathbf{E}+\dot{\mathbf{B}}/\mathrm{c}=\mathbf{0}$ folgt dann

$$\operatorname{rot}\big(\mathbf{E}+\frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\mathbf{A}}\big)=\mathbf{0}, \tag{20.3}$$

so dass das Argument unter der Rotation als Gradient geschrieben werden kann. Konventionell setzt man dafür $-\operatorname{grad}\Phi$, so dass die Darstellung

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\mathbf{A}} - \operatorname{grad}\Phi \tag{20.4}$$

## 20 Electrodynamic Potentials, Gauge Transformations

We already know the electric potential $\Phi$ from electrostatics and the vector potential $\mathbf{A}$ from magnetostatics. Both can also be used for time-dependent problems and allow the determination of $\mathbf{B}$ and $\mathbf{E}$.

### 20.a Potentials

Maxwell's third and fourth equations are homogeneous equations, that is they do not contain charges and currents explicitly. They allow to express the fields $\mathbf{B}$ and $\mathbf{E}$ by means of potentials. One obtains from $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$

Proof: Due to $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$ one has $\triangle\mathbf{B} = -\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{B}$ (B.26), from which one concludes similarly as in (9.16) and (9.17)

when the vector potential was introduced in the magnetostatics. An elementary proof is left as exercise.

From $\operatorname{curl}\mathbf{E}+\dot{\mathbf{B}}/\mathrm{c}=\mathbf{0}$ one obtains

so that the argument under the curl can be expressed as a gradient. Conventionally one calls it $-\operatorname{grad}\Phi$, so that

folgt. Der zweite Term ist aus der Elektrostatik bekannt. In der Zeitableitung von $\mathbf{A}$ steckt das Induktionsgesetz. Man sieht umgekehrt, dass die Darstellung der Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ durch die Potentiale in (20.4) und (20.1) die beiden homogenen Maxwell-Gleichungen erfüllt.

follows. The second term is already known from electrostatics. The time derivative of $\mathbf{A}$ contains the law of induction. One sees contrarily that the representations of the potentials in (20.4) and (20.1) fulfill the homogeneous Maxwell equations.

## 20.b Eichtransformationen

Die Potentiale $\mathbf{A}$ und $\Phi$ sind nicht eindeutig durch die Felder $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$ bestimmt. Wir können $\mathbf{A}$ durch

## 20.b Gauge Transformations

The potentials $\mathbf{A}$ and $\Phi$ are not uniquely determined by the fields $\mathbf{B}$ and $\mathbf{E}$. We may replace $\mathbf{A}$ by

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \operatorname{grad}\Lambda(\mathbf{r},t) \tag{20.5}$$

ersetzen, ohne $\mathbf{B}$ zu ändern

without changing $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{rot}\mathbf{A}', \tag{20.6}$$

da $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Lambda = \mathbf{0}$. Dann folgt

since $\operatorname{curl}\operatorname{grad}\Lambda = \mathbf{0}$. It follows that

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\mathbf{A}}' - \operatorname{grad}(\Phi - \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\Lambda}). \tag{20.7}$$

Ersetzen wir gleichzeitig $\Phi$ durch

If we replace simultaneously $\Phi$ by

$$\Phi'(\mathbf{r},t) = \Phi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\Lambda}(\mathbf{r},t), \tag{20.8}$$

so bleiben $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ unverändert. Man bezeichnet die Transformation (20.5) und (20.8) von $\mathbf{A}$ und $\Phi$ als Eichtransformation.

then $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ remain unchanged. One calls the transformations (20.5) and (20.8) gauge transformations.

Die Willkür in der Eichung erlaubt es, Einschränkungen an die Potentiale $\Phi$ und $\mathbf{A}$ zu fordern. Die folgenden beiden Eichungen werden häufig verwendet

The arbitrariness in the gauge allows to impose restrictions on the potentials $\Phi$ and $\mathbf{A}$

$$\text{Lorenz-Eichung} \quad \text{gauge} \qquad \operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\Phi} = 0, \tag{20.9}$$

$$\text{Coulomb-Eichung} \quad \text{gauge} \qquad \operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \tag{20.10}$$

Hat man Potentiale $\Phi'$ und $\mathbf{A}'$, die die gewünschte Eichung nicht erfüllen, so erhält man Potentiale $\Phi$ und $\mathbf{A}$ durch geeignete Wahl von $\Lambda$

If potentials $\Phi'$ and $\mathbf{A}'$ do not obey the desired gauge, the potentials $\Phi$ and $\mathbf{A}$ are obtained by an appropriate choice of $\Lambda$

$$\text{Lorenz-Eichung} \quad \text{gauge} \qquad \operatorname{div}\mathbf{A}' + \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\Phi}' = \Box\Lambda, \tag{20.11}$$

$$\text{Coulomb-Eichung} \quad \text{gauge} \qquad \operatorname{div}\mathbf{A}' = \triangle\Lambda, \tag{20.12}$$

wobei

where

$$\Box := \triangle - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{20.13}$$

der d'Alembert-Operator ist. Die Lorenz-Eichung geht auf den dänischen Physiker Ludvig V. Lorenz (1867) zurück im Gegensatz zur Loerentz-Transformation (Abschnitt 23), die dem holländischen Physiker Hendrik A. Lorentz zuzuschreiben ist.

is d'Alembert's operator. The Lorenz gauge traces back to the Danish physicist Ludvig V. Lorenz (1867) in contrast to the Lorentz transformation (section 23) attributed to the Dutch physicist Hendrik A. Lorentz.

Einsetzen der Ausdrücke (20.4) und (20.1) für $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ in die erste Maxwell-Gleichung ergibt

Insertion of the expressions (20.4) and (20.1) for $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ into Maxwell's first equation yields

$$\text{rot rot}\,\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{A}} + \frac{1}{c}\,\text{grad}\,\dot{\Phi} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{20.14}$$

das heißt

that is

$$-\Box\mathbf{A} + \text{grad}\left(\text{div}\,\mathbf{A} + \frac{1}{c}\dot{\Phi}\right) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{20.15}$$

während die zweite Maxwell-Gleichung dann

whereas Maxwell's second equation reads

$$-\triangle\Phi - \frac{1}{c}\,\text{div}\,\dot{\mathbf{A}} = 4\pi\rho \tag{20.16}$$

lautet.

.

Daraus folgt für die beiden Eichungen

From this one obtains for both gauges

$$\text{Lorenz}\text{-Eichung}\quad \left\{\begin{array}{l} \Box\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \\ \Box\Phi = -4\pi\rho \end{array}\right. \tag{20.17}$$

$$\text{Coulomb}\text{-Eichung}\quad \left\{\begin{array}{l} \Box\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\,\text{grad}\,\dot{\Phi} \\ \triangle\Phi = -4\pi\rho. \end{array}\right. \tag{20.18}$$

**Aufgabe** Zeige, dass ein Vektorfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, das $\text{div}\,\mathbf{B} = 0$ genügt, als $\text{rot}\,\mathbf{A}(\mathbf{r})$ dargestellt werden kann. Hierzu setze man $A_z(\mathbf{r}) = 0$ und drücke $A_y(\mathbf{r})$ durch $A_y(x, y, 0)$ und $B_x$, ähnlich $A_x(\mathbf{r})$ durch $A_x(x, y, 0)$ und $B_y$ aus. Dies setze man in $B_z = (\text{rot}\,\mathbf{A})_z$ ein und zeige unter Verwendung von $\text{div}\,\mathbf{B} = 0$, dass man passende Komponenten von $\mathbf{A}$ bei $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ finden kann.

**Exercise** Show that a vector field $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, which obeys $\text{div}\,\mathbf{B} = 0$ can be represented by $\text{curl}\,\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Therefore put $A_z(\mathbf{r}) = 0$ and express $A_y(\mathbf{r})$ by $A_y(x, y, 0)$ and $B_x$, similarly $A_x(\mathbf{r})$ by $A_x(x, y, 0)$ and $B_y$. Insert this in $B_z = (\text{curl}\,\mathbf{A})_z$ and show by use of $\text{div}\,\mathbf{B} = 0$ that one can find fitting components of $\mathbf{A}$ at $\mathbf{r} = (x, y, 0)$.

# 21 Die elektromagnetischen Potentiale einer allgemeinen Ladungs- und Stromverteilung

## 21.a Berechnung der Potentiale

In der Lorenz-Eichung hatten wir (20.17)

$$\Box\Phi(\mathbf{r},t) = -4\pi\rho(\mathbf{r},t), \tag{21.1}$$

$$\Box\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -\frac{4\pi}{\mathrm{c}}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \tag{21.2}$$

mit dem d'Alembert-Operator

$$\Box = \triangle - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{21.3}$$

und der Eichbedingung

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\Phi} = 0. \tag{21.4}$$

Wir führen bezüglich der Zeit die Fourier-Transformierte ein

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}, \tag{21.5}$$

analog für $\mathbf{A}$, $\rho$, $\mathbf{j}$. Dann folgt

$$\Box\Phi(\mathbf{r},t) = \int d\omega(\triangle + \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2})\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t} = \int d\omega(-4\pi\hat{\rho}(\mathbf{r},\omega))\mathrm{e}^{-i\omega t}, \tag{21.6}$$

woraus durch Vergleich der Integranden

$$(\triangle + \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2})\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega) = -4\pi\hat{\rho}(\mathbf{r},\omega) \tag{21.7}$$

folgt. Wir führen dazu die Greens-Funktion $G$ ein, das heißt, die Lösung der linearen Differentialgleichung werde geschrieben als

$$\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega) = \int d^3r' G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)\hat{\rho}(\mathbf{r}',\omega). \tag{21.8}$$

Setzen wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung (21.7) ein, so folgt

$$(\triangle + \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2})G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{21.9}$$

Da keine Richtung ausgezeichnet ist und die Gleichung invariant gegen Verschiebungen der Vektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ um einen gleichen konstanten Vektor ist, ist anzunehmen, dass die Lösung $G$ nur vom Abstand zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ und zusätzlich natürlich von dem Parameter $\omega$ abhängt

$$G = g(a,\omega), \quad a = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|. \tag{21.10}$$

# 21 Electromagnetic Potentials of a general Charge and Current Distribution

## 21.a Calculation of the Potentials

Using the Lorenz gauge we had

$$\Box\Phi(\mathbf{r},t) = -4\pi\rho(\mathbf{r},t), \tag{21.1}$$

$$\Box\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -\frac{4\pi}{\mathrm{c}}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \tag{21.2}$$

with d'Alembert's operator

$$\Box = \triangle - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{21.3}$$

and the gauge condition

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\Phi} = 0. \tag{21.4}$$

We perform the Fourier transform with respect to time

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}, \tag{21.5}$$

analogously for $\mathbf{A}$, $\rho$, $\mathbf{j}$. Then one obtains

$$\Box\Phi(\mathbf{r},t) = \int d\omega(\triangle + \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2})\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t} = \int d\omega(-4\pi\hat{\rho}(\mathbf{r},\omega))\mathrm{e}^{-i\omega t}, \tag{21.6}$$

from which by comparison of the integrands

$$(\triangle + \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2})\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega) = -4\pi\hat{\rho}(\mathbf{r},\omega) \tag{21.7}$$

is obtained. We now introduce the Greens function $G$, i.e. we write the solution of the linear differential equation as

$$\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega) = \int d^3r' G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)\hat{\rho}(\mathbf{r}',\omega). \tag{21.8}$$

Insertion of this ansatz into the differential equation (21.7) yields

$$(\triangle + \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2})G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{21.9}$$

Since there is no preferred direction and moreover the equation is invariant against displacement of the vectors $\mathbf{r}$ and $\mathbf{r}'$ by the same constant vector, we may assume that the solution depends only on the distance between $\mathbf{r}$ and $\mathbf{r}'$ and additionally of course on $\omega$

$$G = g(a,\omega), \quad a = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|. \tag{21.10}$$

Damit folgt

Then one obtains

$$(\triangle + \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2})g(a,\omega) = \frac{1}{a}\frac{d^2(ag)}{da^2} + \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}g = 0 \begin{matrix}\text{für}\\ \text{for}\end{matrix} \; a \neq 0. \tag{21.11}$$

Dabei verwenden wir den Laplace-Operator in der Form (5.15), wobei $\triangle_\Omega g = 0$, da $g$ nicht von der Richtung von $\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, sondern nur vom Betrag $a$ abhängt. Dies ergibt die Schwingungsgleichung für $ag$, hat also die Lösung

Here we use the Laplacian in the form (5.15), where $\triangle_\Omega g = 0$, since $g$ does not depend on the direction of $\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, but on the modulus $a$. This yields the equation of a harmonic oscillation for $ag$ with the solution

$$G = g(a,\omega) = \frac{1}{a}\big(c_1 e^{i\omega a/\mathrm{c}} + c_2 e^{-i\omega a/\mathrm{c}}\big). \tag{21.12}$$

Für kleinen Abstand divergiert die Lösung wie $(c_1 + c_2)/a$. Um die $\delta$-Funktion in (21.9) als Inhomogenität mit dem richtigen Vorfaktor zu erhalten, muss $c_1 + c_2 = 1$ sein. Wir setzen nun der Reihe nach ein

At short distances the solution diverges like $(c_1 + c_2)/a$. In order to obtain the $\delta$-function in (21.9) as an inhomogeneity with the appropriate factor in front, one requires $c_1 + c_2 = 1$. We now insert

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{r},t) &= \int d\omega \hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t} \\
&= \int d\omega \int d^3r' \mathrm{e}^{-i\omega t} G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)\hat{\rho}(\mathbf{r}',\omega) \\
&= \int d\omega \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\big(c_1 e^{i\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\mathrm{c}} + c_2 e^{-i\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\mathrm{c}}\big)\mathrm{e}^{-i\omega t}\hat{\rho}(\mathbf{r}',\omega) \\
&= \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\big(c_1\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\mathrm{c}}) + c_2\rho(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\mathrm{c}})\big).
\end{aligned} \tag{21.13}$$

Beim Übergang von der zweiten auf die dritte Zeile haben wir $G$ eingesetzt. Anschließend führen wir die $\omega$-Integration aus, vergleiche (21.5). Allerdings ist $\omega$ im Exponenten in (21.13) nicht mit $t$, sondern mit $t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\mathrm{c}}$ multipliziert. Die Lösung in der letzten Zeile enthält einen Beitrag zu $\Phi$ zur Zeit $t$, der von $\rho$ zu früherer Zeit (mit Faktor $c_1$) und einen, der von $\rho$ zu späterer Zeit (mit Faktor $c_2$) abhängt. Man bezeichnet die Lösung, die nur den ersten Beitrag ($c_1 = 1$, $c_2 = 0$) enthält, als die retardierte Lösung und die, die nur den zweiten Beitrag ($c_1 = 0$, $c_2 = 1$) enthält, als die avancierte Lösung.

Going from the second to the third line we have inserted $G$. Then we perform the $\omega$-integration, compare (21.5). However, $\omega$ in the exponent in (21.13) is not multiplied by $t$, but by $t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\mathrm{c}}$. The solution in the last line contains a contribution of $\Phi$ at time $t$ which depends on $\rho$ at an earlier time (with factor $c_1$), and one which depends on $\rho$ at a later time (with factor $c_2$). The solution which contains only the first contribution ($c_1 = 1$, $c_2 = 0$) is called the retarded solution, and the one which contains only the second contribution ($c_1 = 0$, $c_2 = 1$) the advanced solution.

$$\Phi_{\mathrm{r,a}}(\mathbf{r},t) = \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho(\mathbf{r}', t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\mathrm{c}}). \tag{21.14}$$

Physikalisch ist in der Regel die retardierte Lösung (oberes Vorzeichen), da man davon ausgeht, dass das Potential durch die Ladungsverteilung, aber nicht die Ladungsverteilung durch das Potential entsteht. Analog erhält man die retardierte und avancierte Lösung für das Vektorpotential

Normally the retarded solution (upper sign) is the physical solution, since the potential is considered to be created by the charges, but not the charges by the potentials. Analogously, one obtains the retarded and advanced solutions for the vector potential

$$\mathbf{A}_{\mathrm{r,a}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{j}(\mathbf{r}', t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\mathrm{c}}). \tag{21.15}$$

## 21.b Eichbedingung

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Eichbedingung (20.9) erfüllt ist

$$\dot{\Phi} + \mathrm{c}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}(\dot{\rho} + \mathrm{div}\,\mathbf{j}) + \int d^3r' \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{j}. \tag{21.16}$$

Die Argumente von $\rho$ und $\mathbf{j}$ sind wie oben $\mathbf{r}'$ und $t' = t \mp |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\mathrm{c}$. Im zweiten Integral kann man $\nabla$ durch $-\nabla'$ ersetzen und dann partiell integrieren. Das führt auf

$$\dot{\Phi} + \mathrm{c}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}(\dot{\rho} + (\nabla + \nabla')\mathbf{j}). \tag{21.17}$$

Da $(\nabla + \nabla')t'(t,\mathbf{r},\mathbf{r}') = \mathbf{0}$ ist, folgt unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho}(\mathbf{r}', t'(t,\mathbf{r},\mathbf{r}')) + (\nabla + \nabla')\mathbf{j}(\mathbf{r}', t'(t,\mathbf{r},\mathbf{r}')) = \frac{\partial \rho}{\partial t'} + \nabla'\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')|_{t'} = 0, \tag{21.18}$$

so dass die Eichbedingung (20.9) erfüllt ist, da der Integrand in (21.17) wegen der Kontinuitätsgleichung verschwindet.

## 21.b Gauge Condition

It remains to be shown that the gauge condition (20.9) is fulfilled

The arguments of $\rho$ and $\mathbf{j}$ are as above $\mathbf{r}'$ and $t' = t \mp |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\mathrm{c}$. In the second integral one can replace $\nabla$ by $-\nabla'$ and perform a partial integration. This yields

Since $(\nabla + \nabla')t'(t,\mathbf{r},\mathbf{r}') = \mathbf{0}$, one obtains from the equation of continuity

so that the gauge condition (20.9) is fulfilled, since the integrand in (21.17) vanishes because of the equation of continuity.

# 22 Ausstrahlung harmonischer Schwingungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir schwingende Ladungen und Ströme als Strahlungsquellen.

## 22.a Strahlungsfeld

Wir betrachten harmonische Schwingungen, das heißt, die Zeitabhängigkeit von $\rho$ und $\mathbf{j}$ ist proportional zu $\mathrm{e}^{-i\omega t}$

$$\rho(\mathbf{r},t) = \Re\big(\rho_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-i\omega t}\big) \tag{22.1}$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \Re\big(\mathbf{j}_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-i\omega t}\big), \tag{22.2}$$

analog für $\Phi$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$. Es folgt

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \Re\int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho_0(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{-i\omega(t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\mathrm{c})}. \tag{22.3}$$

Mit $k = \omega/\mathrm{c}$ folgt

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho_0(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{22.4}$$

analog

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{22.5}$$

### 22.a.$\alpha$ Nahzone (Statische Zone)

In der Nahzone, das heißt für $k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll 2\pi$, was gleichbedeutend ist mit $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll \lambda$, wobei $\lambda$ die Wellenlänge der elektromagnetischen Welle ist, kann $\mathrm{e}^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ durch 1 genähert werden. Damit werden die Potentiale $\Phi_0$, (22.4) und $\mathbf{A}_0$, (22.5) zu den Potentialen der Elektro- und Magnetostatik (3.14) und (9.17).

### 22.a.$\beta$ Fernzone (Strahlungszone)

Für große Entfernungen entwickelt man im Exponenten

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = r\sqrt{1-2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2}+\frac{r'^2}{r^2}} = r - \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}' + O(\frac{r'^2}{r}), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{22.6}$$

Dies ist gerechtfertigt für $r \gg kR^2$, wobei $R$ eine Abschätzung für die Ausdehnung der Ladungs- bzw. Stromverteilung ist, $r' < R$ für $\rho(\mathbf{r}') \neq 0$ bzw. $\mathbf{j}(\mathbf{r}') \neq \mathbf{0}$. Im Nenner approximieren wir $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx r$, was für $r \gg R$ gut ist. Dann folgt

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{\mathrm{c}r}\mathbf{g}(k\mathbf{n}) + O(\frac{1}{r^2}) \tag{22.7}$$

# 22 Radiation from Harmonic Oscillations

In this section we consider the radiation of oscillating charges and currents.

## 22.a Radiation Field

We consider harmonic oscillations, i.e. the time dependence of $\rho$ and $\mathbf{j}$ is proportional to $\mathrm{e}^{-i\omega t}$

(22.1), (22.2)

analogously for $\Phi$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$. One obtains

(22.3)

With the notation $k = \omega/\mathrm{c}$ it follows that

(22.4)

analogously

(22.5)

### 22.a.$\alpha$ Near Zone (Static Zone)

In the near zone, i.e. for $k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll 2\pi$ which is equivalent to $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll \lambda$, where $\lambda$ is the wavelength of the electromagnetic wave, the expression $\mathrm{e}^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ can be approximated by 1. Then the potentials $\Phi_0$, (22.4) and $\mathbf{A}_0$, (22.5) reduce to the potentials of electrostatics (3.14) and of magnetostatics (9.17).

### 22.a.$\beta$ Far Zone (Radiation Zone)

At large distances one expands the expression in the exponent

(22.6)

This is justified for $r \gg kR^2$, where $R$ is an estimate of the extension of the charge and current distribution, $r' < R$ for $\rho(\mathbf{r}') \neq 0$ and $\mathbf{j}(\mathbf{r}') \neq \mathbf{0}$, resp. We approximate in the denominator $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx r$ which is reasonable for $r \gg R$. Then one obtains

(22.7)

mit der Fourier-Transformierten der Stromverteilung

with the Fourier transform of the current distribution

$$\mathbf{g}(k\mathbf{n}) = \int d^3r' \mathbf{j}_0(\mathbf{r}') \mathrm{e}^{-ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'}. \tag{22.8}$$

Hieraus folgt das Magnetfeld

From this one deduces the magnetic field

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \mathrm{rot}\, \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{grad}\, \mathrm{e}^{ikr}}{\mathrm{c}r} \times \mathbf{g}(k\mathbf{n}) + O(\frac{1}{r^2}) = ik\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{\mathrm{c}r}\mathbf{n} \times \mathbf{g} + O(\frac{1}{r^2}). \tag{22.9}$$

Das elektrische Feld erhalten wir aus

The electric field is obtained from

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{B} = \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\mathbf{E}} \rightarrow \mathrm{rot}\, \mathbf{B}_0 = -\frac{i\omega}{\mathrm{c}}\mathbf{E}_0 \tag{22.10}$$

zu

as

$$\mathbf{E}_0 = \frac{i}{k}\, \mathrm{rot}\, \mathbf{B}_0 = -\mathbf{n} \times \mathbf{B}_0 + O(\frac{1}{r^2}). \tag{22.11}$$

$\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ und $\mathbf{n}$ bilden ein Orthogonalsystem. $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{B}_0$ sind betragsmäßig gleich und fallen wie $1/r$ ab. Der Poynting-Vektor liefert im zeitlichen Mittel

$\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ and $\mathbf{n}$ are orthogonal to each other. The moduli of $\mathbf{E}_0$ and $\mathbf{B}_0$ are equal and both decay like $1/r$. The Poynting vector yields in the time average

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{S}(t)dt, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{22.12}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} &= \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\overline{\Re\mathbf{E} \times \Re\mathbf{B}} = \frac{\mathrm{c}}{8\pi}\Re(\mathbf{E}_0^* \times \mathbf{B}_0) \\ &= -\frac{\mathrm{c}}{8\pi}\Re\big((\mathbf{n} \times \mathbf{B}_0^*) \times \mathbf{B}_0\big) = -\frac{\mathrm{c}}{8\pi}\Re(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0)\mathbf{B}_0^* + \frac{\mathrm{c}}{8\pi}\mathbf{n}(\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{B}_0). \end{aligned} \tag{22.13}$$

Der erste Term nach dem letzten Gleichheitszeichen verschwindet, da $\mathbf{B}_0 \perp \mathbf{n}$. Es bleibt daher

The first term after the last equals sign vanishes, since $\mathbf{B}_0 \perp \mathbf{n}$. Thus there remains

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{c}}{8\pi}\mathbf{n}(\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{B}_0) = \frac{k^2\mathbf{n}}{8\pi\mathrm{c}r^2}|\mathbf{n} \times \mathbf{g}(k\mathbf{n})|^2 + O(\frac{1}{r^3}). \tag{22.14}$$

Die im Mittel abgestrahlte Leistung ist dann

The average power radiated is

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{k^2}{8\pi c}\int |\mathbf{n} \times \mathbf{g}(k\mathbf{n})|^2 d\Omega_n, \tag{22.15}$$

wobei über den Raumwinkel $\Omega_n$ von $\mathbf{n}$ integriert wird.

where the integral is performed over the solid angle $\Omega_n$ of $\mathbf{n}$.

## 22.b Elektrische Dipolstrahlung (Hertzscher Dipol)

## 22.b Electric Dipole Radiation (Hertz Dipole)

Erstreckt sich die Ladungs- und Stromverteilung nur über einen im Vergleich zur Wellenlänge $\lambda$ kleinen Bereich $R$, so ist es sinnvoll, $\mathrm{e}^{-ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'}$ zu entwickeln

If the charge and current distribution is within a range $R$ small in comparison to the wave length $\lambda$, then it is reasonable to expand $\mathrm{e}^{-ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'}$

$$\mathbf{g}(k\mathbf{n}) = \mathbf{g}^{(0)} - ik\mathbf{g}^{(1)} + ..., \quad \mathbf{g}^{(0)} = \int d^3r' \mathbf{j}_0(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{g}^{(1)} = \int d^3r' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') \tag{22.16}$$

Diese Entwicklung reicht aus, um das Strahlungsfeld in der Fernzone zu untersuchen. Ist man daran interessiert, auch Nah- und Übergangszone zu betrachten, so muss man

This expansion is sufficient to investigate the radiation field in the far zone. If one is interested to consider it also in the near zone and the intermediate zone, one has to expand

$$\frac{\mathrm{e}^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} + \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}(-ik + \frac{1}{r})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') + O(r'^2) \tag{22.17}$$

in dem Ausdruck für $\mathbf{A}_0$ entwickeln, was

in the expression for $\mathbf{A}_0$, which yields

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{\mathrm{c}r}\mathbf{g}^{(0)} + (-ik + \frac{1}{r})\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{\mathrm{c}r}\mathbf{g}^{(1)} + ... \tag{22.18}$$

ergibt.

Wir betrachten zunächst den Beitrag von $\mathbf{g}^{(0)}$. Wir verwenden, dass

We first consider the contribution from $\mathbf{g}^{(0)}$. We use that

$$\mathrm{div}'\mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\dot{\rho}(\mathbf{r}') = i\omega\rho(\mathbf{r}') \rightarrow \mathrm{div}'\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') = i\omega\rho_0(\mathbf{r}'). \tag{22.19}$$

Dann folgt aus

Then we obtain from

$$\int d^3r' \,\mathrm{div}'\big(f(\mathbf{r}')\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')\big) = 0 \tag{22.20}$$

die Beziehung

the relation

$$\int d^3r' \,\mathrm{grad}'f(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') = -i\omega\int d^3r' f(\mathbf{r}')\rho_0(\mathbf{r}'). \tag{22.21}$$

Mit $f(\mathbf{r}') = x'_\alpha$ folgt dann

One obtains with $f(\mathbf{r}') = x'_\alpha$

$$g^{(0)}_\alpha = \int d^3r' j_{0,\alpha}(\mathbf{r}') = -i\omega\int d^3r' x'_\alpha\rho_0(\mathbf{r}') = -i\omega p_{0,\alpha}, \tag{22.22}$$

das heißt, $\mathbf{g}^{(0)}$ lässt sich durch die Amplitude des elektrischen Dipolmoments ausdrücken

that is $\mathbf{g}^{(0)}$ can be expressed by the amplitude of the electric dipole moment

$$\mathbf{g}^{(0)} = -i\omega\mathbf{p}_0. \tag{22.23}$$

Man bezeichnet daher diesen Anteil als elektrische Dipolstrahlung. Es folgt

Thus one calls this contribution electric dipole radiation. One finds

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = -ik\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\mathbf{p}_0, \tag{22.24}$$

daraus

thus

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = (\frac{k^2}{r} + \frac{ik}{r^2})\mathrm{e}^{ikr}\mathbf{n}\times\mathbf{p}_0 \tag{22.25}$$

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = -\frac{k^2}{r}\mathrm{e}^{ikr}\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{p}_0) + \big(3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}_0) - \mathbf{p}_0\big)(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2})\mathrm{e}^{ikr}. \tag{22.26}$$

Der erste Term ist der führende in der Fernzone ($1/r \ll k$), der zweite führt in der Nahzone ($1/r \gg k$). Aus dem Ausdruck für die Fernzone erhält man als zeitgemittelten Poynting-Vektor

The first term is leading in the far zone ($1/r \ll k$), the second one in the near zone ($1/r \gg k$). One obtains the time-averaged Poynting vector from the expression for the far zone

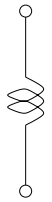
$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{\mathrm{c}k^4\mathbf{n}}{8\pi r^2}|\mathbf{n}\times\mathbf{p}_0|^2 = \frac{\mathrm{c}k^4|\mathbf{p}_0|^2\mathbf{n}}{8\pi r^2}\sin^2\theta, \tag{22.27}$$

Im zweiten Ausdruck wird angenommen, dass Realteil und Imaginärteil von $\mathbf{p}_0$ in die gleiche Richtung weisen. Dann ist $\theta$ der Winkel zwischen $\mathbf{p}_0$ und $\mathbf{n}$. Die abgestrahlte Leistung ist dann

In the second expression it is assumed that real and imaginary part of $\mathbf{p}_0$ point into the same direction. Then $\theta$ is the angle between $\mathbf{p}_0$ and $\mathbf{n}$. The radiated power is then

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{\mathrm{c}k^4|\mathbf{p}_0|^2}{3}. \tag{22.28}$$

Die Leistung nimmt also mit der vierten Potenz der Frequenz ($\omega = ck$) zu (Rayleigh-Streuung). Als Beispiel kann man zwei Kondensatorkugeln im Abstand $l$ mit $I(t) = \Re(I_0 \mathrm{e}^{-i\omega t})$ betrachten. Dann ist



The radiation increases with the fourth power of the frequency ($\omega = ck$) (Rayleigh radiation). As an example one may consider two capacitor spheres at distance $l$ with $I(t) = \Re(I_0 \mathrm{e}^{-i\omega t})$. Then one has

$$|\mathbf{g}^{(0)}| = |\int d^3r' \mathbf{j}_0(\mathbf{r}')| = |\int dl I_0| = |I_0 l|, \quad p_0 = \frac{iI_0 l}{\omega}, \quad \dot{U}_\mathrm{s} = \frac{(klI_0)^2}{3\mathrm{c}} \tag{22.29}$$

Diese Leistungsabgabe bedingt einen Strahlungswiderstand $R_\mathrm{s}$

This power release yields a radiation resistance $R_\mathrm{s}$

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{1}{2} R_\mathrm{s} I_0^2, \quad R_\mathrm{s} = \frac{2}{3\mathrm{c}}(kl)^2 \hat{=} 20\Omega \cdot (kl)^2 \tag{22.30}$$

zusätzlich zum Ohmschen Widerstand. Man beachte $\frac{1}{\mathrm{c}} \hat{=} 30\Omega$, vergleiche (A.4).

in addition to an Ohmic resistance. Note that $\frac{1}{\mathrm{c}} \hat{=} 30\Omega$, compare (A.4).

## 22.c Magnetische Dipolstrahlung und elektrische Quadrupolstrahlung

## 22.c Magnetic Dipole radiation and Electric Quadrupole Radiation

Wir betrachten nun den zweiten Term in (22.16)

Now we consider the second term in (22.16)

$$\begin{aligned} g_\alpha^{(1)} &= n_\beta \int d^3r' x'_\beta j_{0,\alpha}(\mathbf{r}') \\ &= \frac{n_\beta}{2} \int d^3r' (x'_\beta j_{0,\alpha} - x'_\alpha j_{0,\beta}) + \frac{n_\beta}{2} \int d^3r' (x'_\beta j_{0,\alpha} + x'_\alpha j_{0,\beta}). \end{aligned} \tag{22.31}$$

Der erste Term ergibt das magnetische Dipolmoment (10.7)

The first term yields the magnetic dipole moment (10.7)

$$n_\beta \mathrm{c} \epsilon_{\beta,\alpha,\gamma} m_{0,\gamma} = -\mathrm{c}(\mathbf{n} \times \mathbf{m}_0)_\alpha. \tag{22.32}$$

Der zweite Term lässt sich durch das elektrische Quadrupolmoment (4.10) ausdrücken. Mit $f = \frac{1}{2} x'_\alpha x'_\beta$ ergibt er sich mit (22.21) zu

The second term can be expressed by the electric quadrupole moment (4.10). With $f = \frac{1}{2} x'_\alpha x'_\beta$ one obtains from (22.21)

$$-i\omega \frac{n_\beta}{2} \int d^3r' x'_\alpha x'_\beta \rho_0(\mathbf{r}') = -i\omega \frac{n_\beta}{2} \big(Q_{0,\alpha,\beta} + \frac{1}{3} \delta_{\alpha,\beta} \int d^3r' r'^2 \rho_0(\mathbf{r}')\big). \tag{22.33}$$

Damit haben wir

Thus we have

$$\mathbf{g}^{(1)} = -\mathrm{c}\mathbf{n} \times \mathbf{m}_0 - \frac{i\omega}{2} Q_{0,\alpha,\beta} n_\beta \mathbf{e}_\alpha + \text{ const. } \mathbf{n}. \tag{22.34}$$

Wir beobachten, dass der dritte Term proportional $\mathbf{n}$ keinen Beitrag zu $\mathbf{B}_0$ (22.9) und $\mathbf{E}_0$ (22.11) liefert.

We observe that the third term proportional $\mathbf{n}$ does neither contribute to $\mathbf{B}_0$ (22.9) nor to $\mathbf{E}_0$ (22.11).

### 22.c.$\alpha$ Magnetische Dipolstrahlung

### 22.c.$\alpha$ Magnetic Dipole Radiation

Der erste Beitrag in (22.34) gibt die magnetische Dipolstrahlung. Wir finden

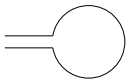
The first contribution in (22.34) yields the magnetic dipole radiation. We obtain

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \big(ik - \frac{1}{r}\big) \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} \mathbf{n} \times \mathbf{m}_0 \tag{22.35}$$

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = -k^2\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{m}_0) + \big(3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}_0)-\mathbf{m}_0\big)\big(\frac{1}{r^3}-\frac{ik}{r^2}\big)\mathrm{e}^{ikr} \tag{22.36}$$

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = (-\frac{k^2}{r}-\frac{ik}{r^2})(\mathbf{n}\times\mathbf{m}_0)\mathrm{e}^{ikr}. \tag{22.37}$$

Als Beispiel betrachtet man einen Kreisstrom, der eine Fläche $f$ einschließt,



As an example we consider a current along a loop which includes the area $f$,

$$m_0 = I_0 f/\mathrm{c}, \quad \dot{U}_\mathrm{s} = \frac{\mathrm{c}k^4 m_0^2}{3} = \frac{k^4 I_0^2 f^2}{3\mathrm{c}}, \tag{22.38}$$

was einem Strahlungswiderstand

which corresponds to a radiation resistance

$$R_\mathrm{s} = \frac{2}{3\mathrm{c}}k^4 f^2 \hat{=} 20\Omega\,(k^2 f)^2 \tag{22.39}$$

entspricht.

.

### 22.c.$\beta$ Elektrische Quadrupolstrahlung

Wir betrachten noch den zweiten Term aus (22.34) in der Fernzone. Dieser liefert

$$\mathbf{g} = -ik\mathbf{g}^{(1)} = -\frac{k^2\mathrm{c}}{2}Q_{0,\alpha,\beta}n_\beta\mathbf{e}_\alpha. \tag{22.40}$$

Als Spezialfall untersuchen wir den symmetrischen Quadrupol (4.27), $Q_{0,\mathrm{x},\mathrm{x}} = Q_{0,\mathrm{y},\mathrm{y}} = -\frac{1}{3}Q_0$, $Q_{0,\mathrm{z},\mathrm{z}} = \frac{2}{3}Q_0$, während die Außerdiagonal-Elemente verschwinden. Dann ist

### 22.c.$\beta$ Electric Quadrupole Radiation

We finally consider the second term in (22.34) in the far zone. It yields

As special case we investigate the symmetric quadrupole (4.27), $Q_{0,\mathrm{x},\mathrm{x}} = Q_{0,\mathrm{y},\mathrm{y}} = -\frac{1}{3}Q_0$, $Q_{0,\mathrm{z},\mathrm{z}} = \frac{2}{3}Q_0$, whereas the off-diagonal elements vanish. Then one has

$$Q_{0,\alpha,\beta} = -\frac{1}{3}Q_0\delta_{\alpha,\beta} + Q_0\delta_{\alpha,3}\delta_{\beta,3}, \tag{22.41}$$

woraus

from which

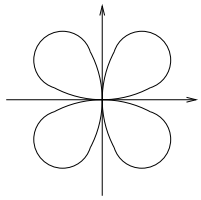
$$\mathbf{g} = -\frac{k^2\mathrm{c}}{2}Q_0 n_3\mathbf{e}_3 + \frac{k^2\mathrm{c}}{6}Q_0\mathbf{n}, \quad n_3 = \cos\theta \tag{22.42}$$

$$\mathbf{B}_0 = -ik^3\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{2r}Q_0\mathbf{n}\times\mathbf{e}_3\cos\theta \tag{22.43}$$

$$\mathbf{E}_0 = ik^3\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{2r}Q_0\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{e}_3)\cos\theta \tag{22.44}$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{\mathrm{c}k^6\mathbf{n}}{32\pi r^2}|Q_0|^2\sin^2\theta\cos^2\theta \tag{22.45}$$

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{\mathrm{c}k^6}{60}|Q_0|^2 \tag{22.46}$$



folgt. Auf der Zeichnung ist die Intensität der Quadrupol-Strahlung in Abhängigkeit vom Winkel $\theta$ radial skizziert.

follows. The intensity of the quadrupole-radiation is radially sketched as function of the angle $\theta$.

# H

# Lorentz-Invarianz der Elektrodynamik

# Lorentz Invariance of Electrodynamics

©2000/01 Franz Wegner Universität Heidelberg

## 23 Lorentz-Transformation

### 23.a Galilei- und Lorentz-Transformation

Die Gleichungen der Newtonschen Mechanik sind invariant gegen die Galilei-Transformation (Galilei-Invarianz)

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z - vt, \quad t' = t. \tag{23.1}$$

Wir werden im Folgenden sehen, dass die Maxwell-Gleichungen bei geeigneter Transformation von Feldern, Strömen und Ladungen invariant sind gegen lineare Transformationen der Koordinaten $x$, $y$, $z$ und $t$, die die Lichtgeschwindigkeit invariant lassen (Lorentz-Invarianz). Eine derartige Transformation lautet

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{23.2}$$

Betrachten wir zwei Ladungen $q$ und $-q$, die sich für $t \le 0$ am gleichen Ort befinden und auch für $t \ge \Delta t$ am gleichen Ort sind, sich aber im Intervall $0 < t < \Delta t$ gegeneinander bewegen, wobei sie sich zur Zeit 0 am Ort $\mathbf{r}_0$ trennen und zur Zeit $\Delta t$ am Ort $\mathbf{r}_1$ wieder zusammen kommen. Diese erzeugen nach (21.14) und (21.15) ein Feld, das sich von diesen beiden Ladungen mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet und am Ort $\mathbf{r}$ nur für Zeiten $t$ von Null verschieden ist, für die $t > |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c$ und $t < \Delta t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c$ gilt und zwar unabhängig vom Inertialsystem, in dem wir uns befinden. (Wir müssen dabei nur voraussetzen, dass sich die Ladungen nicht mit Überlicht-Geschwindigkeit bewegen.) Wählen wir insbesondere $\Delta t$ infinitesimal, so kommt der Lichtblitz zur Zeit $t = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c$ an, bewegt sich also mit Lichtgeschwindigkeit.

## 23 Lorentz Transformation

### 23.a Galilei and Lorentz Transformation

The equations of Newton's mechanics are invariant under the Galilei transformation (Galilei invariance)

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z - vt, \quad t' = t. \tag{23.1}$$

We will see in the following that Maxwell's equations are invariant under appropriate transformations of fields, currents and charges against linear transformations of the coordinates $x$, $y$, $z$, and $t$, which leave the velocity of light invariant (Lorentz invariance). Such a transformation reads

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{23.2}$$

Consider two charges $q$ und $-q$, which are for $t \le 0$ at the same point and which are also for $t \ge \Delta t$ at the same point, which move however in the time interval $0 < t < \Delta t$ against each other. They separate at time 0 at $\mathbf{r}_0$ and they meet again at time $\Delta t$ at $\mathbf{r}_1$. They generate according to (21.14) and (21.15) a field, which propagates with light-velocity. It is different from zero at point $\mathbf{r}$ at time $t$ only, if $t > |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c$ and $t < \Delta t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c$ holds. This should hold independently of the system of inertia in which we consider the wave. (We need only assume, that the charges do not move faster than with light-velocity.) If we choose an infinitesimal $\Delta t$ then the light flash arrives at time $t = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c$, since it propagates with light-velocity.

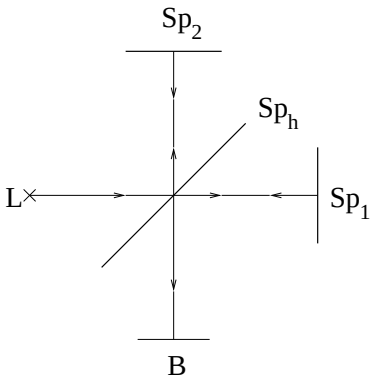
Da die Lorentz-Transformation nicht mit den Gesetzen der Newtonschen Mechanik verträglich ist und die Galilei-Transformation nicht mit den Maxwell-Gleichungen (das Licht müsste sich in einem bewegten Inertial-System mit einer von der Richtung abhängigen Geschwindigkeit ausbreiten), entsteht die Frage, welche der drei Möglichkeiten in der Natur erfüllt ist:
(i) es gibt ein ausgezeichnetes Inertialsystem für die Elektrodynamik, für das die Maxwell-Gleichungen nur gelten (Äther-Hypothese),
(ii) die Newton-Mechanik ist abzuändern,
(iii) die Maxwell-Gleichungen sind abzuändern.

Die Entscheidung kann nur experimentell getroffen werden. Ein wesentlicher Versuch zur Widerlegung von (i) ist der Michelson-Morley-Versuch:

Since the Lorentz transformation is not in agreement with the laws of Newton's mechanics and the Galilei transformation not with Maxwell's equations (in a moving inertial frame light would have a velocity dependent on the direction of light-propagation) the question arises which of the three following possibilities is realized in nature:
(i) there is a preferred system of inertia for electrodynamics, in which Maxwell's equations hold (ether-hypothesis),
(ii) Newton's mechanics has to be modified
(iii) Maxwell's equations have to be modified.

The decision can only be made experimentally: An essential experiment to refute (i) is the Michelson-Morley-experiment:

Ein Lichtstrahl trifft auf einen halbdurchlässigen Spiegel $\mathrm{Sp_h}$, wird durch diesen geteilt, an zwei Spiegeln $\mathrm{Sp_1}$ und $\mathrm{Sp_2}$ im Abstand $l$ reflektiert und an dem halbdurchlässigen Spiegel wieder zusammengeführt. Man beobachtet die Interferenz der beiden Lichtstrahlen bei B. Bewegt sich die Apparatur mit der Geschwindigkeit $v$ in Richtung Spiegel $\mathrm{Sp_1}$, so beträgt die Laufzeit $t_1$ zwischen dem halbdurchlässigen Spiegel und dem Spiegel $\mathrm{Sp_1}$ und zurück




A light beam hits a half-transparent mirror $\mathrm{Sp_h}$, is split into two beams, which are reflected at mirror $\mathrm{Sp_1}$ and $\mathrm{Sp_2}$, resp. at distance $l$ and combined again at the half-transparent mirror. One observes the interference fringes of both beams at B. If the apparatus moves with velocity $v$ in the direction of the mirror $\mathrm{Sp_1}$, then the time $t_1$ the light needs to propagate from the half-transparent mirror to $\mathrm{Sp_1}$ and back is

$$t_1 = \frac{l}{\mathrm{c}-v} + \frac{l}{\mathrm{c}+v} = \frac{2l\mathrm{c}}{\mathrm{c}^2-v^2} = \frac{2l}{\mathrm{c}}(1+\frac{v^2}{\mathrm{c}^2}+...). \tag{23.3}$$

Für die Laufzeit $t_2$ zum Spiegel $\mathrm{Sp_2}$ ergibt sich

The time $t_2$ the light needs to the mirror $\mathrm{Sp_2}$ is

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{\mathrm{c}^2-v^2}} = \frac{2l}{\mathrm{c}}(1+\frac{v^2}{2\mathrm{c}^2}+...), \tag{23.4}$$

da sich die Lichtgeschwindigkeit c in die beiden Komponenten $v$ und $\sqrt{\mathrm{c}^2-v^2}$ zerlegt. Damit bleibt ein Gangunterschied

since the light velocity c has to be separated into the two components $v$ and $\sqrt{\mathrm{c}^2-v^2}$. Thus there remains the time difference

$$t_1 - t_2 = \frac{lv^2}{\mathrm{c}^3}, \tag{23.5}$$

der durch Verschiebung der Interferenzen messbar wäre, wenn zum Beispiel $v$ die Geschwindigkeit der Erde gegenüber der Sonne ist. Diese Verschiebung wurde nicht beobachtet. Man kann einwenden, dass das daran liegt, dass der Äther von der Erde mitgeführt wird. Es gibt jedoch viele weitere Versuche, die für die Lorentz-Invarianz sprechen, das heißt der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum unabhängig vom Inertialsystem.

Dafür spricht vor allem, dass die Konsequenzen für die Mechanik bei Versuchen mit Teilchen nahe der Lichtgeschwindigkeit, insbesondere bei Elementarteilchen bestens bestätigt werden.

**Entwicklung der Relativitätstheorie**

Um die Geschwindigkeit der Erde gegen den postulierten Äther zu bestimmen führten Michelson und Morley ihr Experiment erstmals 1887 mit negativem Ergebnis durch: Keine Bewegung gegen den Äther konnte festgestellt werden. 1892 hielten Fitzgerald und Lorentz das Ätherkonzept aufrecht, indem sie postulierten, dass sich alle Gegenstände in Richtung der Bewegung gegen den Äther um den Faktor $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ verkürzten (vgl. Lorentz-Kontraktion, Unterabschnitt 23.b.$\beta$).

Voigt fand 1887, dass die homogene Gleichung $\Box\Phi = 0$ mit dem d'Alembert-Operator $\Box$ (20.13) unter einer Klasse von linearen Transformationen der $\mathbf{x}$ und $t$ invariant ist. Larmor gab in seiner 1898 fertiggestellten und 1900 erschienen Arbeit *Äther und Materie* bereits die Transformation (23.2) an. Welchen Einfluss dies auf Lorentz hatte, ist nicht bekannt. 1898 zog Poincaré bereits den Begriff der Gleichzeitigkeit in Zweifel.

1904 fand Lorentz, dass die Maxwell-Gleichungen ohne Ladungen und Ströme invariant unter den Transformationen (23.2) sind, falls man die Felder in geeigneter Weise mittransformiert (siehe Abschnitt 25). 1905 bemerkte Poincaré, dass man die Ladungs- und Stromdichten so transformieren kann, dass der volle Satz Maxwell-Gleichungen invariant unter Lorentz-Transformationen ist (vgl. Abschnitte 24 und 25).

which would be measurable by a displacement of the interference fringes, if for example the velocity $v$ is the velocity of the earth against the sun. This displacement has not been observed. One may object, that this is due to a drag of the ether by the earth. There are however many other experiments, which are all in agreement with Lorentz-invariance, that is the constancy of the velocity of light in vacuum independent of the system of inertia.

The consequences in mechanics for particles with velocities comparable to the velocity of light in particular for elementary particles have confirmed Lorentz invariance very well.

**Development of the Theory of Relativity**

In order to determine the velocity of the earth against the postulated ether Michelson and Morley performed their experiment initially in 1887 with the negative result: No motion against the ether was detected. In 1892 Fitzgerald and Lorentz retained the ether concept by postulating that all material objects are contracted in their direction of motion against the ether by the factor $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ (compare Lorentz contraction, subsection 23.b.$\beta$).

In 1887 Voigt realized that the homogeneous equation $\Box\Phi = 0$ with the d'Alembert-operator $\Box$ (20.13) is form invariant under a class of linear transformations of $\mathbf{x}$ and $t$. Larmor gives in his paper *Ether and Matter* written in 1898 and published in 1900 already the transformation (23.2). It is unknown whether this had an influence on Lorentz. Already in 1898 Poincaré expressed doubts on the concept of simultaneity.

In 1904 Lorentz found that Maxwell's equations without charges and currents are invariant under the transformations (23.2) provided that the fields are transformed in an appropriate way (see section 25). In 1905 Poincaré realized, that the charge and current densities could be transformed so that the full set of Maxwell's equations are invariant in form under Lorentz-transformations (compare sections 24 and 25).

Einstein formulierte 1905 in Unkenntnis der Arbeit von Lorentz und gleichzeitig mit der oben genannten Arbeit von Poincaré die spezielle Relativitätstheorie in einer allgemeinen und vollständigen Weise. Er bemerkte, dass die Idee einer konstanten Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen eine Realität ist, die nicht nur die Elektrodynamik, sondern die gesamte Physik einschließlich der Mechanik beherrscht, und die die Galilei-Invarianz ablöst. Der Grund, dass es so lange dauerte, die (spezielle) Relativitätstheorie zu entwickeln und die Wissenschaftler davon zu überzeugen, dass diese die Realität beschreibt, ist die Rolle, die die Zeit in ihr spielt.

Es war (und ist für manchen noch heute) schwierig zu akzeptieren, dass man den Begriff einer absoluten (d. h. vom Inertialsystem unabhängigen) Gleichzeitigkeit aufgeben muss. Mehr zur Geschichte findet man in *A. Pais, "Raffiniert ist der Herrgott..." Albert Einstein, Vieweg Verlag Braunschweig*

Im Folgenden werden wir die Idee der vierdimensionalen Raum-Zeit entwickeln, innerhalb deren man Transformationen vornehmen kann ähnlich den orthogonalen Transformationen im dreidimensionalen Raum, an die wir bereits gewöhnt sind. Allerdings handelt es sich dabei nicht um einen Euklidischen Raum, d. h. einen Raum mit definiter Metrik, vielmehr haben Raum und Zeit unterschiedliche Metrik (siehe metrischer Tensor $g$, Gleichung 23.10). Man nennt diesen Raum auch Minkowski-Raum. Wir verwenden dabei die moderne von Minkowski 1908 eingeführte vierdimensionale Notation, die von Einstein zunächst als überflüssig, später von ihm aber als nützlich eingeschätzt wurde.

Ausgehend von den Grundideen der speziellen Relativitätstheorie
*Die Naturgesetze und Ergebnisse der Experimente in einem Inertialsystem sind unabhängig von der Bewegung des Systems als Ganzem.*
*Die Lichtgeschwindigkeit ist in jedem Inertialsystem die Gleiche und unabhängig von der Geschwindigkeit der Quelle.*
werden wir in den folgenden Abschnitten die Lorentz-invariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen und der relativistischen Mechanik einführen.

## 23.b Lorentz-Transformation

Wir führen die Notation

In 1905 Einstein without the knowledge of Lorentz's paper and simultaneously with Poincaré's work mentioned above formulated the theory of special relativity in a general and complete way. He realized, that the idea of a constant velocity of light in all inertial systems constitutes a reality which governs all physics including mechanics and not only electrodynamics, and which has to replace Galileian invariance. The reason, that it took so long to develop the theory of (special) relativity and to convince scientists that it describes the reality, is the role of time in this theory.

It was (and still is for some persons) difficult to accept, that the idea of absolute (that is independent of the system of inertia) simultaneity has to be abandoned. More on the history can be found in *A. Pais, "Subtle is the Lord ..." Albert Einstein, Oxford University Press*

In the following we will develop the idea of a four-dimensional space-time, in which one may perform transformations similar to orthogonal transformations in three-dimensional space, to which we are used. However this space is not a Euclidean space, that is a space with definite metric. Instead space and time have a metric with different sign (see the metric tensor $g$, eq. 23.10). This space is also called Minkowski space. We use the modern four-dimensional notation introduced by Minkowski in 1908, which was considered by Einstein initially as superfluous, but later as very useful.

Starting from the basic ideas of special relativity
*The laws of nature and the results of experiments in a system of inertia are independent of the motion of such a system as whole.*
*The velocity of light is the same in each system of inertia and independent of the velocity of the source*
we will introduce the Lorentz-invariant formulation of Maxwell's equations and of relativistic mechanics.

## 23.b Lorentz Transformation

We introduce the notation

$$x^0 = \mathrm{c}t, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \tag{23.6}$$

oder kurz

or shortly

$$(x^\mu) = (\mathrm{c}t, \mathbf{r}) \tag{23.7}$$

ein, weiter

, further

$$(x_\mu) = (\mathrm{c}t, -\mathbf{r}). \tag{23.8}$$

Dann können wir auch

Then we may write

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu, \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \tag{23.9}$$

schreiben (Summationskonvention) mit

(summation convention)

$$(g^{\cdot\cdot}) = (g_{\cdot\cdot}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{23.10}$$

Man bezeichnet $g$ als den metrischen Tensor. Generell gilt für das Herauf- und Herunter-Ziehen von Indices

One calls $g$ the metric tensor. Generally one has the rules for lifting and lowering of indices

$$C \cdots{}^{\mu} \cdots = g^{\mu\nu} C \cdots{}_{\nu} \cdots, \quad C \cdots{}_{\mu} \cdots = g_{\mu\nu} C \cdots{}^{\nu} \cdots \tag{23.11}$$

Wir vereinbaren: Indices $\kappa$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ laufen von 0 bis 3, Indices $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... von 1 bis 3. Man beobachtet, dass nach (23.11) $g_\mu{}^\nu = g_{\mu\kappa} g^{\kappa\nu} = \delta_\mu{}^\nu$, $g^\mu{}_\nu = g^{\mu\kappa} g_{\kappa\nu} = \delta^\mu{}_\nu$ mit dem Kronecker-Delta ist.

We introduce the convention: Indices $\kappa$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ run from 0 to 3, indices $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... from 1 to 3. One observes that according to (23.11) $g_\mu{}^\nu = g_{\mu\kappa} g^{\kappa\nu} = \delta_\mu{}^\nu$, $g^\mu{}_\nu = g^{\mu\kappa} g_{\kappa\nu} = \delta^\mu{}_\nu$ with the Kronecker-delta.

Wird ein Lichtblitz zur Zeit $t = 0$ bei $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ erzeugt, so wird seine Wellenfront durch

If a light-flash is generated at time $t = 0$ at $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, then its wave front is described by

$$s^2 = \mathrm{c}^2 t^2 - \mathbf{r}^2 = x^\mu x_\mu = 0 \tag{23.12}$$

beschrieben. Wir bezeichnen das durch die Koordinaten $x^\mu$ beschriebene System mit $S$. Wir postulieren nun mit Einstein: In jedem Inertialsystem breitet sich das Licht im Vakuum mit der gleichen Geschwindigkeit c aus. (Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit) Dann gilt für den Lichtblitz im gleichförmig bewegten System $S'$ (dessen Ursprung für $t = t' = 0$ mit dem von $S$ übereinstimmt)

. We denote the system described by the coordinates $x^\mu$ by $S$. Now we postulate with Einstein: Light in vacuum propagates in each inertial system with the same velocity c. (principle of the constance of light velocity) Then the propagation of the light flash in the uniformly moving system $S'$, whose origin agrees at $t = t' = 0$ with that of $S$ is given by

$$s'^2 = x'^\mu x'_\mu = 0. \tag{23.13}$$

Unter der Annahme eines homogenen Raum-Zeit-Kontinuums muss die Transformation zwischen $x'$ und $x$ linear sein

Requiring a homogeneous space-time continuum the transformation between $x'$ and $x$ has to be linear

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \tag{23.14}$$

und es muss gelten $s'^2 = f s^2$ mit einer Konstanten $f$. Verlangen wir, dass der Raum isotrop ist und kein Inertialsystem ausgezeichnet ist, so folgt $f = 1$. Die Bedingung $s'^2 = s^2$ impliziert

and $s'^2 = f s^2$ with some constant $f$ has to hold. If we require that space is isotropic and no system of inertia is preferred, then $f = 1$ has to hold. The condition $s'^2 = s^2$ implies

$$s'^2 = x'^\mu x'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \Lambda_\mu{}^\kappa x_\kappa = s^2 = x^\nu \delta_\nu{}^\kappa x_\kappa, \tag{23.15}$$

was für beliebiges $x$ erfüllt ist, wenn

which is fulfilled for arbitrary $x$, if

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\Lambda_{\mu}{}^{\kappa} = \delta_{\nu}{}^{\kappa} \tag{23.16}$$

erfüllt ist. Die Umkehrtransformation von (23.14) folgt aus

holds. The inverse transformation of (23.14) follows from

$$x^{\kappa} = \delta_{\nu}{}^{\kappa}x^{\nu} = \Lambda_{\mu}{}^{\kappa}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} = \Lambda_{\mu}{}^{\kappa}x'^{\mu}. \tag{23.17}$$

Aus (23.16) folgt speziell für $\nu = \kappa = 0$ die Beziehung $(\Lambda^{00})^2 - \sum_{\alpha}(\Lambda^{\alpha 0})^2 = 1$. Man beachte, dass $\Lambda^{\alpha}{}_{0} = +\Lambda^{\alpha 0}$, $\Lambda_{\alpha}{}^{0} = -\Lambda^{\alpha 0}$. Daher ist $|\Lambda^{00}| > 1$. Man unterscheidet zwischen Transformationen mit positivem und negativem $\Lambda^{00}$, da es keinen kontinuierlichen Übergang zwischen diesen beiden Klassen gibt. Die Bedingung $\Lambda^{00} > 0$ sagt aus, dass $\Lambda^{00} = \frac{dt}{dt'}|_{\mathbf{r}'} > 0$, das heißt eine in $S'$ ruhende Uhr läuft von $S$ aus gesehen in der gleichen Zeitrichtung, wie die in $S$ synchronisierten Uhren (und nicht rückwärts).

From (23.16) one obtains in particular for $\nu = \kappa = 0$ the relation $(\Lambda^{00})^2 - \sum_{\alpha}(\Lambda^{\alpha 0})^2 = 1$. Note that $\Lambda^{\alpha}{}_{0} = +\Lambda^{\alpha 0}$, $\Lambda_{\alpha}{}^{0} = -\Lambda^{\alpha 0}$. Thus one has $|\Lambda^{00}| > 1$. One distinguishes between transformations with positive and negative $\Lambda^{00}$, since there is no continuous transition between these two classes. The condition $\Lambda^{00} > 0$ means that $\Lambda^{00} = \frac{dt}{dt'}|_{\mathbf{r}'} > 0$, that is a clock which is at rest in $S'$ changes its time seen from $S$ with the same direction as the clock at rest in $S$ (and not backwards).

Schließlich lässt sich noch eine Aussage über $\det(\Lambda^{\mu}{}_{\nu})$ machen. Aus (23.16) folgt

Finally we can make a statement on $\det(\Lambda^{\mu}{}_{\nu})$. From (23.16) it follows that

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}g_{\mu\lambda}\Lambda^{\lambda}{}_{\rho}g^{\rho\kappa} = \delta_{\nu}{}^{\kappa}. \tag{23.18}$$

Unter Verwendung des Determinanten-Multiplikationssatzes folgt

Using the theorem on the multiplication of determinants we obtain

$$\det(\Lambda^{\mu}{}_{\nu})^2 \det(g_{\mu\lambda}) \det(g^{\rho\kappa}) = 1. \tag{23.19}$$

Da $\det(g_{\mu\lambda}) = \det(g^{\rho\kappa}) = -1$ folgt

Since $\det(g_{\mu\lambda}) = \det(g^{\rho\kappa}) = -1$ one obtains

$$\det(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = \pm 1. \tag{23.20}$$

Betrachten wir nur Rechts-Basis-Systeme, so ist $\det(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = +1$. Transformationen, die

If we consider only a right-basis-system then we have $\det(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = +1$. Transformations which fulfill

$$\Lambda^{00} > 0, \quad det(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = 1 \tag{23.21}$$

erfüllen, heißen eigentliche Lorentz-Transformationen.

are called proper Lorentz transformations.

Gl. (23.21) hat die Konsequenz, dass das vierdimensionale Raumzeitvolumen invariant ist

Eq. (23.21) has the consequence, that the fourdimensional space time volume is invariant

$$dt'd^3r' = \frac{1}{\mathrm{c}}d^4x' = \frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}d^4x = \frac{1}{\mathrm{c}}\det(\Lambda^{\mu}{}_{\nu})d^4x = \frac{1}{\mathrm{c}}d^4x = dtd^3r. \tag{23.22}$$

Legen wir die z- und die z′-Achse in Richtung der Relativgeschwindigkeit $v$ der sich gegeneinander bewegenden Inertialsysteme und setzen wir zusätzlich $x' = x$, $y' = y$, so folgt die spezielle Transformation (23.2). Die zugehörige Matrix $\Lambda$ lautet

If the direction of the z- and the z'-axes point into the direction of the relative velocity between both inertial systems and $x' = x$, $y' = y$, then the special transformation (23.2) follows. The corresponding matrix $\Lambda$ reads

$$(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{23.23}$$

mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \tag{23.24}$$

with

### 23.b.$\alpha$ Zeitdilatation

Wir betrachten nun eine in $S'$ ruhende Uhr im System $S$. Aus

$$t = \gamma(t' + \frac{vz'}{c^2}) \tag{23.25}$$

folgt dann

$$\Lambda_0{}^0 = \left.\frac{\partial t}{\partial t'}\right|_{\mathbf{r}'} = \gamma. \tag{23.26}$$

Die in $S'$ ruhende Uhr geht von $S$ aus betrachtet langsamer

$$\Delta t' = \left.\frac{\partial t'}{\partial t}\right|_{\mathbf{r}'} \Delta t = \frac{1}{\gamma}\Delta t = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\Delta t. \tag{23.27}$$

Dieses Phänomen bezeichnet man als Zeitdilatation.

### 23.b.$\alpha$ Time Dilatation

We consider now a clock in the system $S$ which is at rest in $S'$. From

and we find that

Thus the clock at rest in $S'$ runs slower when seen from $S$

This phenomenon is called time dilatation.

### 23.b.$\beta$ Längenkontraktion

Aus

$$z' = \gamma(z - vt) \tag{23.28}$$

folgt

$$\Lambda^3{}_3 = \left.\frac{\partial z'}{\partial z}\right|_t = \gamma \tag{23.29}$$

und damit

$$\Delta z = \left.\frac{\partial z}{\partial z'}\right|_t \Delta z' = \frac{1}{\gamma}\Delta z' = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\Delta z'. \tag{23.30}$$

Ein Maßstab, der in $S'$ ruht und in der Richtung der Relativ-Bewegung ausgedehnt ist, erscheint also in $S$ verkürzt. Man bezeichnet das als Längenkontraktion. Dagegen bleiben die Entfernungen senkrecht zur Bewegungsrichtung unverändert: $\Delta x' = \Delta x$, $\Delta y' = \Delta y$.

Diese Verkürzung bewirkt, dass in (23.3) die Länge $l$ durch $l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ zu ersetzen ist. Dann stimmen die beiden Laufzeiten des Lichts unabhängig von der Geschwindigkeit $v$ überein, $t_1 = t_2$.

### 23.b.$\beta$ Lorentz Contraction

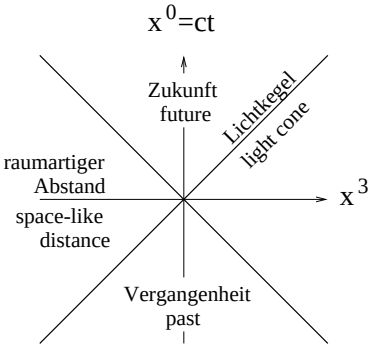
A length-meter which is at rest in $S'$ and is extended in the direction of the relative movement, appears consequently contracted in $S$. This is called Lorentz contraction or FitzGerald-Lorentz contraction. However, the distances perpendicular to the velocity are unaltered: $\Delta x' = \Delta x$, $\Delta y' = \Delta y$.

This contraction has the effect, that in (23.3) the length $l$ has to be replaced by $l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Then the two times the light has to travel agree independent of the velocity $v$, $t_1 = t_2$.

# 24 Viererskalare und Vierervektoren

## 24.a Abstand und Eigenzeit als Viererskalare

Eine Größe, die invariant gegen Lorentz-Transformationen ist, heißt Viererskalar.
Beispiel: Gegeben seien zwei Raum-Zeit-Punkte (Ereignisse) $(x^\mu)$, $(\bar{x}^\mu)$. Die Größe




$$s^2 = (x^\mu - \bar{x}^\mu)(x_\mu - \bar{x}_\mu) \tag{24.1}$$

ist ein Viererskalar. Sie hat in jedem Inertialsystem den gleichen Wert. Speziell für $\bar{x}^\mu = 0$ (Ursprung) ist $s^2 = x^\mu x_\mu$.

### 24.a.$\alpha$ Raumartiger Abstand $s^2 < 0$

Wenn $s^2 < 0$, dann gibt es Inertialsysteme, in denen beide Ereignisse gleichzeitig stattfinden $x'^0 = 0$. Sei etwa $(x^\mu) = (ct, 0, 0, z)$. Dann erhält man aus (23.2)

$$t' = \frac{t - \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{24.2}$$

mit $v = tc^2/z$

$$t' = 0, \quad z' = \frac{z(1 - \frac{v^2}{c^2})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = z\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \pm\sqrt{z^2 - c^2t^2} = \pm\sqrt{-s^2}. \tag{24.3}$$

Man bezeichnet daher zwei solche Ereignisse als raumartig zu einander gelegen.

### 24.a.$\beta$ Zeitartiger Abstand $s^2 > 0$

In diesem Fall existiert ein Inertialsystem, in dem beide Ereignisse am gleichen Ort stattfinden ($\mathbf{x}' = \mathbf{0}$). In der Transformation (23.2) wählen wir $v = z/t$. Dann folgt

$$t' = \frac{t(1 - \frac{v^2}{c^2})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \text{sign}\,(t)\sqrt{t^2 - \frac{z^2}{c^2}} = \text{sign}\,(t)\frac{s}{c}, \quad z' = 0. \tag{24.4}$$

# 24 Four-Scalars and Four-Vectors

## 24.a Distance and Proper Time as Four-Scalars

A quantity which is invariant under Lorentz-transformations is called four-scalar.
Example: Given two points in space-time (events) $(x^\mu)$, $(\bar{x}^\mu)$. The quantity

is a four-scalar. It assumes the same number in all systems of inertia. Especially for $\bar{x}^\mu = 0$ (origin) it is $s^2 = x^\mu x_\mu$.

### 24.a.$\alpha$ Space-like distance $s^2 < 0$

If $s^2 < 0$, then there are systems of inertia, in which both events occur at the same time $x'^0 = 0$. If for example $(x^\mu) = (ct, 0, 0, z)$. Then one obtains from 23.2)

with $v = tc^2/z$

Thus one calls such two events space-like separated.

### 24.a.$\beta$ Time-like distance $s^2 > 0$

In this case there exists a system of inertia in which both events take place at the same point in space ($\mathbf{x}' = \mathbf{0}$). We choose $v = z/t$ in the transformation (23.2) and obtain

Ein Ereignis ist früher als das andere, das heißt, das Vorzeichen von $t'$ stimmt mit dem von $t$ überein.

One event takes place before the other that is the sign of $t'$ agrees with that of $t$.

**Eigenzeit $\tau$**

**Proper Time $\tau$**

Unter der Eigenzeit $\tau$ versteht man die Zeit, die im jeweiligen Ruhesystem verstreicht. Bewegt sich ein Punkt mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$, so gilt für seine Eigenzeit

The proper time $\tau$ is the time which passes in the rest system under consideration. If a point moves with velocity $\mathbf{v}(t)$ its proper time varies as

$$d\tau = \frac{ds}{\mathrm{c}} = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{\mathrm{c}^2}}\,dt, \tag{24.5}$$

also

that is

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2(t)}{\mathrm{c}^2}}\,dt. \tag{24.6}$$

Die Eigenzeit ist unabhängig vom Inertialsystem, also ein Viererskalar.

The proper time is independent of the system of inertia, thus it is a four-scalar.

**24.a.$\gamma$ Lichtartiger Abstand $s^2 = 0$**

**24.a.$\gamma$ Light-like distance $s^2 = 0$**

Wenn ein Lichtblitz direkt von einem Ereignis zu einem anderen läuft, dann ist deren Abstand $s = 0$. Die in einem Inertialsystem gemessene Zeit kann je nach Inertialsystem beliebig lang oder kurz sein, jedoch kann sich die Reihenfolge der Ereignisse (bei einer eigentlichen Lorentz-Transformation) nicht umkehren.

If a light flash propagates directly from one event to another, then the distance of these two events $s = 0$. The time measured in a system of inertia depends on the system of inertia and may be arbitrarily long or short, however, the sequence of the events (under proper Lorentz transformation) cannot be reversed.

Ein weiterer Viererskalar ist die Ladung.

Another four-scalar is the charge.

## 24.b Weltgeschwindigkeit als Vierervektor

## 24.b World Velocity as Four-Vector

Transformiert sich eine vierkomponentige Größe $(A^\mu)$ beim Übergang von einem Inertialsystem zum anderen wie die Raum-Zeit-Koordinaten $(x^\mu)$, so bilden sie einen Vierervektor

If a four-component quantity $(A^\mu)$ transforms by the transition from one system of inertia to another as the space-time coordinates $(x^\mu)$, then it is a four-vector

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu. \tag{24.7}$$

Ein Beispiel ist die Weltgeschwindigkeit

An example is the world velocity

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma v^\mu \text{ mit } v^0 = \frac{dx^0}{dt} = \mathrm{c}\frac{dt}{dt} = \mathrm{c}. \quad \text{(with)} \tag{24.8}$$

Die Weltgeschwindigkeit $(u^\mu) = (\mathrm{c}\gamma, \mathbf{v}\gamma)$ ist ein Vierer-Vektor. Da $\tau$ invariant gegen Lorentz-Transformationen ist, transformiert sie sich wie $(x^\mu)$. Dagegen ist $(\mathrm{c}, \mathbf{v})$ kein Vierer-Vektor. Es ist

The world velocity $(u^\mu) = (\mathrm{c}\gamma, \mathbf{v}\gamma)$ is a four-vector. Since $\tau$ is invariant under Lorentz transformations, its components transform like $(x^\mu)$. However, $(\mathrm{c}, \mathbf{v})$ is not a four-vector. One has

$$u^\mu u_\mu = (\mathrm{c}^2 - \mathbf{v}^2)\gamma^2 = \mathrm{c}^2. \tag{24.9}$$

Allgemein ist das Skalar-Produkt zweier Vierer-Vektoren $(A^\mu)$ und $(B^\mu)$ ein Vierererskalar

Quite generally the scalar product of two four-vectors $(A^\mu)$ and $(B^\mu)$ is a four-scalar

$$A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\kappa A^\nu B_\kappa = \delta^\kappa_\nu A^\nu B_\kappa = A^\nu B_\nu. \tag{24.10}$$

Wir zeigen das folgende Lemma: Ist $(a^\mu)$ ein beliebiger Vierervektor (oder hat man einen vollständigen Satz Vierervektoren) und ist $a^\mu b_\mu$ ein Viererskalar, dann ist auch $(b^\mu)$ ein Vierervektor. Beweis:

We show the following lemma: If $(a^\mu)$ is an arbitrary four-vector (or one has a complete set of four-vectors) and $a^\mu b_\mu$ is a four-scalar then $(b^\mu)$ is a four-vector too. Proof:

$$a^\mu b_\mu = a'^\kappa b'_\kappa = \Lambda^\kappa{}_\mu a^\mu b'_\kappa. \tag{24.11}$$

Da dies für alle $(a^\mu)$ oder einen vollständigen Satz gilt, gilt auch $b_\mu = \Lambda^\kappa{}_\mu b'_\kappa$. Dies ist aber die Transformationsformel (23.17) für Vierervektoren.

Since this holds for all $(a^\mu)$ or for a complete set, one has $b_\mu = \Lambda^\kappa{}_\mu b'_\kappa$. This, however, is the transformation formula (23.17) for four-vectors.

**Additions-Theorem für Geschwindigkeiten**

Das Inertialsystem $S'$ bewege sich gegenüber $S$ mit der Geschwindigkeit $v$ in z-Richtung. In $S'$ bewege sich ein Punkt mit der Geschwindigkeit $w'$ ebenfalls in z-Richtung. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt er sich in $S$? Wir haben

**Addition theorem for velocities**

The system of inertia $S'$ moves with velocity $v$ in z-direction with respect to $S$. A point in $S'$ moves with velocity $w'$ also in z-direction. With which velocity does the point move in $S$? We have

$$z = \frac{z' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' + \frac{vz'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{24.12}$$

Mit $z' = w't'$ folgt dann

With $z' = w't'$ one obtains

$$z = \frac{(v + w')t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{(1 + \frac{vw'}{c^2})t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{24.13}$$

Daraus folgt die Geschwindigkeit des Punktes in $S$

From this one obtains the velocity of the point in $S$

$$w = \frac{z}{t} = \frac{w' + v}{1 + \frac{w'v}{c^2}}. \tag{24.14}$$

Wir beobachten

We observe

$$1 - \frac{w^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{\frac{w'}{c} + \frac{v}{c}}{1 + \frac{w'v}{c^2}}\right)^2 = \frac{(1 - \frac{w'^2}{c^2})(1 - \frac{v^2}{c^2})}{(1 + \frac{w'v}{c^2})^2}. \tag{24.15}$$

Wenn $|w'| < c$ und $|v| < c$, dann ist dieser Ausdruck positiv. Dann ist also auch $|w| < c$. Beispiel: $w' = v = 0.5c$, dann ist $w = 0.8c$.

If $|w'| < c$ and $|v| < c$, then this expression is positive. Then one obtains also $|w| < c$. Example: $w' = v = 0.5c$, then one obtains $w = 0.8c$.

## 24.c Viererstromdichte

Wir fassen Ladungs- und Stromdichte zusammen zur Viererstromdichte

## 24.c Current Density Four-Vector

We combine charge- and current-density in the charge-current density

$$(j^\mu) = (c\rho, \mathbf{j}) \tag{24.16}$$

und überzeugen uns, dass $j^\mu$ ein Vierervektor ist. Für Ladungen der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ gilt (für Ladungen verschiedener Geschwindigkeit können die Beiträge superponiert werden)

and convince us that $j^\mu$ is a four-vector. For charges of velocity $\mathbf{v}$ one has (the contributions of charges of different velocities can be superimposed)

$$j^\mu = \rho v^\mu, \quad (v^0 = c), \quad j^\mu = \rho\sqrt{1 - \beta^2}u^\mu \tag{24.17}$$

Falls $\rho\sqrt{1-\beta^2}$ ein Vierskalar ist, ist $j^\mu$ ein Vierervektor. Nun ist

If $\rho\sqrt{1-\beta^2}$ is a four-scalar then indeed $j^\mu$ is a four-vector. Now one has

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{V_0\sqrt{1-\beta^2}} \tag{24.18}$$

mit dem Volumen $V_0$ im Ruhesystem und der Längenkontraktion $V = V_0\sqrt{1-\beta^2}$. Da die Ladung $q$ und $V_0$ Vierskalare sind, ist auch $\rho\sqrt{1-\beta^2}$ ein Vierskalar.

with the volume $V_0$ in the rest system and the length contraction $V = V_0\sqrt{1-\beta^2}$. Since the charge $q$ and $V_0$ are four-scalars this holds also $\rho\sqrt{1-\beta^2}$.

Wir bringen nun die Kontinuitätsgleichung in Lorentz-invariante Form. Aus $\dot\rho + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ folgt

We bring the equation of continuity in Lorentz-invariant form. From $\dot\rho + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ one obtains

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0, \tag{24.19}$$

da $\partial j^0/\partial x^0 = \partial\rho/\partial t$. Wir betrachten nun die Transformations-Eigenschaften der Ableitungen $\partial/\partial x^\mu$

since $\partial j^0/\partial x^0 = \partial\rho/\partial t$. We consider now the transformation properties of the derivatives $\partial/\partial x^\mu$

$$\frac{\partial f}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial f}{\partial x^\nu} = \Lambda_\mu{}^\nu \frac{\partial f}{\partial x^\nu}, \tag{24.20}$$

das heisst die Ableitung transformiert sich gemäß

that is the derivatives transform according to

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu{}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{24.21}$$

wie $x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu$. Man schreibt daher

as $x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu$. Thus one writes

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu, \quad (\partial_\mu) = (\frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla). \tag{24.22}$$

Man achte auf die Stellung der Indices. Ähnlich gilt

Watch the positions of the indices. Similarly one has

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \partial^\mu, \quad (\partial^\mu) = (\frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla). \tag{24.23}$$

Man kann dann die Kontinuitätsgleichung als

Then the equation of continuity can be written

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{24.24}$$

schreiben. Generell ist die Vierdivergenz $\partial_\mu P^\mu = \partial^\mu P_\mu$ eines Vierervektors $P$ ein Vierskalar.

. Generally the four-divergency $\partial_\mu P^\mu = \partial^\mu P_\mu$ of a four-vector $P$ is a four-scalar.

## 24.d Vierpotential

Wir fassen nun $\mathbf{A}$ und $\Phi$ zusammen zum Vierpotential

## 24.d Four-Potential

We combine the potentials $\mathbf{A}$ and $\Phi$ in the four-potential

$$(A^\mu) = (\Phi, \mathbf{A}), \tag{24.25}$$

dann gilt

then one has

$$\Box A^\mu = -\frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^\mu \tag{24.26}$$

in der Lorenz-Eichung mit der Eichbedingung

in the Lorenz-gauge with the gauge condition

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{\mathrm{c}}\dot\Phi = 0 \to \partial_\mu A^\mu = 0. \tag{24.27}$$

Dabei ist

There

$$\Box = \triangle - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\partial_t^2 = -\partial_\mu \partial^\mu \tag{24.28}$$

ein Vierererskalar $\Box' = \Box$.

is a four-scalar $\Box' = \Box$.

Wir zeigen nun, dass die retardierte Lösung $A^\mu_{\mathrm{r}}$ manifest Lorentz-invariant ist. Wir behaupten

We now show that the retarded solution $A^\mu_{\mathrm{r}}$ is manifestly Lorentz-invariant. We claim

$$A^\mu_{\mathrm{r}}(x) = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^4y j^\mu(y) \delta(\frac{1}{2}s^2)\theta(x^0 - y^0) \tag{24.29}$$

$$s^2 = (x^\mu - y^\mu)(x_\mu - y_\mu) = \mathrm{c}^2(t_y - t_x)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 \tag{24.30}$$

$$\theta(x^0) = \begin{cases} 1 & x^0 > 0 \\ 0 & x^0 < 0 \end{cases} \tag{24.31}$$

Wir betrachten nun generell die Integration über eine $\delta$-Funktion, die von einer Funktion $f$ abhängt. Offensichtlich tragen nur die Nullstellen $t_i$ von $f$ bei,

We consider now generally the integration over a $\delta$-function, which depends on a function $f$. Apparently only the zeroes $t_i$ of $f$ contribute,

$$\int g(t)\delta(f(t))dt = \sum_i \int_{t_i-\epsilon}^{t_i+\epsilon} g(t)\delta(f(t))dt \quad \begin{matrix}\text{mit} \\ \text{with}\end{matrix} \quad f(t_i) = 0. \tag{24.32}$$

Mit $z = f(t)$, $dz = f'(t)dt$ folgt dann

With $z = f(t)$, $dz = f'(t)dt$ one obtains

$$\int g(t)\delta(f(t))dt = \sum_i \int_{-\epsilon/f'(t_i)}^{\epsilon/f'(t_i)} g(t_i)\delta(z)\frac{dz}{f'(t_i)} = \sum_i \frac{g(t_i)}{|f'(t_i)|}. \tag{24.33}$$

Damit ergeben sich die Nullstellen in der $\delta$-Funktion von (24.29) zu $t_y = t_x \pm |\mathbf{x}-\mathbf{y}|/\mathrm{c}$ und die Ableitungen zu $f'(t_y) = \mathrm{c}^2(t_y - t_x) = \pm \mathrm{c}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, was

Thus the zeroes in the $\delta$-function of (24.29) are $t_y = t_x \pm |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/\mathrm{c}$ and their derivatives are given by $f'(t_y) = \mathrm{c}^2(t_y - t_x) = \pm \mathrm{c}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, which yields

$$A^\mu_r(x) = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^4y j^\mu \delta(\frac{1}{2}s^2)\theta(t_x - t_y) = \int d^3y \frac{1}{\mathrm{c}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} j^\mu(\mathbf{y}, t_x - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{\mathrm{c}}) \tag{24.34}$$

ergibt. Wegen $\theta(t_x - t_y)$ erhalten wir die retardierte Lösung. Sie ist in Übereinstimmung mit (21.14) und (21.15). Ersetzen wir die $\theta$-Funktion durch $\theta(t_y - t_x)$, so ergibt sich die avancierte Lösung. Man beachte, dass sich das Vorzeichen der Zeitdifferenz längs des Lichtkegels unter eigentlichen Lorentz-Transformationen nicht ändert.

. The factor $\theta(t_x - t_y)$ yields the retarded solution. The solution is in agreement with (21.14) and (21.15). If we replace the $\theta$-function by $\theta(t_y - t_x)$, then we obtain the advanced solution. Remember, that the sign of the time difference does not change under proper Lorentz transformations.

# 25 Elektromagnetischer Feldtensor

## 25.a Feldtensor

Aus dem Viererpotential $(A^\mu)$ erhalten wir die Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$,

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi - \frac{1}{\mathrm{c}} \dot{\mathbf{A}}, \tag{25.1}$$

zum Beispiel

$$B_1 = \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} = \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3, \quad E_1 = -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} = \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1. \tag{25.2}$$

Wir führen daher den elektromagnetischen Feldtensor ein

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}. \tag{25.3}$$

Er ist antisymmetrisch. Explizit lautet er

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{25.4}$$

## 25.b Maxwell-Gleichungen

### 25.b.$\alpha$ Die inhomogenen Gleichungen

Die Gleichung $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$ lässt sich ausdrücken

$$\partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^0. \tag{25.5}$$

Aus der 1-Komponente von $\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{\mathrm{c}} \dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} \mathbf{j}$ folgt

$$\frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^3} - \frac{\partial E_1}{\partial x^0} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^1 \to \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} + \partial_0 F^{01} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^1, \tag{25.6}$$

ähnlich für die anderen Komponenten. Diese vier Komponenten-Gleichungen lassen sich zusammenfassen zu

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^\nu. \tag{25.7}$$

Setzen wir die Darstellung der Felder durch die Potentiale ein, (25.3), so folgt

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^\nu. \tag{25.8}$$

Mit der Bedingung für die Lorentz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$, (24.27) folgt dann

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^\nu \tag{25.9}$$

# 25 Electromagnetic Field Tensor

## 25.a Field Tensor

We obtain the fields $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ from the four-potential

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi - \frac{1}{\mathrm{c}} \dot{\mathbf{A}}, \tag{25.1}$$

for example

$$B_1 = \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} = \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3, \quad E_1 = -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} = \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1. \tag{25.2}$$

Thus we introduce the electromagnetic field tensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}. \tag{25.3}$$

It is antisymmetric. It reads explicitely

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{25.4}$$

## 25.b Maxwell's Equations

### 25.b.$\alpha$ The Inhomogeneous Equations

The equation $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$ reads

$$\partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^0. \tag{25.5}$$

From the 1-component of $\operatorname{curl} \mathbf{B} - \frac{1}{\mathrm{c}} \dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} \mathbf{j}$ one obtains

$$\frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^3} - \frac{\partial E_1}{\partial x^0} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^1 \to \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} + \partial_0 F^{01} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^1, \tag{25.6}$$

similarly for the other components. These four component-equations can be combined to

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^\nu. \tag{25.7}$$

If we insert the representation of the fields by the potentials, (25.3), we obtain

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^\nu. \tag{25.8}$$

Together with the condition for the Lorentz gauge $\partial_\mu A^\mu = 0$, (24.27) one obtains

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^\nu \tag{25.9}$$

in Übereinstimmung mit (24.26) und (24.28).

in agreement with (24.26) and (24.28).

### 25.b.$\beta$ Die homogenen Gleichungen

Ähnlich kann man die homogenen Maxwell-Gleichungen umschreiben. Aus $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$ wird

$$\partial^1 F^{23}+\partial^2 F^{31}+\partial^3 F^{12}=0 \tag{25.10}$$

und aus $(\operatorname{rot}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}})_x=0$ wird

$$-\partial^2 F^{30}-\partial^3 F^{02}-\partial^0 F^{23}=0. \tag{25.11}$$

Diese Gleichungen lassen sich zusammenfassen zu

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu}+\partial^\mu F^{\nu\lambda}+\partial^\nu F^{\lambda\mu}=0. \tag{25.12}$$

Man beachte, dass die Gleichung nur für $\lambda\neq\mu\neq\nu\neq\lambda$ nicht trivial ist. Sind zwei Indices gleich, so verschwindet die linke Seite identisch. Man kann diese Gleichungen auch mit Hilfe des dualen Feldtensors

$$\tilde{F}^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda} \tag{25.13}$$

ausdrücken. Dabei ist $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$ vollständig antisymmetrisch gegen Vertauschung der Indices. Das heißt, er ändert sein Vorzeichen, wenn zwei Indices vertauscht werden. Das impliziert, dass er verschwindet, wenn zwei Indices gleich sind. Er ist daher nur von Null verschieden, wenn alle vier Indices verschieden sind. Wir normieren ihn auf $\epsilon^{0123}=1$. Damit hat man explizit

$$(\tilde{F}^{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0&-B_1&-B_2&-B_3\\B_1&0&E_3&-E_2\\B_2&-E_3&0&E_1\\B_3&E_2&-E_1&0\end{pmatrix}. \tag{25.14}$$

und (25.12) lässt sich schreiben

$$\partial_\mu\tilde{F}^{\mu\nu}=0. \tag{25.15}$$

Man überzeuge sich, dass $\epsilon$ ein Pseudoskalar ist, das heißt es gilt

$$\epsilon'^{\mu\nu\kappa\lambda}=\det(\Lambda)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}, \tag{25.16}$$

wobei $\det(\Lambda)$ gemäß der Diskussion nach (23.19) nur die Werte $\pm1$ annimmt und für eigentliche Lorentz-Transformationen gleich $+1$ ist (23.21).

### 25.b.$\beta$ The Homogeneous Equations

Similarly the homogeneous Maxwell's equations can be written. From $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$ one obtains

and $(\operatorname{curl}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}})_x=0$ reads

These equations can be combined to

One observes, that these equations are only non-trivial for $\lambda\neq\mu\neq\nu\neq\lambda$. If two indices are equal, then the left-hand side vanishes identically. One may represent the equations equally well by the dual field tensor

. Here $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$ is completely antisymmetric against interchange of the four indices. Thus it changes sign, if two of the indices are exchanged. This implies, that it vanishes, if two indices are equal. It is only different from zero, if all four indices are different. It is normalized to $\epsilon^{0123}=1$. Then one obtains explicitely

and (25.12) can be written

One should convince oneself that $\epsilon$ is a pseudoscalar, that is

where $\det(\Lambda)$ takes only the values $\pm1$ according to the discussion after (23.19). For proper Lorentz transformations it equals $+1$ (23.21).

## 25.c Transformation der elektrischen und magnetischen Felder

Da sich $(\partial^\mu)$ und $(A^\nu)$ wie Vierer-Vektoren transformieren, gilt

$$F'^{\mu\nu}=\Lambda^\mu{}_\kappa\Lambda^\nu{}_\lambda F^{\kappa\lambda} \tag{25.17}$$

## 25.c Transformation of the Electric and Magnetic Fields

Since $(\partial^\mu)$ and $(A^\nu)$ transform like four-vectors, one has

für die Transformation des elektromagnetischen Feldes. Wählen wir speziell

for the transformation of the electromagnetic field. If we choose in particular

$$(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \tag{25.18}$$

so folgt

then one obtains

$$E_1' = F'^{10} = \Lambda^1{}_{\kappa}\Lambda^0{}_{\lambda}F^{\kappa\lambda} = \gamma F^{10} - \beta\gamma F^{13} = \gamma(E_1 - \beta B_2), \tag{25.19}$$

also

thus

$$E_1' = \gamma(E_1 - \frac{v}{\mathrm{c}}B_2), \tag{25.20}$$

ähnlich

similarly

$$B_1' = \gamma(B_1 + \frac{v}{\mathrm{c}}E_2) \tag{25.21}$$

$$E_2' = \gamma(E_2 + \frac{v}{\mathrm{c}}B_1), \qquad B_2' = \gamma(B_2 - \frac{v}{\mathrm{c}}E_1) \tag{25.22}$$

$$E_3' = E_3, \qquad B_3' = B_3, \tag{25.23}$$

was wir auch zu

which can be combined to

$$E_{\parallel}' = E_{\parallel}, \qquad B_{\parallel}' = B_{\parallel}, \qquad \begin{matrix}\text{Komponente} \\ \text{component}\end{matrix} \parallel \mathbf{v} \tag{25.24}$$

$$\mathbf{E}_{\perp}' = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \frac{\mathbf{v}}{\mathrm{c}} \times \mathbf{B}), \qquad \mathbf{B}_{\perp}' = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{v}}{\mathrm{c}} \times \mathbf{E}), \qquad \begin{matrix}\text{Komponenten} \\ \text{components}\end{matrix} \perp \mathbf{v} \tag{25.25}$$

zusammenfassen können.

.

## 25.d Felder einer gleichförmig bewegten Punktladung

Wir können daraus zum Beispiel die Felder einer Ladung, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_{\mathrm{z}}$ bewegt, berechnen. Im Ruhesystem $S'$ der Ladung, die im Ursprung ist, gilt

$$\mathbf{E}' = q\frac{\mathbf{r}'}{r'^3}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{0}. \tag{25.26}$$

Im System $S$ gilt für die Ladung $x_{\mathrm{q}} = y_{\mathrm{q}} = 0$, $z_{\mathrm{q}} = vt$. Wir drücken nun $\mathbf{r}'$ aus durch $\mathbf{r}$ und $t$ und erhalten

## 25.d Fields of a Point Charge in Uniform Motion

From this we can determine the fields of a charge which moves with constant velocity $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_{\mathrm{z}}$. In the rest system $S'$ of the charge, which is supposed to be in the origin of $S'$, one has

In the system $S$ the coordinates of the charge are $x_{\mathrm{q}} = y_{\mathrm{q}} = 0$, $z_{\mathrm{q}} = vt$. Now we express $\mathbf{r}'$ by $\mathbf{r}$ and $t$ and obtain

$$\mathbf{E}' = \left(\frac{qx}{N}, \frac{qy}{N}, \frac{q\gamma(z-vt)}{N}\right), \tag{25.27}$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{0}, \tag{25.28}$$

$$N = r'^3 = (x^2 + y^2 + \gamma^2(z-vt)^2)^{3/2}. \tag{25.29}$$

Es folgt

It follows that

$$\left.\begin{aligned} E_1 = \gamma(E_1' + \tfrac{v}{\mathrm{c}}B_2') = \tfrac{q\gamma x}{N} \\ E_2 = \gamma(E_2' - \tfrac{v}{\mathrm{c}}B_1') = \tfrac{q\gamma y}{N} \\ E_3 = E_3' = \tfrac{q\gamma(z-vt)}{N} \end{aligned}\right\} \mathbf{E} = \frac{q\gamma(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)}{N} \tag{25.30}$$

$$\left.\begin{array}{c} B_1 = \gamma(B_1' - \frac{v}{c}E_2') = -\frac{q\gamma\beta y}{N} \\ B_2 = \gamma(B_2' + \frac{v}{c}E_1') = \frac{q\gamma\beta x}{N} \\ B_3 = B_3' = 0 \end{array}\right\} \mathbf{B} = \frac{q\gamma(\mathbf{v}\times\mathbf{r})}{cN}. \tag{25.31}$$

Flächen konstanten $N$s sind in Bewegungsrichtung abgeplattete Rotations-Ellipsoide. Dabei ist kurze Halbachse / lange Halbachse $= 1/\gamma = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, also eine Verkürzung, wie sie auch bei der Längenkontraktion auftritt.

Areas of constant $N$ are oblate rotational ellipsoids. The ratio short half-axis / long half-axis is given by $1/\gamma = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, thus the same contraction as for the Lorentz contraction.

## 25.e Doppler-Effekt

Wir betrachten eine monochromatische ebene Welle

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\phi}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i\phi} \quad \begin{matrix}\text{mit}\\ \text{with}\end{matrix} \ \phi = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t. \tag{25.32}$$

Wir wissen, wie sich $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ und damit auch $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{B}_0$ transformieren. Es bleibt daher noch der Viererskalar der Phase $\phi$ zu betrachten. Schreiben wir

$$(k^\mu) = (\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}), \tag{25.33}$$

so folgt

## 25.e Doppler Effect

We consider a monochromatic plane wave

We know, how $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ and thus $\mathbf{E}_0$ and $\mathbf{B}_0$ transform. Thus we are left with considering the phase $\phi$ which is a four-scalar. If we write

then

$$\phi = -k_\mu x^\mu \tag{25.34}$$

. Da $(x^\mu)$ ein beliebiger Vierervektor und $\phi$ ein Viererskalar sind, folgt, dass $(k^\mu)$ ein Vierervektor ist. Daher erhält man für die spezielle Lorentz-Transformation (25.18)

follows. Since $(x^\mu)$ is an arbitrary four-vector and $\phi$ is a four-scalar, it follows, that $(k^\mu)$ has to be a four-vector. Thus one obtains for the special Lorentz transformation (25.18)

$$\omega' = ck'^0 = c\gamma(k^0 - \beta k^3) = \gamma(\omega - \beta c k^3), \quad k'^1 = k^1, \quad k'^2 = k^2, \quad k'^3 = \gamma(k^3 - \beta\frac{\omega}{c}). \tag{25.35}$$

Ist der Winkel zwischen z-Achse und Ausbreitungsrichtung $\theta$, so gilt $k^3 = \frac{\omega}{c}\cos\theta$ und es folgt

If the angle between z-axis and direction of propagation is $\theta$, then $k^3 = \frac{\omega}{c}\cos\theta$ holds, and one obtains

$$\omega' = \omega\gamma(1 - \beta\cos\theta). \tag{25.36}$$

Ist daher $\mathbf{v}$ parallel beziehungsweise antiparallel zur Ausbreitungs-Richtung, so hat man die longitudinale Doppler-Verschiebung

Thus if $\mathbf{v}$ is parallel and antiparallel to the direction of propagation, resp., then one deals with the longitudinal Doppler shift

$$\theta = 0: \quad \omega' = \omega\sqrt{\tfrac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{25.37}$$

$$\theta = \pi: \quad \omega' = \omega\sqrt{\tfrac{1+\beta}{1-\beta}}. \tag{25.38}$$

Ist dagegen $\theta = \pi/2$ beziehungsweise $\theta' = \pi/2$, so hat man die transversale Doppler-Verschiebung

If however $\theta = \pi/2$ and $\theta' = \pi/2$, resp., then one deals with the transverse Doppler shift.

$$\theta = \frac{\pi}{2}: \quad \omega' = \tfrac{\omega}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{25.39}$$

$$\theta' = \frac{\pi}{2}: \quad \omega' = \omega\sqrt{1-\beta^2}. \tag{25.40}$$

Dabei ist $\theta'$ der Winkel zwischen der z'-Achse und der Ausbreitungsrichtung in $S'$.

Here $\theta'$ is the angle between the z'-axis and the direction of propagation in $S'$.

# 26 Relativistische Mechanik

## 26.a Lorentz-Kraftdichte

Die Kraftdichte lautet

$$\mathbf{k} = \rho\mathbf{E} + \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{j} \times \mathbf{B}, \tag{26.1}$$

also zum Beispiel für die erste Komponente

$$k^1 = \rho E_1 + \frac{1}{\mathrm{c}}(j^2 B_3 - j^3 B_2) = \frac{1}{\mathrm{c}}(j^0 F^{10} - j^2 F^{12} - j^3 F^{13}) = \frac{1}{\mathrm{c}} j_\nu F^{1\nu}. \tag{26.2}$$

Man führt daher den Vierer-Vektor der Lorentz-Kraftdichte

$$k^\mu = \frac{1}{\mathrm{c}} j_\nu F^{\mu\nu} \tag{26.3}$$

ein. Wir betrachten die zeitartige Komponente

$$k^0 = \frac{1}{\mathrm{c}} j_\nu F^{0\nu} = \frac{1}{\mathrm{c}} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \tag{26.4}$$

Während die raumartigen Komponenten die mechanische Impulsänderung pro Zeit- und Volumen-Einheit angeben, gibt die zeitartige Komponente die pro Zeit und Volumen zugeführte Energie an

$$(k^\mu) = (\frac{1}{\mathrm{c}} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \mathbf{k}). \tag{26.5}$$

## 26.b Lorentz-Kraft auf eine Punktladung

Die Vierer-Stromdichte am Ort $\mathbf{x}$ einer Punktladung $q$ am Ort $\mathbf{x}_\mathrm{q}$ ist

$$j^\nu(\mathbf{x}, t) = q\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{q}(t))v^\nu. \tag{26.6}$$

Daher ist die auf die Punktladung wirkende Kraft gegeben durch

$$K^\mu = \frac{q}{\mathrm{c}} v_\nu F^{\mu\nu}. \tag{26.7}$$

Dies ist kein Vierer-Vektor, da $(v^\mu)$ kein Vierer-Vektor ist. Multiplizieren wir sie hingegen mit $\gamma$ so erhält man einen Vierer-Vektor, die Minkowski-Kraft

$$\gamma K^\mu = \frac{q}{\mathrm{c}} u_\nu F^{\mu\nu}. \tag{26.8}$$

$\mathbf{K}$ ist der der Punktladung pro Zeiteinheit zugeführte Impuls, $\mathrm{c}K^0$ die der Punktladung pro Zeiteinheit zugeführte Energie. Die Minkowski-Kraft ist dann der pro Eigenzeit zugeführte Impuls beziehungsweise die pro Eigenzeit zugeführte Energie durch c.

# 26 Relativistic Mechanics

## 26.a Lorentz Force Density

The force density reads

that is e.g. for the first component

Thus one introduces the four-vector of the force density

. We consider the time-like component

The time-like component gives the mechanical energy acquired per time and volume, whereas the space-like components give the rate of change of mechanic momentum per time and volume

## 26.b Lorentz Force Acting on a Point Charge

The four-current-density at $\mathbf{x}$ of a point charge $q$ at $\mathbf{x}_\mathrm{q}$ reads

Thus the force acting on the point charge is given by

This is not a four-vector, since $(v^\mu)$ is not a four-vector. If we multiply it by $\gamma$ then we obtain a four-vector, the Minkowski force

$\mathbf{K}$ is the momentum which is fed into the point charge per time unit, $\mathrm{c}K^0$ is the power fed into it. The Minkowski force is the momentum and the energy divided by c, resp., fed into it per proper time.

## 26.c Energie und Impuls eines Massenpunktes

Da Impulsänderung und Energieänderung durch c einen Vierervektor bilden, erwarten wir, dass auch mechanischer Impuls und Energie durch c einen Vierervektor bilden

$$(G^\mu) = (\frac{1}{\mathrm{c}}E, \mathbf{G}). \tag{26.9}$$

Im Ruhesystem $S'$ erwarten wir $\mathbf{G}' = \mathbf{0}$, das heißt

$$(G'^\mu) = (\frac{1}{\mathrm{c}}E_0, \mathbf{0}). \tag{26.10}$$

Im System $S$ ergibt sich mit der speziellen Transformation (23.23) für $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_\mathrm{z}$

$$\mathbf{G} = \quad \gamma\tfrac{v}{\mathrm{c}^2}E_0\mathbf{e}_\mathrm{z} = \quad \gamma\mathbf{v}\frac{E_0}{\mathrm{c}^2}, \tag{26.11}$$

$$E = \quad cG^0 = \mathrm{c}\gamma G'^0 = \quad \gamma E_0. \tag{26.12}$$

Für Geschwindigkeiten klein gegen die Lichtgeschwindigkeit folgt

$$\mathbf{G} = \frac{E_0}{\mathrm{c}^2}\mathbf{v}\big(1 + \frac{v^2}{2\mathrm{c}^2} + ...\big). \tag{26.13}$$

In der Newtonschen Mechanik haben wir

$$\mathbf{G}_\mathrm{Newton} = m\mathbf{v} \tag{26.14}$$

für einen Massenpunkt der Masse $m$. Für Geschwindigkeiten $v \ll \mathrm{c}$ sollte der Impuls der Newtonschen und der relativistischen Mechanik übereinstimmen. Daraus folgt

$$m = \frac{E_0}{\mathrm{c}^2} \to E_0 = m\mathrm{c}^2, \quad \mathbf{G} = m\gamma\mathbf{v}. \tag{26.15}$$

Für die Energie $E$ folgt dann

$$E = m\mathrm{c}^2\gamma = m\mathrm{c}^2 + \frac{m}{2}v^2 + O(v^4/\mathrm{c}^2). \tag{26.16}$$

Man ordnet dem Teilchen eine Ruheenergie $E_0 = m\mathrm{c}^2$ zu. Bei kleinen Geschwindigkeiten kommt dazu der aus der Newtonschen Mechanik bekannte Beitrag $\frac{m}{2}v^2$ hinzu. Damit gilt

$$G^\mu = mu^\mu. \tag{26.17}$$

Wir beobachten noch

$$G^\mu G_\mu = m^2u^\mu u_\mu = m^2\mathrm{c}^2, \tag{26.18}$$

woraus

$$-\mathbf{G}^2 + \frac{1}{\mathrm{c}^2}E^2 = m^2\mathrm{c}^2, \quad E^2 = m^2\mathrm{c}^4 + \mathbf{G}^2\mathrm{c}^2 \tag{26.19}$$

## 26.c Energy and Momentum of a Mass Point

We assume that also mechanical momentum and energy/c combine to a four-vector, since the change of momentum and energy divided by c are components of a four-vector

In the rest system $S'$ we expect $\mathbf{G}' = \mathbf{0}$ to hold, that is

In the system $S$ the special transformation (23.23) yields for $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_\mathrm{z}$

For velocities small in comparison to light-velocity one obtains

In Newton's mechanics we have

for a mass point of mass $m$. For velocities $v \ll \mathrm{c}$ the momentum of Newton's and of the relativistic mechanics should agree. From this one obtains

Then one obtains for the energy $E$

One associates a rest energy $E_0 = m\mathrm{c}^2$ with the masses. At small velocities the contribution $\frac{m}{2}v^2$ known from Newtonian mechanics has to be added

We finally observe

from which one obtains

folgt.

.

Solange die Teilchen erhalten bleiben, ist die Ruheenergie $E_0 = mc^2$ nicht beobachtbar. Bei der Umwandlung von Teilchen wird sie jedoch beobachtet, zum Beispiel beim Zerfall eines Teilchens in zwei andere

One does not observe the rest energy $E_0 = mc^2$ as long as the particles are conserved. However they are observed when the particles are converted, for example, when a particle decays into two other ones

$$\Lambda^0 \to \pi^- + p^+. \tag{26.20}$$

Mit den Massen

With the masses

$$m_\Lambda = 2182 m_e, \quad m_\pi = 273 m_e, \quad m_p = 1836 m_e \tag{26.21}$$

folgt für das vor dem Zerfall ruhende $\Lambda$ die Energie- und Impuls-Bilanz

one obtains the momentum and energy bilance for the $\Lambda$ which is at rest before the decay

$$m_\Lambda c^2 = \sqrt{m_\pi^2 c^4 + \mathbf{G}_\pi^2 c^2} + \sqrt{m_p^2 c^4 + \mathbf{G}_p^2 c^2} \tag{26.22}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{G}_\pi + \mathbf{G}_p. \tag{26.23}$$

Die Lösung des Gleichungssystems ergibt

The solution of the system of equations yields

$$|\mathbf{G}| = 4c\sqrt{M(m_\Lambda - M)(M - m_\pi)(M - m_p)}/m_\Lambda, \quad 2M = m_\Lambda + m_\pi + m_p. \tag{26.24}$$

Mit Hilfe der Vierervektoren kann man aus

By means of the four-vectors one may solve

$$G_\Lambda{}^\mu = G_\pi{}^\mu + G_p{}^\mu \tag{26.25}$$

nach $G_p$ auflösen und quadrieren

with respect to $G_p$ and take the square

$$G_p{}^\mu G_{p\mu} = (G_\Lambda^\mu - G_\pi^\mu)(G_{\Lambda\mu} - G_{\pi\mu}) = G_\Lambda^\mu G_{\Lambda\mu} + G_\pi^\mu G_{\pi\mu} - 2G_\Lambda^\mu G_{\pi\mu}. \tag{26.26}$$

Dies ergibt

This yields

$$m_p^2 c^2 = m_\Lambda^2 c^2 + m_\pi^2 c^2 - 2m_\Lambda E_\pi \tag{26.27}$$

und damit

and therefore

$$E_\pi = \frac{c^2}{2m_\Lambda}\left(m_\Lambda^2 + m_\pi^2 - m_p^2\right) \tag{26.28}$$

und analog

and analogously

$$E_p = \frac{c^2}{2m_\Lambda}\left(m_\Lambda^2 - m_\pi^2 + m_p^2\right). \tag{26.29}$$

## 26.d Bewegungsgleichung

## 26.d Equation of Motion

Wir schreiben nun noch explizit die Bewegungsgleichung für Massenpunkte auf

Finally we write down explicitely the equations of motion for point masses

$$\frac{dG^\mu}{dt} = K^\mu. \tag{26.30}$$

Wie wir früher schon bemerkten, ist die Gleichung nicht manifest Lorentz-invariant. Wir haben jedoch

As mentioned before these equations are not manifestly Lorentz-invariant. We have, however,

$$\frac{dG^\mu}{d\tau} = \frac{dG^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{dG^\mu}{dt} = \gamma K^\mu, \tag{26.31}$$

wobei die rechte Seite wieder die Minkowski-Kraft ist. In dieser Form ist die Bewegungsgleichung manifest Lorentz-invariant.

where the right-hand side is the Minkowski force. In this form the equations of motion are manifestly Lorentz invariant.

Falls eine Kraft die Ruheenergie eines Teilchens nicht ändert, so folgt aus

If the force does not change the rest energy of a particle, one obtains from

$$G^\mu G_\mu = m^2 \mathrm{c}^2 \rightarrow \frac{d}{d\tau}(G^\mu G_\mu) = 0 \rightarrow G^\mu \gamma K_\mu = 0 \rightarrow u^\mu K_\mu = 0. \tag{26.32}$$

Die Kraft ist orthogonal zur Weltgeschwindigkeit. Als Beispiel dient die Lorentz-Kraft

The force is orthogonal on the world velocity. An example is the Lorentz force

$$u_\mu K^\mu = \frac{q}{\mathrm{c}} \gamma v_\mu v_\nu F^{\mu\nu} = 0, \tag{26.33}$$

da $F^{\mu\nu}$ antisymmetrisch ist. Wir beobachten

since $F^{\mu\nu}$ is antisymmetric. We observe

$$v^\mu K_\mu = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{K} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{c}} \frac{dE}{dt} = 0. \tag{26.34}$$

Die Gleichung (26.32) ist also äquivalent zu

Thus equation (26.32) is equivalent to

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{K}, \tag{26.35}$$

die die der Masse zugeführte Leistung angibt.

which yields the power fed into the kinetic energy of the mass.

# 27 Lagrange-Formulierung

## 27.a Lagrange-Funktion einer massiven Ladung im elektromagnetischen Feld

Wir behaupten, die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ einer Punktladung $q$ der Masse $m$ im elektromagnetischen Feld kann geschrieben werden als

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}} - q\Phi(\mathbf{r},t) + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\cdot\dot{\mathbf{r}}. \tag{27.1}$$

Die Wirkung $I$ kann dann

$$I = \int dt\mathcal{L} = -mc^2\int d\tau - \frac{q}{c}\int dtA^\mu\frac{dx_\mu}{dt} = \int d\tau(-mc^2 - \frac{q}{c}A^\mu u_\mu), \tag{27.2}$$

das heißt als Vierer-Skalar geschrieben werden.

Wir überzeugen uns nun, dass hieraus die korrekten Bewegungsgleichungen folgen. Die Bewegungs-Gleichung lautet

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_\alpha} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\alpha} = 0, \tag{27.3}$$

woraus mit

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_\alpha} = \frac{m\dot{x}^\alpha}{\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}}} + \frac{q}{c}A^\alpha(\mathbf{r}(t),t) = G^\alpha + \frac{q}{c}A^\alpha \tag{27.4}$$

dann

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G} + \frac{q}{c}\dot{\mathbf{A}} + \frac{q}{c}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} + q\nabla\Phi - \frac{q}{c}\nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) = 0 \tag{27.5}$$

folgt. Man beachte, dass in $\dot{\mathbf{A}}$ nur die partielle Zeit-Ableitung von $\mathbf{A}$ steckt, daher haben wir $d\mathbf{A}/dt = \dot{\mathbf{A}} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}$. Durch geeignetes Zusammenfassen der Beiträge folgt

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G} + q(\nabla\Phi + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}) - \frac{q}{c}\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A}) = 0 \tag{27.6}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G} - q\mathbf{E} - \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} = 0. \tag{27.7}$$

Also liefert die obige Lagrange-Funktion tatsächlich die korrekte Bewegungsgleichung.

## 27.b Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes

Die Lagrange-Dichte $L$ des elektromagnetischen Feldes eines Systems von Ladungen setzt sich aus drei Anteilen zusammen

$$L = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{c}A^\mu j_\mu + L_{\text{mech}}. \tag{27.8}$$

# 27 Lagrangian Formulation

## 27.a Lagrangian of a Massive Charge in the Electromagnetic Field

We claim, that the Lagrangian $\mathcal{L}$ of a point charge $q$ of mass $m$ in an electromagnetic field can be written

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}} - q\Phi(\mathbf{r},t) + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\cdot\dot{\mathbf{r}}. \tag{27.1}$$

Then the action $I$ can be written

$$I = \int dt\mathcal{L} = -mc^2\int d\tau - \frac{q}{c}\int dtA^\mu\frac{dx_\mu}{dt} = \int d\tau(-mc^2 - \frac{q}{c}A^\mu u_\mu), \tag{27.2}$$

that is as a four-scalar.

Now we show, that this Lagrangian yields the correct equations of motion

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_\alpha} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\alpha} = 0, \tag{27.3}$$

from which by use of

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_\alpha} = \frac{m\dot{x}^\alpha}{\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}}} + \frac{q}{c}A^\alpha(\mathbf{r}(t),t) = G^\alpha + \frac{q}{c}A^\alpha \tag{27.4}$$

one finally obtains

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G} + \frac{q}{c}\dot{\mathbf{A}} + \frac{q}{c}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} + q\nabla\Phi - \frac{q}{c}\nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) = 0 \tag{27.5}$$

. Note that $\dot{\mathbf{A}}$ contains only the partial time-derivative of $\mathbf{A}$, thus we have $d\mathbf{A}/dt = \dot{\mathbf{A}} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}$. By suitable combination of the contributions one obtains

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G} + q(\nabla\Phi + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}) - \frac{q}{c}\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A}) = 0 \tag{27.6}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G} - q\mathbf{E} - \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} = 0. \tag{27.7}$$

Thus the Lagrangian given above yields the correct equation of motion.

## 27.b Lagrangian Density of the Electromagnetic Field

The Lagrangian density $L$ of the electromagnetic field of a system of charges consists of three contributions

$$L = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{c}A^\mu j_\mu + L_{\text{mech}}. \tag{27.8}$$

Der mechanische Anteil ist für Punktladungen der Masse $m_i$

The mechanical part for point charges of mass $m_i$ reads

$$L_{\rm mech} = -\sum_i m_i \mathrm{c}^3 \int d\tau \delta^4(x - x_i(\tau)), \tag{27.9}$$

der nach Integration über $d^4x$ den entsprechenden Anteil der Wirkung $I$ in (27.1) ergibt. Der zweite Anteil in (27.8) beschreibt die Wechselwirkung zwischen dem Feld und der Ladung. Integration dieses Anteils für Punktladungen unter Verwendung von

which yields after integration over $d^4x$ the corresponding contribution to the action $I$ given in (27.1). The second contribution in (27.8) describes the interaction between field and charge. Integration of this contribution for point charges using

$$j_\mu(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \frac{dx_{i,\mu}}{dt} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \tag{27.10}$$

ergibt den entsprechenden Anteil in (27.1). Der erste Anteil ist der Beitrag des freien Feldes. Dass er die korrekten Maxwell-Gleichungen ergibt, werden wir unten nachprüfen. Die Wirkung selbst ergibt sich zu

yields the corresponding contribution in (27.1). The first contribution is that of the free field. Below we will see, that it yields Maxwell's equations correctly. The action itself reads

$$I = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^4x L(x) = \int dt \int d^3x L(\mathbf{x}, t) = \int dt \mathcal{L}(t), \quad \mathcal{L}(t) = \int d^3x L(\mathbf{x}, t). \tag{27.11}$$

Die Wirkung muss nun extremal unter Variation der Felder $A$ sein. Dabei betrachten wir $F$ als Funktion von $A$ (25.3), $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Dann ergibt die Variation bezüglich $A$

The action has to be extremal if the fields $A$ are varied. There we have to consider $F$ as function of $A$ (25.3), $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Then the variation with respect to $A$ yields

$$\begin{aligned}
\delta L &= -\frac{1}{8\pi} F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} - \frac{1}{\mathrm{c}} j_\nu \delta A^\nu && (27.12)\\
\delta F^{\mu\nu} &= \delta(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu && (27.13)\\
F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} &= F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu - F_{\mu\nu} \partial^\nu \delta A^\mu = 2 F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu && (27.14)\\
\delta L &= -\frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu - \frac{1}{\mathrm{c}} j_\nu \delta A^\nu. && (27.15)
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Variation der Wirkung nach $A$

Thus the variation of the action with respect to $A$ is

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int d^4x \Big( -\frac{1}{4\pi \mathrm{c}} F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu - \frac{1}{\mathrm{c}^2} j_\nu \delta A^\nu \Big) \\
&= -\int d^4x \frac{1}{4\pi \mathrm{c}} \partial^\mu (F_{\mu\nu} \delta A^\nu) + \int d^4x \Big( \frac{1}{4\pi \mathrm{c}} \partial^\mu F_{\mu\nu} - \frac{1}{\mathrm{c}^2} j_\nu \Big) \delta A^\nu. && (27.16)
\end{aligned}$$

Der erste Term der zweiten Zeile ist ein Oberflächen-Term (im vier-dimensionalen Raum). Aus dem zweiten Term folgen die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (25.7)

The first term of the second line is a surface-term (in four dimensions). From the second term one concludes Maxwell's inhomogeneous equations (25.7)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^\nu. \tag{27.17}$$

Die homogenen Maxwell-Gleichungen sind bereits durch die Darstellung $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\nu$ erfüllt.

Maxwell's homogeneous equations are already fulfilled due to the representation $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\nu$.

Generell erhält man für eine Lagrange-Dichte, die von einem Feld $(A^\mu)$ und deren Ableitungen abhängt, durch Variation

Generally one obtains for a Lagrangian density, which depends on a field $(A^\mu)$ and its derivatives by variation

$$\mathrm{c}\delta I = \int d^4x \delta L(x)$$

$$= \int d^4x \left( \frac{\delta L}{\delta A^\nu(x)} \delta A^\nu(x) + \frac{\delta L}{\delta \partial^\mu A^\nu(x)} \partial^\mu \delta A^\nu(x) \right)$$
$$= \int d^4x \partial^\mu \left( \frac{\delta L}{\delta \partial^\mu A^\nu(x)} \delta A^\nu(x) \right) + \int d^4x \left( \frac{\delta L}{\delta A^\nu(x)} - \partial^\mu \left( \frac{\delta L}{\delta \partial^\mu A^\nu(x)} \right) \right) \delta A^\nu(x). \quad (27.18)$$

Es ist üblich, die partiellen Ableitungen von $L$ nach $A$ beziehungsweise $\partial A$ mit $\delta L/\delta ...$ zu bezeichnen. Da die Variation verschwinden muss, folgen allgemein die Bewegungsgleichungen

Usually one denotes the partial derivatives of $L$ with respect to $A$ and $\partial A$ by $\delta L/\delta ....$ Since the variation has to vanish, one obtains in general the equations of motion

$$\partial^\mu \left( \frac{\delta L}{\delta \partial^\mu A^\nu(x)} \right) - \frac{\delta L}{\delta A^\nu(x)} = 0. \quad (27.19)$$

Dies ist die Verallgemeinerung der Lagrangeschen Bewegungsgleichung (27.3) auf Felder. Neben der Zeitableitung von $\delta L/\delta \dot{A}^\nu$ treten auch die räumlichen Ableitungen von $\delta L/\delta \nabla A^\nu$ auf.

This is the generalization of Lagrange's equations of motion (27.3) for fields. There appear derivatives of $\delta L/\delta \nabla A^\nu$ with respect to the space variables besides the time-derivatives of $\delta L/\delta \dot{A}^\nu$.

# 28 Energie-Impuls-Tensor und Erhaltungsgrößen

## 28.a Der Tensor

Im Abschnitt 15.b hatten wir aus der Dichte der Lorentz-Kraft einen Erhaltungssatz für den Impuls des elektromagnetischen Feldes "im Vakuum", das heißt ohne Berücksichtigung zusätzlicher Beiträge in Materie hergeleitet

$$-\mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}_{\mathrm{s}} - \frac{\partial}{\partial x^\beta}T^{\alpha\beta}\mathbf{e}^\alpha, \tag{28.1}$$

$$\mathbf{g}_{\mathrm{s}} = \frac{1}{4\pi \mathrm{c}}\mathbf{E}\times\mathbf{B}, \tag{28.2}$$

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\big(E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta\big) - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{8\pi}\big(E^2+B^2\big). \tag{28.3}$$

Als nullte Komponente müssen wir die Energiedichte betrachten. Für diese hatten wir in Abschnitt 15.a gefunden

$$-k^0 = -\frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{\mathrm{c}}\operatorname{div}\mathbf{S} + \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{u} \tag{28.4}$$

$$\mathbf{S} = \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B} \tag{28.5}$$

$$u = \frac{1}{8\pi}\big(E^2+B^2\big). \tag{28.6}$$

Wir fassen zusammen

$$-k^\mu = -\partial_\nu T^{\mu\nu} \tag{28.7}$$

mit dem elektromagnetischen Energie-Impuls-Tensor

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -u & -\frac{1}{\mathrm{c}}S_1 & -\frac{1}{\mathrm{c}}S_2 & -\frac{1}{\mathrm{c}}S_3 \\ -\mathrm{c}g_{\mathrm{s}1} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ -\mathrm{c}g_{\mathrm{s}2} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ -\mathrm{c}g_{\mathrm{s}3} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}. \tag{28.8}$$

Man beobachtet, dass $T^{\mu\nu}$ symmetrisch ist, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, da $T_{\alpha\beta}$ symmetrisch ist und $\mathrm{c}\mathbf{g}_{\mathrm{s}} = \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ gilt. Man prüft leicht nach, dass

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\big(-F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^\kappa{}_\lambda F^\lambda{}_\kappa\big) \tag{28.9}$$

gilt, entweder durch explizites Auswerten und Vergleich oder aus

$$k^\mu = \frac{1}{\mathrm{c}}j_\lambda F^{\mu\lambda} = \frac{1}{4\pi}(\partial^\nu F_{\nu\lambda})F^{\mu\lambda} = \frac{1}{4\pi}\partial^\nu(F_{\nu\lambda}F^{\mu\lambda}) - \frac{1}{4\pi}F_{\nu\lambda}\partial^\nu F^{\mu\lambda}. \tag{28.10}$$

Nun folgt aus

$$F_{\nu\lambda}\big(\partial^\nu F^{\mu\lambda} + \partial^\mu F^{\lambda\nu} + \partial^\lambda F^{\nu\mu}\big) = 0 \tag{28.11}$$

# 28 Energy Momentum Tensor and Conserved Quantities

## 28.a The Tensor

In section 15.b we have calculated the conservation law for momentum from the density of the Lorentz-force in vacuo that is without considering additional contributions due to matter

The zeroth component is the energy-density. For this density we have obtainded in section 15.a

We summarize

with the electromagnetic energy-momentum tensor

One observes, that $T^{\mu\nu}$ is symmetric, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, since $T_{\alpha\beta}$ is symmetric and $\mathrm{c}\mathbf{g}_{\mathrm{s}} = \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ holds. One easily checks, that

holds either by explicit calculation and comparison or from

From

die Beziehung

$$\frac{1}{2}\partial^\mu\big(F_{\nu\lambda}F^{\lambda\nu}\big) + 2F_{\nu\lambda}\partial^\nu F^{\mu\lambda} = 0, \tag{28.12}$$

so dass wir schließlich

$$\begin{aligned} k^\mu &= \frac{1}{4\pi}\partial^\nu\big(F_{\nu\lambda}F^{\mu\lambda}\big) + \frac{1}{16\pi}\partial^\mu\big(F_{\nu\lambda}F^{\lambda\nu}\big) \\ &= \frac{1}{4\pi}\partial_\nu\big(-F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^\kappa{}_\lambda F^\lambda{}_\kappa\big) \end{aligned} \tag{28.13}$$

erhalten. $T^{\mu\nu}$ ist ein Vierer-Tensor, das heißt er transformiert sich gemäß

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\kappa \Lambda^\nu{}_\lambda T^{\kappa\lambda}. \tag{28.14}$$

## 28.b Erhaltungssätze

Wir gehen aus von einem Vierervektorfeld $(j^\mu(x))$. In jedem dreidimensionalen raumartigen Unterraum $R$ des vierdimensionalen Raums sei $(j^\mu)$ nur in einem endlichen Bereich von Null verschieden. Mit raumartig bezeichnen wir einen Raum, wenn je zwei Punkte des Raumes einen raumartigen Abstand haben. Eine Weltlinie, das heißt eine Linie, die überall Unterlichtgeschwindigkeit hat, durchstößt einen raumartigen Unterraum in genau einem Punkt. Trägt man den Unterraum als $x^0(\mathbf{r})$ auf, so ist die Steigung stets kleiner 1. Für die Weltlinie ist die Steigung dagegen überall größer 1. Die Punkte konstanter Zeit eines Inertialsystems bilden zum Beispiel einen raumartigen Raum. Wir integrieren nun die Divergenz $\partial_\mu j^\mu$ über das vierdimensionale Volumen $\Omega$, das von zwei raumartigen Räumen $R$ und $R'$ begrenzt wird und erhalten

$$\int_\Omega d^4x \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = \int_R d^3x (j^0 - \frac{\partial X}{\partial x^\alpha} j^\alpha) - \int_{R'} d^3x (j^0 - \frac{\partial X'}{\partial x^\alpha} j^\alpha). \tag{28.15}$$

Den Beitrag $\partial_\mu j^\mu$ integriert man einfach in $x^\mu$-Richtung bis zur Begrenzung $R$ beziehungsweise $R'$ oder bis $j^\mu$ verschwindet. Für die 0-Komponente ergibt das unmittelbar den angegebenen Beitrag. Für die 1-Komponente bleibt zunächst das Integral $\pm\int dx^0 dx^2 dx^3 j^1$ an der Berandung.

so that finally we obtain

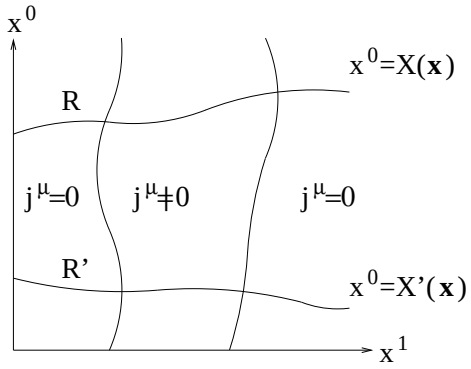
. $T^{\mu\nu}$ is a four-tensor, i.e. it transforms according to

## 28.b Conservation Laws

We start out from a four-vector field $(j^\mu(x)$. In any three-dimensional space-like subspace $R$ of the four-dimensional space be $(j^\mu)$ different from zero only in a finite region. We call a space space-like if any two points in this space have a space-like distance. A world-line, that is a line which everywhere has a velocity below light-speed hits a space-like subspace in exactly one point. If one plots the subspace as a function $x^0(\mathbf{r})$ then its slope is everywhere less then 1. The slope of the world-line is everywhere larger than 1. For example, the points of constant time in an inertial frame constitute such a space-like space. We now integrate the divergence $\partial_\mu j^\mu$ over the four-dimensional volume $\Omega$, which is bounded by two space-like spaces $R$ and $R'$ and obtain

The contribution $\partial_\mu j^\mu$ is integrated in $x^\mu$-direction until the boundary $R$ or $R'$ or until $j^\mu$ vanishes. This yields immediately the contribution given for the 0-component. For the 1-component one obtains initially the integral $\pm\int dx^0 dx^2 dx^3 j^1$ at the boundary.

Die $dx^0$-Integration lässt sich aber in eine $dx^1 \frac{\partial X}{\partial x^1}$-Integration umformen. Wächst (fällt) $X = x^0$ auf der Berandung mit $x^1$, so handelt es sich um die untere (obere) Grenze der Integration. Daher das Minus-Zeichen vor $\frac{\partial X}{\partial x^1}$. Entsprechendes gilt für die anderen Raumkomponenten.




The $dx^0$-integration may be transformed into an $dx^1 \frac{\partial X}{\partial x^1}$-integration. If $X = x^0$ increases (decreases) at the boundary with $x^1$, then this is the lower (upper) limit of the integration. Thus we have a minus-sign in front of $\frac{\partial X}{\partial x^1}$, similarly for the other space-components.

Wir können uns auch noch davon überzeugen, dass

We may convince ourselves that

$$\int_R d^3x \big(j^0 - \frac{\partial X}{\partial x^\alpha} j^\alpha\big) = \int_R dV_\mu j^\mu \tag{28.16}$$

mit $(dV_\mu) = (1, -\nabla X) d^3x$ ein Vierskalar ist. Führen wir nämlich einen Vierervektor $(\bar{j}^\mu)$ so ein, dass

with $(dV_\mu) = (1, -\nabla X) d^3x$ is a four-scalar. If we introduce a four-vector $(\bar{j}^\mu)$, so that

$$\bar{j}^\mu = \begin{cases} j^\mu & \text{in } R \\ 0 & \text{in } R' \end{cases}, \tag{28.17}$$

so folgt

then it follows that

$$\int_R dV_\mu j^\mu = \int_R dV_\mu \bar{j}^\mu = \int_\Omega d^4x \frac{\partial \bar{j}^\mu}{\partial x^\mu}, \tag{28.18}$$

wobei letzteres Integral offensichtlich ein Vierskalar ist, da sowohl $d^4x$ wie auch die Vierer-Divergenz von $\bar{j}$ ein Vierskalar ist. Da aber das Feld $(j^\mu)$ beliebig ist, gilt für jedes infinitesimale $(dV_\mu)$ aus $R$, dass $dV_\mu j^\mu$ ein Vierskalar ist. Da $(j^\mu)$ Vierervektor ist, muss auch $(dV^\mu)$ Vierervektor sein. Damit können wir (28.16) schreiben als

where the last integral is obviously a four-scalar, since both $d^4x$ and the four-divergence of $\bar{j}$ is a four-scalar. Since the field $(j^\mu)$ is arbitrary, we find that $dV_\mu j^\mu$ has to be a four-scalar for each infinitesimal $(dV_\mu)$ in $R$. Since $(j^\mu)$ is a four-vector, $(dV^\mu)$ must be a four-vector, too. Then (28.16) reads

$$\int_\Omega d^4x \partial_\mu j^\mu = \int_R dV_\mu j^\mu - \int_{R'} dV_\mu j^\mu. \tag{28.19}$$

Dies ist der Gaußsche Satz in vier Dimensionen.

This is the divergence theorem in four dimensions.

Wir ziehen nun Folgerungen daraus:

From this we conclude:

### 28.b.$\alpha$ Ladung

$(j^\mu)$ sei der Viererstrom der Ladungsdichte. Aus der Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ folgt für jedes raumartige $R$ der gleiche Wert

### 28.b.$\alpha$ Charge

$(j^\mu)$ be the four-vector of the current density. One obtains from the equation of continuity $\partial_\mu j^\mu = 0$ for each space-like $R$ the same result

$$q = \int_R dV_\mu j^\mu \tag{28.20}$$

für die Ladung, da das Integral der Divergenz über $\Omega$ in (28.19) verschwindet (da der Integrand verschwindet), und da man immer das gleiche $R'$ wählen kann. Die Ladung ist daher eine Erhaltungsgröße, genauer gesagt haben wir konsistentes Verhalten gefunden, denn wir haben bereits in Unterabschnitt 24.c angenommen, dass die Ladung erhalten ist. Neu ist, dass ihre Bestimmung in einem beliebigen dreidimensionalen Unterraum möglich ist.

for the charge, since the integral of the divergence in $\Omega$ in (28.19) vanishes, (since the integrand vanishes) and since one may always choose the same $R'$. Thus the charge is a conserved quantity, more precisely we have found a consistent behaviour, since we already have assumed in subsection 24.c that charge is conserved. New is, that it can be determined in an arbitrary space-like three-dimensional space.

### 28.b.$\beta$ Energie und Impuls

Aus

$$k^\mu = \partial_\nu T^{\mu\nu} \tag{28.21}$$

folgt

$$\int_\Omega d^4x k^\mu = \int_R dV_\nu T^{\mu\nu} - \int_{R'} dV_\nu T^{\mu\nu}. \tag{28.22}$$

In einem ladungsfreien Raum ($k^\mu = 0$), das heißt für freie elektromagnetische Wellen gilt dann, dass die Komponenten des Strahlungs-Impulses

$$G_{\mathrm{s}}^\mu = -\frac{1}{\mathrm{c}} \int_R dV_\nu T^{\mu\nu} \tag{28.23}$$

unabhängig von $R$ sind. Sie sind also erhalten. Es sei nun $(b_\mu)$ ein beliebiger konstanter Vierervektor. Dann ist $b_\mu T^{\mu\nu}$ ein Vierervektor und $\partial_\nu (b_\mu T^{\mu\nu}) = 0$. Damit wird dann $b_\mu G_{\mathrm{s}}^\mu$ zum Vierskalar und $G_{\mathrm{s}}^\mu$ ist ein Vierervektor.

Sind nun im Vierervolumen $\Omega$ Ladungen, so gilt

$$G_{\mathrm{s}}^\mu(R) = -\frac{1}{\mathrm{c}} \int_\Omega d^4x k^\mu + G_{\mathrm{s}}^\mu(R'). \tag{28.24}$$

Für Punktladungen $q_i$ hat man (26.7, 26.30)

$$\frac{1}{\mathrm{c}} \int d^4x k^\mu = \sum_i \int dt K_i^\mu = \sum_i \int dt \dot{G}_i^\mu = G_i^\mu(R) - G_i^\mu(R'). \tag{28.25}$$

Dabei ist $G_i^\mu(R) = m_i u_i^\mu(R)$ der Vierer-Impuls der Ladung $\#i$ an der Stelle, an der die Weltlinie der Ladung den Unterraum $R$ durchstößt. Damit ist

$$G^\mu = G_{\mathrm{s}}^\mu(R) + \sum_i G_i^\mu(R) \tag{28.26}$$

der erhaltene Vierer-Impuls.

### 28.b.$\gamma$ Drehimpuls und Schwerpunktsbewegung

Aus (28.7) folgt

$$\partial_\nu \left( x^\lambda T^{\mu\nu} - x^\mu T^{\lambda\nu} \right) = x^\lambda k^\mu - x^\mu k^\lambda + T^{\mu\lambda} - T^{\lambda\mu}. \tag{28.27}$$

### 28.b.$\beta$ Energy and Momentum

From

$$k^\mu = \partial_\nu T^{\mu\nu} \tag{28.21}$$

one obtains

$$\int_\Omega d^4x k^\mu = \int_R dV_\nu T^{\mu\nu} - \int_{R'} dV_\nu T^{\mu\nu}. \tag{28.22}$$

In a charge-free space ($k^\mu = 0$), that is for free electromagnetic waves one finds, that the components of the momentum of radiation

$$G_{\mathrm{s}}^\mu = -\frac{1}{\mathrm{c}} \int_R dV_\nu T^{\mu\nu} \tag{28.23}$$

are independent of $R$. Thus they are conserved. Now be $(b_\mu)$ an arbitrary but constant four-vector. Then $b_\mu T^{\mu\nu}$ is a four-vector and $\partial_\nu (b_\mu T^{\mu\nu}) = 0$. Then $b_\mu G_{\mathrm{s}}^\mu$ is a four-scalar and $G_{\mathrm{s}}^\mu$ is a four-vector.

If there are charges in the four-volume $\Omega$, then one obtains.

$$G_{\mathrm{s}}^\mu(R) = -\frac{1}{\mathrm{c}} \int_\Omega d^4x k^\mu + G_{\mathrm{s}}^\mu(R'). \tag{28.24}$$

For point-charges $q_i$ one has (26.7, 26.30)

$$\frac{1}{\mathrm{c}} \int d^4x k^\mu = \sum_i \int dt K_i^\mu = \sum_i \int dt \dot{G}_i^\mu = G_i^\mu(R) - G_i^\mu(R'). \tag{28.25}$$

Here $G_i^\mu(R) = m_i u_i^\mu(R)$ is the four-momentum of the charge $\#i$ at the point where its worldline hits the three-dimensional space $R$. Then

$$G^\mu = G_{\mathrm{s}}^\mu(R) + \sum_i G_i^\mu(R) \tag{28.26}$$

is the conserved four-momentum.

### 28.b.$\gamma$ Angular Momentum and Center of Mass

Eq. (28.7) yields

$$\partial_\nu \left( x^\lambda T^{\mu\nu} - x^\mu T^{\lambda\nu} \right) = x^\lambda k^\mu - x^\mu k^\lambda + T^{\mu\lambda} - T^{\lambda\mu}. \tag{28.27}$$

Da der Tensor $T$ symmetrisch ist, kürzen sich die beiden letzten Terme weg. Wir führen den Tensor

Since the tensor $T$ is symmetric, the last two terms cancel. We introduce the tensor

$$M_{\mathrm{s}}^{\lambda\mu}(R) = -\frac{1}{\mathrm{c}}\int_R dV_\nu (x^\lambda T^{\mu\nu} - x^\mu T^{\lambda\nu}) \tag{28.28}$$

ein. Er ist antisymmetrisch $M_{\mathrm{s}}^{\lambda\mu} = -M_{\mathrm{s}}^{\mu\lambda}$. Auf Grund von (28.19) gilt

. It is antisymmetric $M_{\mathrm{s}}^{\lambda\mu} = -M_{\mathrm{s}}^{\mu\lambda}$. Due to (28.19) one has

$$M_{\mathrm{s}}^{\lambda\mu}(R) = -\frac{1}{\mathrm{c}}\int_\Omega d^4x\big(x^\lambda k^\mu - x^\mu k^\lambda\big) + M_{\mathrm{s}}^{\lambda\mu}(R'). \tag{28.29}$$

Für Punktladungen erhält man

For point-charges one obtains

$$\frac{1}{\mathrm{c}}\int_\Omega d^4x\big(x^\lambda k^\mu - x^\mu k^\lambda\big) = \sum_i \int dt\big(x_i^\lambda K_i^\mu - x_i^\mu K_i^\lambda\big) = \sum_i \int dt \frac{d}{dt}\big(x_i^\lambda G_i^\mu - x_i^\mu G_i^\lambda\big), \tag{28.30}$$

da $\dot{x}^\lambda G^\mu = \dot{x}^\mu G^\lambda$. Daher ist

since $\dot{x}^\lambda G^\mu = \dot{x}^\mu G^\lambda$. Therefore

$$M^{\lambda\mu}(R) = M_{\mathrm{s}}^{\lambda\mu}(R) + M_{\mathrm{m}}^{\lambda\mu}(R) \tag{28.31}$$

mit dem mechanischen Anteil

including the mechanical contribution

$$M_{\mathrm{m}}^{\lambda\mu}(R) = \sum_i \big(x_i^\lambda G_i^\mu - x_i^\mu G_i^\lambda\big)\big|_R \tag{28.32}$$

eine Erhaltungsgröße, das heißt $M^{\lambda\mu}(R)$ ist unabhängig von der Wahl von $R$. Zugleich ist $(M^{\lambda\mu})$ ein Vierertensor.

is a conserved quantity, that is $M^{\lambda\mu}(R)$ is independent of the choice of $R$. Simultaneously $(M^{\lambda\mu})$ is a four-tensor.

Es bleibt noch die Bedeutung von $M$ zu bestimmen. Hierzu betrachten wir $M$ in dem dreidimensionalen Raum $R$, der durch die konstante Zeit $t$ im Inertialsystem $S$ gegeben ist. Wir haben dann

Finally we have to determine the meaning of $M$. For this purpose we consider $M$ in the three-dimensional space $R$ given by constant time $t$ for a system of inertia $S$. Then we have

$$M^{\lambda\mu} = -\frac{1}{\mathrm{c}}\int d^3x\big(x^\lambda T^{\mu 0} - x^\mu T^{\lambda 0}\big) + \sum_i \big(x_i^\lambda G_i^\mu - x_i^\mu G_i^\lambda\big) \tag{28.33}$$

Wir betrachten zunächst die raumartigen Komponenten

First we consider the space-like components

$$M^{\alpha\beta} = \int d^3x\big(x^\alpha g_{\mathrm{s}}^\beta - x^\beta g_{\mathrm{s}}^\alpha\big) + \sum_i \big(x_i^\alpha G_i^\beta - x_i^\beta G_i^\alpha\big). \tag{28.34}$$

Dies ist für $\alpha \neq \beta$ eine Komponente des Drehimpulses $\mathbf{L}$, nämlich $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}L_\gamma$. Wir haben damit die Erhaltung des Drehimpulses gefunden.

This is for $\alpha \neq \beta$ a component of the angular momentum $\mathbf{L}$, namely $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}L_\gamma$. Thus we have found the conservation of angular momentum.

Ist eine Komponente zeitartig, so erhält man

If one component is time-like then one finds

$$M^{0\alpha} = \mathrm{c}t\Big(\int d^3x g_s^\alpha + \sum_i G_i^\alpha\Big) - \frac{1}{\mathrm{c}}\Big(\int d^3x x^\alpha u + \sum_i x_i^\alpha E_i\Big). \tag{28.35}$$

Der erste Beitrag stellt $ct$ multipliziert mit dem Gesamtimpuls dar. Der zweite Beitrag ist die Summe aller Energien dividiert durch c multipliziert mit der Ortskoordinate $x^\alpha$. Man kann diesen zweiten Beitrag als den Energie-Schwerpunkt (tatsächlich die $\alpha$-Komponente davon) multipliziert mit der Gesamtenergie dividiert durch c auffassen. Da Gesamtimpuls und Energie konstant sind, heißt das, dass sich der Energie-Schwerpunkt mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathrm{c}^2 \frac{\text{Gesamtimpuls}}{\text{Gesamtenergie}}$ bewegt. Für nichtrelativistische Geschwindigkeiten reduziert sich der mechanische Anteil auf

The first contribution is $ct$ multiplied by the total momentum. The second contribution is the sum of all energies times their space-coordinates $x^\alpha$ divided by c. This second contribution can be considered as the center of energy (actually its $\alpha$-component) multiplied by the total energy divided by c. Since total momentum and total energy are constant, one concludes, that the center of energy moves with the constant velocity $\mathrm{c}^2 \frac{\text{total momentum}}{\text{total energy}}$. For non-relativistic velocities the mechanical part of the energy reduces to

$$M_{\mathrm{m}}^{0\alpha} = \mathrm{c} \left( t \sum_i G_i^\alpha - \sum_i m_i x_i^\alpha \right). \tag{28.36}$$

Die Erhaltung dieser Größe beinhaltet die gleichförmige Bewegung des Massenschwerpunkts mit der Geschwindigkeit Gesamtimpuls durch Gesamtmasse. Relativistisch geht das in die gleichförmige Bewegung des Energieschwerpunktes über. Die Lorentz-Invarianz verknüpft diese Erhaltung mit der Erhaltung des Drehimpulses zur Erhaltung des antisymmetrischen Tensors $M$.

Then the conservation of this quantity comprises the uniform movement of the center of mass with the velocity total momentum divided by total mass. In the theory of relativity this transforms into a uniform moving center of energy. Lorentz-invariance combines this conservation with the conservation of angular momentum to the antisymmetric tensor $M$.

# 29 Feld einer beliebig bewegten Punktladung

## 29.a Liénard-Wiechert-Potential

Wir bestimmen zunächst das Potential am Punkt $(x^\mu)$ einer Punktladung $q$, die sich auf einer Weltlinie $\mathbf{r}_\mathrm{q}(t)$ bewegt. Ihre Viererstromdichte ist

$$j^\mu(x') = qv^\mu\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{r}_\mathrm{q}(t)), \quad v^\mu = (\mathrm{c}, \dot{\mathbf{r}}_\mathrm{q}(t)). \tag{29.1}$$

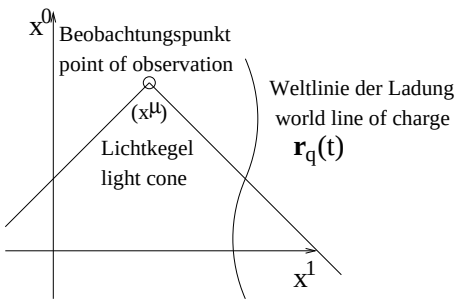
Das Viererpotential ergibt sich dann nach (24.29) zu

$$A^\mu(x) = \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^4x' j^\mu(x')\delta(\frac{1}{2}s^2)\theta(t-t') = q\int dt' v^\mu(t')\delta(\frac{1}{2}s^2)\theta(t-t') \tag{29.2}$$

mit

$$s^2 = a^\nu a_\nu, \quad a^\nu = x^\nu - x^\nu_\mathrm{q}(t'). \tag{29.3}$$

$(a^\nu)$ ist eine Funktion von $(x^\nu)$ und $t'$. Das Differential von $\frac{1}{2}s^2$ ergibt sich zu




$$d(\frac{1}{2}s^2) = a_\nu da^\nu = a_\nu dx^\nu - a_\nu v^\nu dt'. \tag{29.4}$$

Damit erhält man das retardierte Liénard-Wiechert-Potential

$$A^\mu(x) = qv^\mu(t')\frac{1}{|\frac{\partial\frac{1}{2}s^2}{\partial t'}|} = \left.\frac{qv^\mu}{a_\nu v^\nu}\right|_\mathrm{r} = \left.\frac{qu^\mu}{a_\nu u^\nu}\right|_\mathrm{r}. \tag{29.5}$$

Dabei sind die beiden Ausdrücke mit dem Index $_\mathrm{r}$ zu der Zeit $t'$ auszuwerten, zu der $s^2 = 0$ und $t > t'$.

Wir beachten, dass $a_\nu v^\nu = ac - \mathbf{a}\cdot\mathbf{v} > 0$, da $a = \mathrm{c}(t-t') = |\mathbf{a}|$. Im momentanen Ruhesystem der Ladung ist $a_\nu u^\nu/\mathrm{c}$ der Abstand zwischen Beobachtungspunkt und Ladung.

## 29.b Die Felder

Aus den Potentialen berechnen wir nun die Felder

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{29.6}$$

# 29 Field of an arbitrarily Moving Point-Charge

## 29.a Liénard-Wiechert Potential

First we determine the potential at a point $(x^\mu)$ of a point-charge $q$ which moves along a world-line $\mathbf{r}_\mathrm{q}(t)$. Its four-current density reads

$$j^\mu(x') = qv^\mu\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{r}_\mathrm{q}(t)), \quad v^\mu = (\mathrm{c}, \dot{\mathbf{r}}_\mathrm{q}(t)). \tag{29.1}$$

According to (24.29) the four-potential reads

$$A^\mu(x) = \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^4x' j^\mu(x')\delta(\frac{1}{2}s^2)\theta(t-t') = q\int dt' v^\mu(t')\delta(\frac{1}{2}s^2)\theta(t-t') \tag{29.2}$$

with

$$s^2 = a^\nu a_\nu, \quad a^\nu = x^\nu - x^\nu_\mathrm{q}(t'). \tag{29.3}$$

$(a^\nu)$ is a function of $(x^\nu)$ and $t'$. The differential of $\frac{1}{2}s^2$ is given by

$$d(\frac{1}{2}s^2) = a_\nu da^\nu = a_\nu dx^\nu - a_\nu v^\nu dt'. \tag{29.4}$$

Thus one obtains the Liénard-Wiechert potential

$$A^\mu(x) = qv^\mu(t')\frac{1}{|\frac{\partial\frac{1}{2}s^2}{\partial t'}|} = \left.\frac{qv^\mu}{a_\nu v^\nu}\right|_\mathrm{r} = \left.\frac{qu^\mu}{a_\nu u^\nu}\right|_\mathrm{r}. \tag{29.5}$$

Here the two expressions with the index $_\mathrm{r}$ are to be evaluated at the time $t'$ at which $s^2 = 0$ and $t > t'$.

We note, that $a_\nu v^\nu = ac - \mathbf{a}\cdot\mathbf{v} > 0$, since $a = \mathrm{c}(t-t') = |\mathbf{a}|$. $a_\nu u^\nu/\mathrm{c}$ is the distance between point of observation and charge in the momentary rest system of the charge.

## 29.b The Fields

Starting from the potentials we calculate the fields

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{29.6}$$

Hierzu müssen wir die Ableitungen von $v$, $a$ und $t'$ bilden

In order to do this we have to determine the derivatives of $v$, $a$ and $t'$

$$\partial^\mu v^\nu = \frac{\partial v^\nu}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x_\mu} \tag{29.7}$$

$$\partial^\mu a^\nu = \partial^\mu (x^\nu - x^\nu_{\rm q}(t')) = g^{\mu\nu} - v^\nu \frac{\partial t'}{\partial x_\mu} \tag{29.8}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial x_\mu} = \frac{a^\mu}{(a\cdot v)}, \tag{29.9}$$

wobei der letzte Ausdruck wegen $s^2 = 0$ aus (29.4) gewonnen wurde. Hier und im Folgenden verwenden wir

where the last expression has been obtained from $s^2 = 0$ by means of (29.4). Here and in the following we use

$$(a\cdot v) = a^\nu v_\nu = ac - \mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = {\rm c}(a - \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta}) \tag{29.10}$$

$$(v\cdot v) = v^\nu v_\nu = {\rm c}^2 - v^2 = {\rm c}^2(1-\beta^2) \tag{29.11}$$

$$(a\cdot \dot v) = a^\nu \dot v_\nu = -\mathbf{a}\cdot\dot{\mathbf{v}}. \tag{29.12}$$

Damit wertet man aus

One evaluates

$$\partial^\mu v^\nu = \frac{\dot v^\nu a^\mu}{(a\cdot v)} \tag{29.13}$$

$$\partial^\mu a^\nu = g^{\mu\nu} - \frac{v^\nu a^\mu}{(a\cdot v)} \tag{29.14}$$

$$\begin{aligned}\partial^\mu (a\cdot v) &= (\partial^\mu a^\kappa) v_\kappa + a_\kappa(\partial^\mu v^\kappa)\\ &= g^{\mu\kappa}v_\kappa - \frac{v^\kappa a^\mu}{(a\cdot v)}v_\kappa + a_\kappa\frac{\dot v^\kappa a^\mu}{(a\cdot v)}\\ &= v^\mu - a^\mu\frac{(v\cdot v)}{(a\cdot v)} + a^\mu\frac{(a\cdot\dot v)}{(a\cdot v)}.\end{aligned} \tag{29.15}$$

Es folgt dann

Then one obtains

$$\begin{aligned}\partial^\mu A^\nu &= \partial^\mu\left(q\frac{v^\nu}{(a\cdot v)}\right) = q\frac{\partial^\mu v^\nu}{(a\cdot v)} - q\frac{v^\nu\partial^\mu(a\cdot v)}{(a\cdot v)^2}\\ &= a^\mu b^\nu - q\frac{v^\mu v^\nu}{(a\cdot v)^2},\end{aligned} \tag{29.16}$$

$$b^\nu = q\frac{v^\nu(v\cdot v) - v^\nu(a\cdot\dot v) + \dot v^\nu(a\cdot v)}{(a\cdot v)^3}. \tag{29.17}$$

Damit ist

Therefore

$$(b^\nu) = \frac{q}{(a-\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta})^3}\left(1-\beta^2 + \frac{\mathbf{a}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}}{\rm c}, \boldsymbol{\beta}(1-\beta^2) + \frac{1}{\rm c}\boldsymbol{\beta}(\mathbf{a}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}) + \frac{1}{\rm c}(a-\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}}\right) \tag{29.18}$$

und die Felder stellen sich dar

and the fields read

$$F^{\mu\nu} = a^\mu b^\nu - a^\nu b^\mu \tag{29.19}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}b^0 - a\mathbf{b} = \frac{q(1-\beta^2)(\mathbf{a}-\boldsymbol{\beta}a)}{(a-\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} + \frac{q\mathbf{a}\times((\mathbf{a}-\boldsymbol{\beta}a)\times\dot{\boldsymbol{\beta}})}{{\rm c}(a-\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} \tag{29.20}$$

$$\mathbf{B} = -\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{E}}{a} \tag{29.21}$$

Der Beitrag proportional zur Beschleunigung $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ fällt ab wie $1/a$, für diesen Beitrag bilden $\mathbf{a}$, $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ ein Orthogonal-System. Der von $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ unabhängige Beitrag fällt wie $1/a^2$ ab.

The contribution proportional to the acceleration $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ decreases like $1/a$; $\mathbf{a}$, $\mathbf{E}$, and $\mathbf{B}$ constiute an orthogonal system for this contribution. The contribution independent of $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ falls off like $1/a^2$.

## 29.c Gleichförmige Bewegung

(vergleiche Abschnitt 25.d). Der Skalar $\gamma a^\lambda v_\lambda/\mathrm{c}$ ist gerade der Abstand zwischen Beobachtungspunkt und Ort der Ladung im Ruhesystem der Ladung. Daher gilt

## 29.c Uniform Motion

(compare section 25.d). The scalar $\gamma a^\lambda v_\lambda/\mathrm{c}$ is the distance between the point of observation and the point of the charge in the rest-system of the charge. Thus one has

$$a - \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\gamma}|\mathbf{r}'|, \quad (a - \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta})^3 = N/\gamma^3. \tag{29.22}$$

Berücksichtigt man $\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t'$, $a = c(t - t')$, so folgt

Considering that $\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t'$, $a = c(t - t')$, one obtains

$$\mathbf{a} - \boldsymbol{\beta}a = \mathbf{r} - \mathbf{v}t' - \mathbf{v}t + \mathbf{v}t' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t \tag{29.23}$$

und damit

and thus

$$\mathbf{E} = \frac{q\gamma(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)}{N}, \quad \mathbf{B} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{v}t')\times(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)q\gamma}{c(t - t')N} = \frac{q\gamma\mathbf{v}\times\mathbf{r}}{\mathrm{c}N} \tag{29.24}$$

in Übereinstimmung mit (25.30) und (25.31).

in accordance with (25.30) and (25.31).

## 29.d Beschleunigte Ladung momentan in Ruhe

Für $\beta = 0$ vereinfachen sich die Gleichungen (29.20) und (29.21) zu

## 29.d Accelerated Charge Momentarily at Rest

The equations (29.20) and (29.21) simplify for $\beta = 0$ to

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{a}}{a^3} + \frac{q}{ca^3}\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}) \tag{29.25}$$

$$\mathbf{B} = -\frac{q}{ca^2}(\mathbf{a}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}), \tag{29.26}$$

woraus mit der Energiestromdichte $\mathbf{S} = \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ die in den Raumwinkel $d\Omega$ abgestrahlte Leistung

from which the power radiated into the solid angle $d\Omega$ can be determined with the energy-current density $\mathbf{S} = \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$

$$\frac{d\dot{U}_\mathrm{s}}{d\Omega} = a^2\mathbf{S}\cdot\mathbf{n} = \frac{ca}{4\pi}[\mathbf{a},\mathbf{E},\mathbf{B}] = \frac{q^2}{4\pi ca^2}(\mathbf{a}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})^2 = \frac{q^2}{4\pi\mathrm{c}^3}(\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{v}})^2 \tag{29.27}$$

und die gesamte abgestrahlte Leistung

and the total radiated power

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{\mathrm{c}^3}\dot{\mathbf{v}}^2 \tag{29.28}$$

(Larmor-Formel) folgt.

(Larmor-formula) follows.

Für eine harmonische Bewegung $\mathbf{r}_\mathrm{q} = \mathbf{r}_{0\mathrm{q}}\cos(\omega t)$ und $\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{r}_{0\mathrm{q}}\omega^2\cos(\omega t)$ folgt

For a harmonic motion $\mathbf{r}_\mathrm{q} = \mathbf{r}_{0\mathrm{q}}\cos(\omega t)$ and $\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{r}_{0\mathrm{q}}\omega^2\cos(\omega t)$ one obtains

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{2}{3}\frac{q^2\mathbf{r}_{0\mathrm{q}}^2}{\mathrm{c}^3}\omega^4(\cos(\omega t))^2, \quad \overline{\dot{U}_\mathrm{s}} = \frac{1}{3}\frac{p_0^2}{\mathrm{c}^3}\omega^4 \tag{29.29}$$

in Übereinstimmung mit Abschnitt 22.b. Dies gilt für $\beta \ll 1$. Sonst hat man in 22.b auch Quadrupol- und höhere Multipolanteile zu berücksichtigen und hier, dass $\beta$ nicht mehr vernachlässigt werden kann, was auf zusätzliche Beiträge der Ordnung $\omega^6$ und höher führt.

in agreement with section 22.b. This applies for $\beta \ll 1$. Otherwise one has to take into account quadrupole and higher multipole contributions in 22.b, and here that $\beta$ cannot be neglected anymore, which yields additional contributions in order $\omega^6$ and higher orders.

## 29.e Abstrahlung, $\beta \neq 0$

Wir hatten gesehen, dass die Ladung im momentanen Ruhesystem die Leistung $\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{\mathrm{c}^3}\dot{\mathbf{v}}^2$ abstrahlt. Der abgestrahlte Impuls ist Null wegen der Symmetrie der Strahlung (ohne Berücksichtigung des statischen Anteils von $\mathbf{E}$, der aber so rasch abnimmt, dass er für hinreichend großes $a$ nichts mehr beiträgt)

## 29.e Emitted Radiation $\beta \neq 0$

We had seen, that in the system momentarily at rest the charge emits the power $\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{\mathrm{c}^3}\dot{\mathbf{v}}^2$. The emitted momentum vanishes because of the symmetry of the radiation (without consideration of the static contribution of $\mathbf{E}$, which, however, decays that fast that it does not contribute for sufficiently large $a$)

$$\mathbf{E}(-\mathbf{a}) = \mathbf{E}(\mathbf{a}), \quad \mathbf{B}(-\mathbf{a}) = -\mathbf{B}(\mathbf{a}), \quad T_{\alpha\beta}(-\mathbf{a}) = T_{\alpha\beta}(\mathbf{a}). \tag{29.30}$$

Wir können daher den pro Eigenzeit abgestrahlten Impuls-Energie-Vektor schreiben als

Thus we may write the energy-momentum-vector emitted per proper time

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\mathrm{c}}U_\mathrm{s}, \mathbf{G}_\mathrm{s}\right) = \frac{u^\mu}{\mathrm{c}}\frac{2q^2}{3\mathrm{c}^3}\left(-\frac{du^\lambda}{d\tau}\frac{du_\lambda}{d\tau}\right), \tag{29.31}$$

da $\dot{u}^0 = \mathrm{c}\dot{\gamma} \propto \mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} = 0$. Da die Formel lorentzinvariant geschrieben ist, gilt sie in jedem Inertialsystem, das heißt

since $\dot{u}^0 = \mathrm{c}\dot{\gamma} \propto \mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} = 0$. Since the formula is written in a lorentz-invariant way, it holds in each inertial frame, that is

$$\begin{aligned}
\frac{dU_\mathrm{s}}{dt} &= \frac{d\tau}{dt}\frac{u^0}{\mathrm{c}}\frac{2q^2}{3\mathrm{c}^3}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\left(-\frac{d(\gamma v^\lambda)}{dt}\frac{d(\gamma v_\lambda)}{dt}\right) \\
&= \frac{2q^2}{3\mathrm{c}^3}\gamma^2\left((\gamma\mathbf{v})^{\cdot}(\gamma\mathbf{v})^{\cdot} - \mathrm{c}^2\dot{\gamma}^2\right) \\
&= \frac{2q^2}{3\mathrm{c}^3}\gamma^2\left(\gamma^2\dot{\mathbf{v}}^2 + 2\gamma\dot{\gamma}(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}) + \dot{\gamma}^2(\mathbf{v}^2 - \mathrm{c}^2)\right).
\end{aligned} \tag{29.32}$$

Mit $d\tau/dt \cdot u^0/\mathrm{c} = 1$ und

With $d\tau/dt \cdot u^0/\mathrm{c} = 1$ and

$$\dot{\gamma} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{\mathrm{c}^2}}}\right) = \gamma^3\frac{\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}}{\mathrm{c}^2} \tag{29.33}$$

folgt schließlich

one obtains finally

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{\mathrm{c}^3}\left(\gamma^4\dot{\mathbf{v}}^2 + \gamma^6\frac{(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}})^2}{\mathrm{c}^2}\right). \tag{29.34}$$

Beim Umlaufen in einem Synchrotron vom Radius $r$ ist die Beschleunigung $\dot{v} = v^2/r$ senkrecht zur Bewegungsrichtung. Daraus folgt

Orbiting in a synchrotron of radius $r$ a charge undergoes the acceleration $\dot{v} = v^2/r$ perpendicular to its velocity. Thus one has

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{2}{3}q^2\mathrm{c}\beta^4\gamma^4/r^2 = \frac{2}{3}q^2\mathrm{c}(\gamma^2-1)^2/r^2. \tag{29.35}$$

Pro Umlauf ist die abgestrahlte Energie

The radiated energy per circulation is

$$\Delta U_\mathrm{s} = \frac{2\pi r}{v}\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{4\pi}{3}q^2\beta^3\gamma^4/r. \tag{29.36}$$

Bei Desy ergibt sich für ein umlaufendes Elektron der Energie $E$ =7.5 GeV und $m_e c^2$ =0.5 MeV ein Wert $\gamma = E/(m_e c^2) = 15000$. Für $r = 32$ m folgt dann $\Delta U = 9.5$ MeV. Bei Petra hat man mit $E = 19$GeV ein $\gamma = 38000$ und mit $r = 367$m eine Energieabstrahlung von $\Delta U = 34$MeV pro Umlauf.

**Aufgabe** Hera bei Desy hat $r = 1008$m und arbeitet mit Elektronen von $E_e = 30$GeV und Protonen von $Ep = 820$GeV. Man berechne deren Energieabstrahlung pro Umlauf.

At Desy one obtains for an orbiting electron of energy $E$ =7.5 GeV and mass $m_e c^2$ =0.5 MeV a value $\gamma = E/(m_e c^2) = 15000$. For $r = 32$m one obtains $\Delta U = 9.5$MeV. Petra yields with $E = 19$GeV a $\gamma = 38000$ and with $r = 367$m a radiation $\Delta U = 34$MeV per circulation.

**Exercise** Hera at Desy has $r = 1008$m and uses electrons of $E_e = 30$GeV and protons of $Ep = 820$GeV. Calculate the energy radiated per circulation.

# Anhänge

# Appendices

©2000/01 Franz Wegner Universität Heidelberg

## A Umrechnung zwischen Maßsystemen der Elektrodynamik

Neben dem Gaußschen Maßsystem werden noch eine Reihe weiterer cgs-Systeme sowie das SI-System (internationales Maßsystem, Giorgi-System) verwendet.

Während das Gaußsche Maßsystem alle elektromagnetischen Größen in cm, g und s ausdrückt, verwendet das Giorgi-System neben den mechanischen Einheiten m, kg und s noch zwei weitere Einheiten A (Ampere) und V (Volt), allerdings nicht unabhängig voneinander, vielmehr gilt für die Einheit der Energie

$$1\ \mathrm{kg\ m^2\ s^{-2}} = 1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{W\ s} = 1\ \mathrm{A\ V\ s}. \tag{A.1}$$

Die Umrechnung einiger gebräuchlicher Maßsysteme ineinander kann durch drei Umrechnungsfaktoren $\epsilon_0$, $\mu_0$ und $\psi$ beschrieben werden. Dabei können $\epsilon_0$ und $\mu_0$ (im SI-System als Dielektrizitätskonstante und Permeabilitätskonstante des Vakuums bekannt) und die Verkettungskonstante

$$\gamma = \mathrm{c}\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \tag{A.2}$$

dimensionsbehaftet sein, während $\psi$ ein dimensionsloser Zahlenfaktor ist. Man unterscheidet zwischen rationalen Maßsystemen ($\psi = 4\pi$) und nicht rationalen Maßsystemen ($\psi = 1$). Die Umrechnungsfaktoren einiger gebräuchlicher Maßsysteme sind

## A Connection between different Systems of Units

Besides the Gaussian system of units a number of other cgs-systems is used as well as the SI-system (international system of units, Giorgi-system).

Whereas all electromagnetic quantities in the Gaussian system are expressed in cm, g und s, the Giorgi-system uses besides the mechanical units m, kg und s two other units, A (ampere) und V (volt). They are not independent, but related by the unit of energy

The conversion of some conventional systems of units can be described by three conversion factors $\epsilon_0$, $\mu_0$ and $\psi$. The factors $\epsilon_0$ and $\mu_0$ (known as the dielectric constant and permeability constant of the vacuum in the SI-system) and the interlinking factor

can carry dimensions whereas $\psi$ is a dimensionless number. One distinguishes between rational systems $\psi = 4\pi$) and non-rational systems ($\psi = 1$). The conversion factors of some convensional systems of units are

| Maßsystem / System of Units | $\epsilon_0$ | $\mu_0$ | $\gamma$ | $\psi$ |
|---|---|---|---|---|
| Gauß / Gaussian | 1 | 1 | c | 1 |
| Elektrostatisch / Electrostatic (esu) | 1 | $\mathrm{c}^{-2}$ | 1 | 1 |
| Elektromagnetisch / Electromagnetic (emu) | $\mathrm{c}^{-2}$ | 1 | 1 | 1 |
| Heaviside-Lorentz | 1 | 1 | c | $4\pi$ |
| Giorgi (SI) | $(\mathrm{c}^2\mu_0)^{-1}$ | $\frac{4\pi}{10^7}\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$ | 1 | $4\pi$ |

Die Feldstärken im Gaußschen Maßsystem drücken sich durch die Größen der anderen Maßsysteme (mit einem Stern versehen) folgendermaßen aus

The field intensities are expressed in Gaussian units by those of other systems (indicated by an asterisk) in the following way

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \sqrt{\psi\epsilon_0}\mathbf{E}^* && \text{analog elektrisches Potential / analogously electric potential}\\
\mathbf{D} &= \sqrt{\psi/\epsilon_0}\mathbf{D}^* &&\\
\mathbf{P} &= 1/\sqrt{\psi\epsilon_0}\mathbf{P}^* && \text{analog Ladung, Strom und deren Dichten,}\\
& && \text{analogously charge, current and their densities,}\\
& && \text{elektrische Momente / electric moments}\\
\mathbf{B} &= \sqrt{\psi/\mu_0}\mathbf{B}^* && \text{analog Vektorpotential, magnetischer Fluss}\\
& && \text{analogously vector potential, magnetic flux}\\
\mathbf{H} &= \sqrt{\psi\mu_0}\mathbf{H}^* &&\\
\mathbf{M} &= \sqrt{\mu_0/\psi}\mathbf{M}^* && \text{analog magnetische Momente / analogously magnetic moments}
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

Für die mit Leitfähigkeit und Widerstand verknüpften Größen gilt

One has for the quantities connected with conductivity and resistance

$$
\begin{aligned}
\sigma &= 1/(\psi\epsilon_0)\sigma^* && \text{analog Kapazität / analogously capacity}\\
R &= \psi\epsilon_0 R^* && \text{analog Induktivität / analogously inductance}
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

Für die elektrische und magnetische Suszeptibilität gilt

For the electric and magnetic susceptibilities one obtains

$$\chi = \chi^*/\psi. \tag{A.5}$$

Wir erhalten damit die folgenden Gleichungen für beliebige Maßsysteme (d.h. der * ist jetzt weggelassen): Die Maxwell-Gleichungen in Materie lauten dann

We obtain the following equations for arbitrary systems of units (the * has now been removed): Maxwell's equations in matter read now

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{\gamma}(\dot{\mathbf{D}} + \frac{4\pi}{\psi}\mathbf{j}_\mathrm{f}), \tag{A.6}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \frac{4\pi}{\psi}\rho_\mathrm{f}, \tag{A.7}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{\gamma}\dot{\mathbf{B}}, \tag{A.8}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \tag{A.9}$$

Für die Materialgleichungen folgt

The material equations read

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \frac{4\pi}{\psi}\mathbf{P}, \tag{A.10}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \frac{4\pi}{\psi}\mathbf{M}. \tag{A.11}$$

Für die Lorentz-Kraft folgt

For the Lorentz-force one obtains

$$\mathbf{K} = q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}{\gamma}) \tag{A.12}$$

Für die Energiedichte $u$ und den Poynting-Vektor $\mathbf{S}$ folgen

For the energy density $u$ and the Poynting vector $\mathbf{S}$ on obtains

$$u = \frac{\psi}{4\pi}\int(\mathbf{E}\cdot d\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}), \tag{A.13}$$

$$\mathbf{S} = \frac{\psi\gamma}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}. \tag{A.14}$$

Während im Gaußschen System alle Feldgrößen **E**, **D**, **P**, **B**, **H** und **M** in der Einheit

Whereas in Gaussian units all the fields **E**, **D**, **P**, **B**, **H** und **M** are measured in units

$$\sqrt{\mathrm{dyn}}/\mathrm{cm} = \sqrt{\mathrm{erg}/\mathrm{cm}^3} \tag{A.15}$$

gemessen werden, werden im Giorgi-System **E** in V/m, **D** und **P** in $\mathrm{As}/\mathrm{m}^2$, **B** in $\mathrm{Vs}/\mathrm{m}^2$, **H** und **M** in A/m gemessen.

the Giorgi-system measures **E** in V/m, **D** and **P** in $\mathrm{As}/\mathrm{m}^2$, **B** in $\mathrm{Vs}/\mathrm{m}^2$, **H** and **M** in A/m.

Je nach Feldgröße entspricht 1 $\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}$ im Gaußschen System den folgenden Werten im Giorgi-System (analog für die weiteren in (A.3) und (A.4) angegebenen Größen)

Depending on the quantity 1 $\mathrm{dyn}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{-1}$ in units of the Gaussian system corresponds to (analogously for the quantities listed in (A.3) and (A.4))

$$\mathbf{E} = 3 \cdot 10^4\ \mathrm{V/m} \tag{A.16}$$
$$\mathbf{D} = 10^{-5}/(12\pi)\ \mathrm{As/m^2} \tag{A.17}$$
$$\mathbf{P} = 10^{-5}/3\ \mathrm{As/m^2} \tag{A.18}$$
$$\mathbf{B} = 10^{-4}\ \mathrm{Vs/m^2} \tag{A.19}$$
$$\mathbf{H} = 10^3/(4\pi)\ \mathrm{A/m} \tag{A.20}$$
$$\mathbf{M} = 10^3\ \mathrm{A/m}. \tag{A.21}$$

Für Widerstände gilt $c^{-1} \hat{=} 30\Omega$. Für genaue Berechnungen sind die Faktoren 3 (auch die 3 in $12 = 4 \cdot 3$) durch den Faktor 2.99792458 zu ersetzen. Diese Zahl multipliziert mit $10^8$ m/s ist die Lichtgeschwindigkeit.

For resistors one has $c^{-1} \hat{=} 30\Omega$. For precise calculations the factors 3 (including the 3 in $12 = 4 \cdot 3$) are to be replaced by the factor 2.99792458. This number multiplied by $10^8$ m/s is the speed of light.

Für folgende vielgebrauchte Einheiten im Gaußschen und im elektromagnetischen System sind eigene Namen üblich:

There are special names for the following often used units in the Gaussian and electromagnetic System

| | |
|---|---|
| magnetische Induktion / magnetic induction | 1 $\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}$=1 G (Gauß) |
| magnetische Feldstärke / magnetic field intensity | 1 $\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}$=1 Oe (Oerstedt) |
| magnetischer Fluss / magnetic flux | 1 $\mathrm{dyn}^{1/2}$ cm =1 Mx (Maxwell) |

Im SI-System haben außer Ampere und Volt folgende Größen einen eigenen Namen:

The following quantities besides Ampere and Volt have their own names in the SI-system:

| | |
|---|---|
| Ladung / charge | 1 As =1 C (Coulomb) |
| Widerstand / resistance | 1 V/A =1 Ω (Ohm) |
| Leitwert / conductance | 1 A/V =1 S (Siemens) |
| Kapazität / capacitance | 1 As/V =1 F (Farad) |
| Induktivität / inductivity | 1 Vs/A =1 H (Henry) |
| magnetischer Fluss / magnetic flux | 1 Vs =1 Wb (Weber) |
| magnetische Induktion / magnetic induction | 1 $\mathrm{Vs/m^2}$=1 T (Tesla). |

# B Formeln zur Vektorrechnung

Der Leser möge die Aufgaben B.11, B.15, B.34-B.50 und die Aufgabe nach B.71 selbst lösen oder die Ergebnisse dem Skriptum an anderer Stelle entnehmen.

## B.a Vektoralgebra

### B.a.$\alpha$ Summationskonvention und orthonormale Basis

Wir verwenden die Summationskonvention, die besagt, daß über alle Indices, die zweimal in einem Produkt auftreten, summiert wird. Daher steht

$$\mathbf{a} = a_\alpha \mathbf{e}_\alpha \tag{B.1}$$

für

$$\mathbf{a} = \sum_{\alpha=1}^{3} a_\alpha \mathbf{e}_\alpha = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3.$$

Wir setzen im Folgenden voraus, daß die Vektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ in der Zerlegung (B.1) ein orthonormales und ortsunabhängiges Rechtssystem darstellen. Dann sind $a_1$, $a_2$, $a_3$ die Komponenten des Vektors $\mathbf{a}$ bezüglich der Basis $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

### B.a.$\beta$ Skalarprodukt

Für das Skalarprodukt gilt

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = a_\alpha b_\alpha, \tag{B.2}$$

insbesondere

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1 \text{ für/for } \alpha = \beta \\ 0 \text{ für/for } \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{B.3}$$

mit dem gegen Vertauschen der Indices symmetrischen Kronecker-Symbol $\delta_{\alpha,\beta}$, und

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\alpha = a_\alpha. \tag{B.4}$$

### B.a.$\gamma$ Vektorielles Produkt

Für das vektorielle Produkt gilt

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a} = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} a_\alpha b_\beta \mathbf{e}_\gamma = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3 \tag{B.5}$$

# B Formulae for Vector Calculus

The reader is asked to solve the exercises B.11, B.15, B.34-B.50 and the exercise after B.71 by her- or himself or to take the results from the script where they are used.

## B.a Vector Algebra

### B.a.$\alpha$ Summation Convention and Orthonormal Basis

We use the summation convention which says, that summation is performed over all indices, which appear twice in a product. Therefore

$$\mathbf{a} = a_\alpha \mathbf{e}_\alpha \tag{B.1}$$

stands for

$$\mathbf{a} = \sum_{\alpha=1}^{3} a_\alpha \mathbf{e}_\alpha = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3.$$

In the following we assume, that the vectors $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ in (B.1) represent an orthonormal and space independent right-handed basis. Then $a_1$, $a_2$, $a_3$ are the components of the vector $\mathbf{a}$ with respect to the basis $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

### B.a.$\beta$ Scalar Product

The scalar product is defined by

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = a_\alpha b_\alpha, \tag{B.2}$$

in particular we have

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1 \text{ für/for } \alpha = \beta \\ 0 \text{ für/for } \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{B.3}$$

with the Kronecker symbol $\delta_{\alpha,\beta}$ which is symmetric in its indices, and

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\alpha = a_\alpha. \tag{B.4}$$

### B.a.$\gamma$ Vector Product

The vector product is given by

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a} = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} a_\alpha b_\beta \mathbf{e}_\gamma = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3 \tag{B.5}$$

mit dem total antisymmetrischen Levi-Civita-Symbol

with the total antisymmetric Levi-Civita symbol

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} +1 & \text{für / for } (\alpha,\beta,\gamma) = (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2) \\ -1 & \text{für / for } (\alpha,\beta,\gamma) = (1,3,2),(2,1,3),(3,2,1) \\ 0 & \text{sonst / otherwise} \end{cases} \tag{B.6}$$

Mit Determinanten schreibt man

Using determinants it can be written

$$\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha,1} & \delta_{\beta,1} & \delta_{\gamma,1} \\ \delta_{\alpha,2} & \delta_{\beta,2} & \delta_{\gamma,2} \\ \delta_{\alpha,3} & \delta_{\beta,3} & \delta_{\gamma,3} \end{vmatrix}. \tag{B.7}$$

Durch Multiplikation mit $a_\alpha$, $b_\beta$ und $\mathbf{e}_\gamma$ und Ausführen der Summe erhält man aus (B.5)

From (B.5) one obtains by multiplication with $a_\alpha$, $b_\beta$ and $\mathbf{e}_\gamma$ and summation

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \mathbf{e}_1 \\ a_2 & b_2 & \mathbf{e}_2 \\ a_3 & b_3 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}. \tag{B.8}$$

Insbesondere gilt

In particular one obtains

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \tag{B.9}$$

und

and

$$\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}\mathbf{e}_\gamma. \tag{B.10}$$

Man drücke die Summe

Express the sum

$$\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}\epsilon_{\zeta,\eta,\gamma} = \tag{B.11}$$

mit Hilfe von Kronecker-Deltas aus.

by means of Kronecker-deltas.

### B.a.$\delta$ Mehrfachprodukte

### B.a.$\delta$ Multiple Products

Für das Spatprodukt gilt

For the scalar triple product one has

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}a_\alpha b_\beta c_\gamma = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{B.12}$$

Es ist

One has

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = [\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}] = [\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}] = -[\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b}] = -[\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}] = -[\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}]. \tag{B.13}$$

Für das Dreifach-Produkt folgt

For the vector triple product one has

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}. \tag{B.14}$$

Man drücke das Vierfach-Produkt

Express the quadruple product

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \tag{B.15}$$

mit Hilfe von (B.11) oder (B.14) durch Skalarprodukte aus.

by means of (B.11) or (B.14) in terms of scalar products.

## B.b Vektoranalysis

### B.b.$\alpha$ Räumliche Differentiation, Nabla-Operator

Die räumliche Differentiation wird mit dem Nabla-Operator $\nabla$ durchgeführt. Er ist ein Differential-Operator mit Vektoreigenschaften, in kartesischen Koordinaten

$$\nabla = \mathbf{e}_\alpha \partial_\alpha, \tag{B.16}$$

wobei $\partial_\alpha$ für $\partial/\partial x_\alpha$ steht. Man bezeichnet

$$\nabla\Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\alpha \partial_\alpha \Phi(\mathbf{r}) = \text{ grad}\,\Phi(\mathbf{r}) \tag{B.17}$$

als Gradient,

$$(\mathbf{b}(\mathbf{r})\nabla)\mathbf{a}(\mathbf{r}) = b_\alpha(\mathbf{r})\partial_\alpha \mathbf{a}(\mathbf{r}) = (\mathbf{b}(\mathbf{r})\,\text{grad}\,)\mathbf{a}(\mathbf{r}) \tag{B.18}$$

als Vektorgradient,

$$\nabla\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \partial_\alpha a_\alpha(\mathbf{r}) = \text{ div}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) \tag{B.19}$$

als Divergenz und

$$\nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) = (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta)\partial_\alpha a_\beta(\mathbf{r}) = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}\partial_\alpha a_\beta(\mathbf{r})\mathbf{e}_\gamma = \text{ rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) \tag{B.20}$$

als Rotation.

### B.b.$\beta$ Zweifache Ableitung, Laplace-Operator

Soweit die Differentiationen vertauschbar sind, gilt

$$\nabla \times \nabla = \mathbf{0}, \tag{B.21}$$

woraus

$$\begin{aligned} \text{rot grad}\,\Phi(\mathbf{r}) &= \mathbf{0}, & \text{(B.22)}\\ \text{div rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) &= 0 & \text{(B.23)} \end{aligned}$$

folgt. Das Skalarprodukt

$$\nabla \cdot \nabla = \partial_\alpha \partial_\alpha = \triangle \tag{B.24}$$

wird als Laplace-Operator bezeichnet. Daher ist

$$\text{div grad}\,\Phi(\mathbf{r}) = \triangle\Phi(\mathbf{r}). \tag{B.25}$$

Man findet

$$\triangle\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \text{ grad div}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) - \text{ rot rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}), \tag{B.26}$$

indem man in (B.14) **a** and **b** durch $\nabla$ ersetzt und den Vektor **c** stets auf die rechte Seite schafft.

## B.b Vector Analysis

### B.b.$\alpha$ Differentiation in Space, Del Operator

Differentiation in space is performed by means of the del-Operator $\nabla$. It is a differential operator with vector properties. In cartesian coordinates it is written

$$\nabla = \mathbf{e}_\alpha \partial_\alpha, \tag{B.16}$$

where $\partial_\alpha$ stands for $\partial/\partial x_\alpha$. One calls

$$\nabla\Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\alpha \partial_\alpha \Phi(\mathbf{r}) = \text{ grad}\,\Phi(\mathbf{r}) \tag{B.17}$$

the gradient,

$$(\mathbf{b}(\mathbf{r})\nabla)\mathbf{a}(\mathbf{r}) = b_\alpha(\mathbf{r})\partial_\alpha \mathbf{a}(\mathbf{r}) = (\mathbf{b}(\mathbf{r})\,\text{grad}\,)\mathbf{a}(\mathbf{r}) \tag{B.18}$$

the vector gradient

$$\nabla\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \partial_\alpha a_\alpha(\mathbf{r}) = \text{ div}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) \tag{B.19}$$

the divergence and

$$\nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) = (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta)\partial_\alpha a_\beta(\mathbf{r}) = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}\partial_\alpha a_\beta(\mathbf{r})\mathbf{e}_\gamma = \text{ rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) \tag{B.20}$$

the curl.

### B.b.$\beta$ Second Derivatives, Laplacian

As far as differentiations do commute one has

$$\nabla \times \nabla = \mathbf{0}, \tag{B.21}$$

from which

$$\begin{aligned} \text{rot grad}\,\Phi(\mathbf{r}) &= \mathbf{0}, & \text{(B.22)}\\ \text{div rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) &= 0 & \text{(B.23)} \end{aligned}$$

follows. The scalar product

$$\nabla \cdot \nabla = \partial_\alpha \partial_\alpha = \triangle \tag{B.24}$$

is called the Laplacian. Therefore one has

$$\text{div grad}\,\Phi(\mathbf{r}) = \triangle\Phi(\mathbf{r}). \tag{B.25}$$

One obtains

$$\triangle\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \text{ grad div}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) - \text{ rot rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}), \tag{B.26}$$

by replacing **a** and **b** by $\nabla$ in (B.14) and bringing the vector **c** always to the right.

### B.b.$\gamma$ Ableitung von Produkten

Bei Anwendung des Nabla-Operators auf Produkte von zwei Faktoren erhält man gemäß der Produkt-Regel zwei Summanden, indem man einmal den ersten Faktor differenziert und den zweiten konstant hält, und zum zweiten den zweiten Faktor differenziert und den ersten festhält. Dann formt man unter Berücksichtigung des Vektor-Charakters des Nabla-Operators die Ausdrücke so um, dass die konstant gehaltenen Faktoren links, die zu differenzierenden rechts vom Nabla-Operator stehen. Man findet

### B.b.$\gamma$ Derivatives of Products

Application of the del operator onto a product of two factors yields according to the product rule two contributions. In one contribution one differentiates the first factor and keeps the second one constant, in the other contribution one differentiates the second factor and keeps the first constant. Then the expressions have to be rearranged, so that the constant factors are to the left, those to be differentiated to the right of the del operator. In doing this one has to keep the vector character of the del in mind. Then one obtains

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(\Phi\Psi) &= \Phi \operatorname{grad}\Psi + \Psi \operatorname{grad}\Phi && \text{(B.27)}\\
\operatorname{div}(\Phi\mathbf{a}) &= \Phi \operatorname{div}\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot \operatorname{grad}\Phi && \text{(B.28)}\\
\operatorname{rot}(\Phi\mathbf{a}) &= \Phi \operatorname{rot}\mathbf{a} + (\operatorname{grad}\Phi)\times\mathbf{a} && \text{(B.29)}\\
\operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= \mathbf{b}\cdot \operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot \operatorname{rot}\mathbf{b} && \text{(B.30)}\\
\operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a} + (\mathbf{b}\operatorname{grad})\mathbf{a} - (\mathbf{a}\operatorname{grad})\mathbf{b} && \text{(B.31)}\\
\operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) &= \mathbf{a}\times \operatorname{rot}\mathbf{b} + \mathbf{b}\times \operatorname{rot}\mathbf{a} + (\mathbf{b}\operatorname{grad})\mathbf{a} + (\mathbf{a}\operatorname{grad})\mathbf{b} && \text{(B.32)}\\
\triangle(\Phi\Psi) &= \Phi\triangle\Psi + \Psi\triangle\Phi + 2(\operatorname{grad}\Phi)\cdot(\operatorname{grad}\Psi). && \text{(B.33)}
\end{aligned}$$

## B.c Spezielle Ausdrücke

Man bestimme für $r = |\mathbf{r}|$ und für konstanten Vektor $\mathbf{c}$

## B.c Special Expressions

Calculate for $r = |\mathbf{r}|$ and constant vector $\mathbf{c}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} r^2 &= && \text{(B.34)}\\
\operatorname{div}\mathbf{r} &= && \text{(B.35)}\\
\operatorname{rot}\mathbf{r} &= && \text{(B.36)}\\
\operatorname{grad}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}) &= && \text{(B.37)}\\
(\mathbf{c}\operatorname{grad})\mathbf{r} &= && \text{(B.38)}\\
\operatorname{grad} f(r) &= && \text{(B.39)}\\
\operatorname{div}(\mathbf{c}\times\mathbf{r}) &= && \text{(B.40)}\\
\operatorname{rot}(\mathbf{c}\times\mathbf{r}) &= && \text{(B.41)}\\
\operatorname{grad}\frac{1}{r} &= && \text{(B.42)}\\
\operatorname{div}\frac{\mathbf{c}}{r} &= && \text{(B.43)}\\
\operatorname{rot}\frac{\mathbf{c}}{r} &= && \text{(B.44)}\\
\operatorname{div}\frac{\mathbf{r}}{r^3} &= && \text{(B.45)}\\
\operatorname{rot}\frac{\mathbf{r}}{r^3} &= && \text{(B.46)}\\
\operatorname{grad}\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}}{r^3} &= && \text{(B.47)}\\
\operatorname{div}\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{r}}{r^3} &= && \text{(B.48)}
\end{aligned}$$

$$\operatorname{rot} \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{r}}{r^3} = \tag{B.49}$$

$$\operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{c}|} = , \tag{B.50}$$

wobei singuläre Punkte auszunehmen seien.

with the exception of singular points.

## B.d Integral-Sätze

## B.d Integral Theorems

### B.d.$\alpha$ Linien-Integrale

### B.d.$\alpha$ Line Integrals

Für ein skalares oder vektorielles Feld $A(\mathbf{r})$ gilt

For a scalar or a vector field $A(\mathbf{r})$ one has

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (d\mathbf{r}\nabla) A(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}_2) - A(\mathbf{r}_1), \tag{B.51}$$

das heißt

that is

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r} \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}_2) - \Phi(\mathbf{r}_1), \tag{B.52}$$

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (d\mathbf{r} \operatorname{grad}) \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(\mathbf{r}_2) - \mathbf{a}(\mathbf{r}_1). \tag{B.53}$$

### B.d.$\beta$ Flächen-Integrale

### B.d.$\beta$ Surface Integrals

Nach Stokes lässt sich ein Flächenintegral über die Fläche $F$ der Form

According to Stokes a surface integral over $F$ of the form

$$\int_F (d\mathbf{f} \times \nabla) A(\mathbf{r}) = \oint_{\partial F} d\mathbf{r} A(\mathbf{r}) \tag{B.54}$$

in ein Linienintegral über den Rand $\partial F$ umformen, wobei das Linienintegral im Rechtschraubensinn zur Richtung von $d\mathbf{f}$ zu führen ist (Korkenzieherregel). Insbesondere folgt

can be rewritten as a line integral over the curve $\partial F$ bounding the surface. The direction is given by the right-hand rule; that is, if the thumb of your right hand points in the direction of $d\mathbf{f}$, your fingers curve in the direction $d\mathbf{r}$ of the line integral,

$$\int_F d\mathbf{f} \times \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}) = \oint_{\partial F} d\mathbf{r} \Phi(\mathbf{r}), \tag{B.55}$$

$$\int_F d\mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \oint_{\partial F} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}). \tag{B.56}$$

### B.d.$\gamma$ Volumen-Integrale

### B.d.$\gamma$ Volume Integrals

Nach Gauß lässt sich ein Volumenintegral der Form

According to Gauss a volume integral of the form

$$\int_V d^3 r \nabla A(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f} A(\mathbf{r}) \tag{B.57}$$

in ein Integral über die Oberfläche $\partial V$ umformen. Dabei weist $d\mathbf{f}$ nach außen. Insbesondere folgt

can be converted into an integral over the surface $\partial V$ of the volume. The vector $d\mathbf{f}$ points out of the volume. In particular one has

$$\int_V d^3 r \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f} \Phi(\mathbf{r}), \tag{B.58}$$

$$\int_V d^3r \,\mathrm{div}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{r}), \tag{B.59}$$

$$\int_V d^3r \,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\times\mathbf{a}(\mathbf{r}). \tag{B.60}$$

### B.d.$\delta$ Volumen-Integrale über Produkte

Setzt man für $\Phi(\mathbf{r})$ oder $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in den Gleichungen (B.58-B.60) Produkte ein und verwendet die Gleichungen (B.27-B.30), so erhält man

### B.d.$\delta$ Volume Integrals of Products

If one substitutes products for $\Phi(\mathbf{r})$ or $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in equations (B.58-B.60) and applies equations (B.27-B.30), then one obtains

$$\int_V d^3r\Phi(\mathbf{r})\,\mathrm{grad}\,\Psi(\mathbf{r}) + \int_V d^3r\Psi(\mathbf{r})\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\Phi(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}), \tag{B.61}$$

$$\int_V d^3r\Phi(\mathbf{r})\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) + \int_V d^3r\mathbf{a}(\mathbf{r})\cdot\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}), \tag{B.62}$$

$$\int_V d^3r\Phi(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) + \int_V d^3r(\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}))\times\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\times\mathbf{a}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}), \tag{B.63}$$

$$\int_V d^3r\mathbf{b}(\mathbf{r})\cdot\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) - \int_V d^3r\mathbf{a}(\mathbf{r})\cdot\,\mathrm{rot}\,\mathbf{b}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot(\mathbf{a}(\mathbf{r})\times\mathbf{b}(\mathbf{r})). \tag{B.64}$$

Diese Gleichungen erlauben die Umformung eines Volumen-Integrals in ein anderes Volumen-Integral und ein Oberflächen-Integral. Dies ist die Übertragung der partiellen Integration von einer auf drei Dimensionen.
In vielen Fällen verschwindet das Oberflächenintegral im Limes eines unendlichen Volumens, so dass die Gleichungen (B.61-B.64) die Umformung eines Volumenintegrals in ein anderes erlauben.

These equations allow the transformation of a volume integral into another one and a surface integral. This is the generalization of integration by parts from one dimension to three.

In many cases the surface integral vanishes in the limit of infinite volume, so that the equations (B.61-B.64) allow the conversion from one volume integral into another one.

Ersetzt man $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in (B.62) durch $\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r})$ oder $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ in (B.64) durch $\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})$, so folgt wegen (B.22) und (B.23)

If one replaces $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in (B.62) by $\mathrm{curl}\,\mathbf{a}(\mathbf{r})$ or $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ in (B.64) by $\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})$, then one obtains with (B.22) and (B.23)

$$\int_V d^3r\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})\cdot\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot(\mathbf{a}(\mathbf{r})\times\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot(\Phi(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r})). \tag{B.65}$$

Ähnlich erhält man aus (B.63)

Similarly one obtains from (B.63)

$$\int_V d^3r\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})\times\,\mathrm{grad}\,\Psi(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\times(\,\mathrm{grad}\,\Psi(\mathbf{r}))\Phi(\mathbf{r}) = -\int_{\partial V} d\mathbf{f}\times(\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}))\Psi(\mathbf{r}). \tag{B.66}$$

Ersetzt man $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in (B.59) durch $\Phi\,\mathrm{grad}\,\Psi - \Psi\,\mathrm{grad}\,\Phi$, so folgt der Greensche Satz

If one replaces $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in (B.59) by $\Phi\,\mathrm{grad}\,\Psi - \Psi\,\mathrm{grad}\,\Phi$, then one obtains Green's theorem

$$\int_V d^3r(\Phi(\mathbf{r})\triangle\Psi(\mathbf{r}) - \Psi(\mathbf{r})\triangle\Phi(\mathbf{r})) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot(\Phi(\mathbf{r})\,\mathrm{grad}\,\Psi(\mathbf{r}) - \Psi(\mathbf{r})\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})). \tag{B.67}$$

## B.e Der Laplace-Operator von $1/r$ und Verwandtes

### B.e.$\alpha$ Der Laplace-Operator von $1/r$

Für $r \neq 0$ findet man $\triangle(1/r) = 0$. Wertet man das Integral über eine Kugel vom Radius $R$ unter Verwendung von (B.59) aus,

$$\int \triangle(\frac{1}{r}) d^3r = \int d\mathbf{f} \cdot \text{ grad } (\frac{1}{r}) = -\int \mathbf{r} r d\Omega \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -4\pi \tag{B.68}$$

mit dem Raumwinkelelement $d\Omega$, so erhält man $-4\pi$. Man schreibt daher

$$\triangle(\frac{1}{r}) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}), \tag{B.69}$$

wobei Diracs Delta-"Funktion" $\delta^3(\mathbf{r})$ (eigentlich eine Distribution) die Eigenschaft

$$\int_V d^3r f(\mathbf{r})\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \begin{cases} f(\mathbf{r}_0) & \text{falls / if } \mathbf{r}_0 \in V \\ 0 & \text{sonst / otherwise.} \end{cases} \tag{B.70}$$

hat. Aus

$$\triangle \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \mathbf{c}\triangle\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\mathbf{c}\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

folgt mit (B.26,B.43,B.44)

$$4\pi\mathbf{c}\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\text{ grad div}\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \text{ rot rot}\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \text{ grad}\frac{\mathbf{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \text{ rot}\frac{\mathbf{c}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{B.71}$$

Man bestimme die $\delta$-Funktions-Anteile in (B.45) bis (B.49). Welche Dimension hat $\delta^3(\mathbf{r})$?

### B.e.$\beta$ Darstellung eines Vektorfeldes als Summe eines rotationsfreien und eines divergenzfreien Feldes

Wir schreiben das Vektorfeld $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ als

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int d^3r' \mathbf{a}(\mathbf{r}')\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{B.72}$$

und erhalten aus (B.71), da $\mathbf{a}(\mathbf{r}')$ nicht von $\mathbf{r}$ abhängt,

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \text{ grad}\frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \text{ rot}\frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \tag{B.73}$$

was sich als

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = -\text{ grad }\Phi(\mathbf{r}) + \text{ rot }\mathbf{A}(\mathbf{r}) \tag{B.74}$$

mit

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3r' \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{B.75}$$

## B.e The Laplacian of $1/r$ and Related Expressions

### B.e.$\alpha$ The Laplacian of $1/r$

For $r \neq 0$ one finds $\triangle(1/r) = 0$. If one evaluates the integral over a sphere of radius $R$ by use of (B.59),

$$\int \triangle(\frac{1}{r}) d^3r = \int d\mathbf{f} \cdot \text{ grad } (\frac{1}{r}) = -\int \mathbf{r} r d\Omega \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -4\pi \tag{B.68}$$

with the solid-angle element $d\Omega$, then one obtains $-4\pi$. Therefore one writes

$$\triangle(\frac{1}{r}) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}), \tag{B.69}$$

where Dirac's delta "function" $\delta^3(\mathbf{r})$ (actually a distribution) has the property

$$\int_V d^3r f(\mathbf{r})\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \begin{cases} f(\mathbf{r}_0) & \text{falls / if } \mathbf{r}_0 \in V \\ 0 & \text{sonst / otherwise.} \end{cases} \tag{B.70}$$

From

$$\triangle \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \mathbf{c}\triangle\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\mathbf{c}\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

one obtains with (B.26,B.43,B.44)

$$4\pi\mathbf{c}\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\text{ grad div}\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \text{ rot rot}\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \text{ grad}\frac{\mathbf{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \text{ rot}\frac{\mathbf{c}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{B.71}$$

Determine the $\delta$-function contributions in (B.45) to (B.49). What is the dimension of $\delta^3(\mathbf{r})$?

### B.e.$\beta$ Representation of a Vector Field as a Sum of an Irrotational and a Divergence-free Field

We rewrite the vector field $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in the form

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int d^3r' \mathbf{a}(\mathbf{r}')\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{B.72}$$

and obtain from (B.71), since $\mathbf{a}(\mathbf{r}')$ does not depend on $\mathbf{r}$

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \text{ grad}\frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \text{ rot}\frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \tag{B.73}$$

which may be written as

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = -\text{ grad }\Phi(\mathbf{r}) + \text{ rot }\mathbf{A}(\mathbf{r}) \tag{B.74}$$

with

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3r' \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{B.75}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad = \quad \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \tag{B.76}$$

schreiben lässt. Falls die Integrale (B.75) und (B.76) existieren, erhält man auf diese Weise eine Darstellung von $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ als Summe des rotationsfreien Feld $-\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r})$ und des divergenzfreien Feldes $\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Mit (B.48) folgt

. If the integrals (B.75) and (B.76) exist, then one obtains in this way a representation of $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ as sum of the irrotational field $-\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r})$ and the divergence free field $\operatorname{curl}\mathbf{A}(\mathbf{r})$. With (B.48) one finds

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0. \tag{B.77}$$

# C Kugelflächenfunktionen

## C.a Eigenwert-Problem und Separation der Variablen

Gesucht sind die Eigenfunktionen $Y$

$$\Delta_\Omega Y(\theta,\phi) = \lambda Y(\theta,\phi) \tag{C.1}$$

mit

$$\Delta_\Omega = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, \tag{C.2}$$

wobei die Operatoren (Multiplikationen mit Funktionen und Differentiationen) von rechts nach links angewendet werden (vergleiche 5.16). Man führt dann den Separations-Ansatz ein

$$Y = g(\cos\theta)h(\phi). \tag{C.3}$$

Mit

$$\xi = \cos\theta, \quad \frac{dg}{d\theta} = -\sin\theta\frac{dg}{d\cos\theta} = -\sqrt{1-\xi^2}\frac{dg}{d\xi} \tag{C.4}$$

folgt durch Einsetzen in die Eigenwertgleichung und Division durch $h(\phi)$

$$\frac{d}{d\xi}((1-\xi^2)\frac{dg}{d\xi}) + \frac{g(\xi)}{1-\xi^2}(\frac{d^2h(\phi)}{d\phi^2}/h(\phi)) = \lambda g(\xi). \tag{C.5}$$

Die Gleichung lässt sich nur erfüllen, wenn $d^2h(\phi)/d\phi^2/h(\phi)$ konstant ist. Da außerdem $h(\phi+2\pi) = h(\phi)$ sein soll, folgt

$$h(\phi) = e^{im\phi} \text{ mit ganzem } m. \tag{C.6}$$

Damit reduziert sich die Differentialgleichung für $g$ auf

$$\frac{d}{d\xi}((1-\xi^2)\frac{dg}{d\xi}) - \frac{m^2 g(\xi)}{1-\xi^2} = \lambda g(\xi). \tag{C.7}$$

## C.b Zugeordnete Legendre-Funktionen

Beachtet man, dass (wenigstens für positives $m$) der Faktor $e^{im\phi}$ von der analytischen Funktion $(x+iy)^m = r^m(\sin\theta)^m e^{im\phi}$ herrührt, so liegt es nahe, einen Faktor $(sin\theta)^m$ aus $g$ herauszuziehen,

$$g(\xi) = (\sin\theta)^m G(\xi) = (1-\xi^2)^{m/2}G(\xi), \tag{C.8}$$

woraus dann für $G$ die Gleichung

$$-m(m+1)G(\xi) - 2(m+1)\xi G'(\xi) + (1-\xi^2)G'' = \lambda G(\xi) \tag{C.9}$$

# C Spherical Harmonics

## C.a Eigenvalue Problem and Separation of Variables

We are looking for the eigen functions $Y$ of

$$\Delta_\Omega Y(\theta,\phi) = \lambda Y(\theta,\phi) \tag{C.1}$$

with

$$\Delta_\Omega = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, \tag{C.2}$$

where the operators (multiplication by functions and differentiation) apply from right to left (compare 5.16). One introduces the ansatz

$$Y = g(\cos\theta)h(\phi). \tag{C.3}$$

With

$$\xi = \cos\theta, \quad \frac{dg}{d\theta} = -\sin\theta\frac{dg}{d\cos\theta} = -\sqrt{1-\xi^2}\frac{dg}{d\xi} \tag{C.4}$$

one obtains by insertion into the eigenvalue equation and division by $h(\phi)$

$$\frac{d}{d\xi}((1-\xi^2)\frac{dg}{d\xi}) + \frac{g(\xi)}{1-\xi^2}(\frac{d^2h(\phi)}{d\phi^2}/h(\phi)) = \lambda g(\xi). \tag{C.5}$$

This equation can only be fulfilled, if $d^2h(\phi)/d\phi^2/h(\phi)$ is constant. Since moreover one requires $h(\phi+2\pi) = h(\phi)$, it follows that

$$h(\phi) = e^{im\phi} \text{ with integer } m. \tag{C.6}$$

This reduces the differential equation for $g$ to

$$\frac{d}{d\xi}((1-\xi^2)\frac{dg}{d\xi}) - \frac{m^2 g(\xi)}{1-\xi^2} = \lambda g(\xi). \tag{C.7}$$

## C.b Associated Legendre Functions

Considering that (at least for positive $m$) the factor $e^{im\phi}$ comes from the analytic function $(x+iy)^m = r^m(\sin\theta)^m e^{im\phi}$, it seems appropriate to extract a factor $(\sin\theta)^m$ out of $g$

$$g(\xi) = (\sin\theta)^m G(\xi) = (1-\xi^2)^{m/2}G(\xi), \tag{C.8}$$

so that one obtains the equation

$$-m(m+1)G(\xi) - 2(m+1)\xi G'(\xi) + (1-\xi^2)G'' = \lambda G(\xi) \tag{C.9}$$

folgt.

Für die Funktion $G$ können wir eine Taylor-Entwicklung ansetzen

for $G$.

For $G$ we may assume a Taylor-expansion

$$G(\xi) = \sum_k a_k \xi^k, \quad G'(\xi) = \sum_k k a_k \xi^{k-1}, \quad G''(\xi) = \sum_k k(k-1) a_k \xi^{k-2} \tag{C.10}$$

und finden durch Koeffizienten-Vergleich

and find by comparison of the coefficients

$$[m(m+1) + 2(m+1)k + k(k-1) + \lambda] a_k = (k+2)(k+1) a_{k+2}. \tag{C.11}$$

Setzen wir

If we put

$$\lambda = -l(l+1), \tag{C.12}$$

so lautet die Rekursionsformel

then the recurrence formula reads

$$\frac{a_{k+2}}{a_k} = \frac{(m+k+l+1)(m+k-l)}{(k+1)(k+2)}. \tag{C.13}$$

Die Reihenentwicklung bricht bei einem endlichen $k$ ab, wenn der Zähler verschwindet, also insbesondere für ganzes nicht negatives $k = l - m$. Diesen Fall wollen wir weiter untersuchen. Ohne nähere Betrachtung sei erwähnt, dass in den anderen Fällen die Funktion $Y$ ein nichtanalytisches Verhalten für $\cos\theta = \pm 1$ entwickelt.

The series expansion comes to an end at finite $k$, if the numerator vanishes, in particular for integer not negative $k = l - m$. We continue to investigate this case. Without closer consideration we mention that in the other cases the function $Y$ develops a nonanalyticity at $\cos\theta = \pm 1$.

Der führende Term hat dann den Koeffizienten $a_{l-m}$. Durch Anwendung der Rekursionsformel findet man

The leading term has then the coefficient $a_{l-m}$. Application of the recurrence formula yields

$$\begin{aligned}
a_{l-m-2} &= -\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l-1)2} a_{l-m} \\
&= -\frac{(l-m)(l-m-1)l}{(2l-1)2l} a_{l-m}, && \text{(C.14)} \\
a_{l-m-4} &= \frac{(l-m)(l-m-1)(l-m-2)(l-m-3)}{(2l-1)(2l-3)2\cdot 4} a_{l-m} \\
&= \frac{(l-m)(l-m-1)(l-m-2)(l-m-3)l(l-1)}{(2l-1)(2l-3)2l(2l-2)2} a_{l-m}, && \text{(C.15)} \\
a_{l-m-2k} &= (-)^k \frac{(l-m)!l!(2l-2k)!}{(l-m-2k)!(l-k)!(2l)!k!} a_{l-m}. && \text{(C.16)}
\end{aligned}$$

Üblicherweise wählt man

Conventionally one chooses

$$a_{l-m} = \frac{(-)^m (2l)!}{(l-m)!2^l l!}. \tag{C.17}$$

Dann folgt

Then it follows that

$$\begin{aligned}
G(\xi) &= \frac{(-)^m}{2^l l!} \sum_k \frac{(2l-2k)!}{(l-m-2k)!} \frac{l!}{k!(l-k)!} (-)^k \xi^{l-m-2k} && \text{(C.18)} \\
&= \frac{(-)^m}{2^l l!} \sum_k \binom{l}{k} (-)^k \frac{d^{l+m} \xi^{2l-2k}}{d\xi^{l+m}} = \frac{(-)^m}{2^l l!} \frac{d^{l+m}(\xi^2-1)^l}{d\xi^{l+m}}. && \text{(C.19)}
\end{aligned}$$

Man bezeichnet dann die Lösungen $g(\xi)$ in der Form

The solutions $g(\xi)$ in the form

$$P_l^m(\xi) = (1-\xi^2)^{m/2}\frac{(-)^m}{2^l l!}\frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}}(\xi^2-1)^l \tag{C.20}$$

als zugeordnete Legendre-Funktionen. Bis auf Normierung ist $Y_{lm}(\theta,\phi)$ durch $P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$ gegeben.

are called associated Legendre-functions. $Y_{lm}(\theta,\phi)$ is given by $P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$ apart from the normalization.

Die Differentialgleichung für $g$ hängt nur von $m^2$ ab, aber nicht vom Vorzeichen von $m$. Wir vergleichen daher $P_l^m$ und $P_l^{-m}$. Es sei $m \geq 0$, dann folgt

The differential equation for $g$ depends only on $m^2$, but not on the sign of $m$. Therefore we compare $P_l^m$ and $P_l^{-m}$. Be $m \geq 0$, then it follows that

$$\begin{aligned}
\frac{d^{l-m}}{d\xi^{l-m}}(\xi^2-1)^l &= \sum_{k=0}^{l-m}\binom{l-m}{k}\frac{d^k(\xi-1)^l}{d\xi^k}\frac{d^{l-m-k}(\xi+1)^l}{d\xi^{l-m-k}} \\
&= \sum_{k=0}^{l-m}\frac{(l-m)!l!l!}{k!(l-m-k)!(l-k)!(m+k)!}(\xi-1)^{l-k}(\xi+1)^{m+k}, \qquad \text{(C.21)} \\
\frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}}(\xi^2-1)^l &= \sum_{k=0}^{l-m}\binom{l+m}{k+m}\frac{d^{m+k}(\xi-1)^l}{d\xi^{m+k}}\frac{d^{l-k}(\xi+1)^l}{d\xi^{l-k}} \\
&= \sum_{k=0}^{l-m}\frac{(l+m)!l!l!}{(m+k)!(l-k)!(l-m-k)!k!}(\xi-1)^{l-k-m}(\xi+1)^k. \qquad \text{(C.22)}
\end{aligned}$$

Der Vergleich zeigt

Comparison shows

$$P_l^{-m}(\xi) = \frac{(l-m)!}{(l+m)!}(-)^m P_l^m(\xi), \tag{C.23}$$

das heißt, bis auf die Normierung stimmen die beiden Lösungen überein.

that is, apart from the normalization both solutions agree.

## C.c Orthogonalität und Normierung

## C.c Orthogonality and Normalization

Wir betrachten das Normierungs-Integral

We consider the normalization integral

$$N_{lml'm'} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} d\cos\theta P_l^m(\cos\theta)e^{-im\phi}P_{l'}^{m'}(\cos\theta)e^{im'\phi}. \tag{C.24}$$

Die Integration über $\phi$ ergibt

The integration over $\phi$ yields

$$\begin{aligned}
N_{lml'm'} &= 2\pi\delta_{mm'}\int_{-1}^{+1} P_l^m(\xi)P_{l'}^m(\xi)d\xi \\
&= 2\pi\delta_{mm'}(-)^m\frac{(l'+m)!}{(l'-m)!}\int_{-1}^{+1} P_l^m(\xi)P_{l'}^{-m}(\xi)d\xi \\
&= \frac{2\pi(l'+m)!}{(l'-m)!}\frac{\delta_{mm'}}{2^{2l}l!^2}I_m^{ll'} \qquad \text{(C.25)}
\end{aligned}$$

mit

with

$$I_m^{ll'} = (-)^m\int_{-1}^{+1}\frac{d^{l+m}(\xi^2-1)^l}{d\xi^{l+m}}\frac{d^{l'-m}(\xi^2-1)^{l'}}{d\xi^{l'-m}}d\xi. \tag{C.26}$$

Durch partielle Integration findet man

Partial integration yields

$$I_m^{ll'} = (-)^m \left[ \frac{d^{l+m}(\xi^2-1)^l}{d\xi^{l+m}} \frac{d^{l'-m-1}(\xi^2-1)^{l'}}{d\xi^{l'-m-1}} \right]_{-1}^{+1} + I_{m+1}^{ll'}. \tag{C.27}$$

Der erste Faktor in eckigen Klammern enthält mindestens $-m$, der zweite $m+1$ Nullstellen bei $\xi = \pm 1$. Die eckige Klammer verschwindet demnach. Das heißt $I_m^{ll'}$ ist unabhängig von $m$ für $-l \leq m \leq l'$. Für $l' > l$ folgt $I_m^{ll'} = I_{l'}^{ll'} = 0$, da der erste Faktor des Integranden von $I_{l'}^{ll'}$ verschwindet. Für $l' < l$ folgt $I_m^{ll'} = I_{-l}^{ll'} = 0$, da der zweite Faktor des Integranden von $I_{-l}^{ll'}$ verschwindet. Für $l = l'$ werten wir aus

The first factor in square brackets contains at least $-m$, the second $m+1$ zeroes at $\xi = \pm 1$. The contents in square brackets vanishes therefore. Thus $I_m^{ll'}$ is independent of $m$ for $-l \leq m \leq l'$. For $l' > l$ it follows that $I_m^{ll'} = I_{l'}^{ll'} = 0$, since the first factor of the integrand of $I_{l'}^{ll'}$ vanishes. For $l' < l$ one obtains $I_m^{ll'} = I_{-l}^{ll'} = 0$, since the second factor of the integrand of $I_{-l}^{ll'}$ vanishes. For $l = l'$ we evaluate

$$I_m^{ll} = I_l^{ll} = (-)^l \int_{-1}^{+1} \frac{d^{2l}(\xi^2-1)^l}{d\xi^{2l}} (\xi^2-1)^l d\xi. \tag{C.28}$$

Der erste Faktor im Integranden ist die Konstante $(2l)!$

The first factor in the integrand is the constant $(2l)!$

$$I_m^{ll} = (2l)! \int_{-1}^{+1} (1-\xi^2)^l d\xi. \tag{C.29}$$

Das letztere Integral ergibt $2^{2l+1} l!^2/(2l+1)!$ (man findet das, in dem man den Integranden $(1+\xi)^l(1-\xi)^l$ schreibt und $l$ mal partiell integriert, in dem man jeweils die Potenz von $1-\xi$ differenziert und die von $1+\xi$ integriert. Das ergibt das Normierungsintegral

The last integral yields $2^{2l+1} l!^2/(2l+1)!$ (one obtains this by writing the integrand $(1+\xi)^l(1-\xi)^l$ and performing partial integration $l$ times, by always differentiating the power of $1-\xi$ and integrating that of $1+\xi$. This yields the norm

$$N_{lml'm'} = 2\pi \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \delta_{m,m'}. \tag{C.30}$$

Damit ergeben sich die orthonormierten Kugelflächenfunktionen

Thus the normalized spherical harmonics read

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}. \tag{C.31}$$

## C.d Bemerkung zur Vollständigkeit

## C.d Remark on Completeness

Entwickeln wir eine in den drei kartesischen Koordinaten $x, y, z$ in der Umgebung des Ursprungs analytische Funktion $f$ in eine Taylor-Reihe

If we expand a function $f$ which is analytic in the Cartesian coordinates $x, y, z$ in the vicinity of the origin in a Taylor-expansion

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{ijk} a_{ijk} x^i y^j z^k = \sum_n r^n f_n(\theta,\phi), \tag{C.32}$$

so sind die Beiträge proportional zu $r^n$ in denen mit $i+j+k = n$ enthalten. Dies sind insgesamt $(n+1)+n+(n-1)+... = (n+2)(n+1)/2$ Terme

then the contributions proportional to $r^n$ are contained in those with $i+j+k = n$. These are in total $(n+1)+n+(n-1)+... = (n+2)(n+1)/2$ terms

$$f_n(\theta,\phi) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} a_{n-j-k,j,k} \left(\frac{x}{r}\right)^{n-j-k} \left(\frac{y}{r}\right)^j \left(\frac{z}{r}\right)^k. \tag{C.33}$$

Andererseits können wir die Funktion $f_n$ auch durch die Funktionen $Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{\ldots}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi}$, darstellen, da sich diese als $(\sin\theta)^{|m|}e^{im\phi} = ((x \pm iy)/r)^{|m|}$ multipliziert mit einem Polynom in $\cos\theta$ der Ordnung $l-|m|$ schreiben lassen. Dabei können die auftretenden Potenzen $(\cos\theta)^{l-|m|-2k} = (z/r)^{l-|m|-2k}((x^2+y^2+z^2)/r^2)^k$ geschrieben werden. Zusätzlich führen wir noch einen Faktor $((x^2+y^2+z^2)/r^2)^{(n-l)/2}$ ein. Dann erhalten wir Beiträge für $l = n, n-2, n-4, \ldots$. Da $m$ jeweils von $-l$ bis $l$ läuft, ergibt das insgesamt $(2n+1)+(2n-3)+(2n-7)+\ldots = (n+2)(n+1)/2$ linear unabhängige (weil orthogonale) Beiträge. Der Raum dieser Funktionen hat daher die gleiche Dimension wie der der $f_n$. Wir können daher jede Funktion $f_n$ durch eine Linearkombination von Kugelflächenfunktionen ausdrücken.

On the other hand we may represent the function $f_n$ equally well by the functions $Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{\ldots}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi}$, since they can be written $(\sin\theta)^{|m|}e^{im\phi} = ((x \pm iy)/r)^{|m|}$ multiplied by a polynomial in $\cos\theta$ of order $l-|m|$. The appearing powers of the $\cos\theta$ can be written $(\cos\theta)^{l-|m|-2k} = (z/r)^{l-|m|-2k}((x^2+y^2+z^2)/r^2)^k$. In addition we introduce a factor $((x^2+y^2+z^2)/r^2)^{(n-l)/2}$. Then we obtain contributions for $l = n, n-2, n-4, \ldots$. Since $m$ runs from $-l$ to $l$, one obtains in total $(2n+1)+(2n-3)+(2n-7)+\ldots = (n+2)(n+1)/2$ linearly independent (since orthogonal) contributions. Therefore the space of these functions has the same dimension as that of the $f_n$'s. Thus we may express each $f_n$ as a linear combination of the spherical harmonics.

# Inhalt Elektrodynamik Contents Electrodynamics


**A Grundgleichungen Basic Equations 3**

**1 Grundgleichungen der Elektrodynamik Basic Equations of Electrodynamics 3**
1.a Ladungen und Ströme Charges and Currents . . . 3
1.a.$\alpha$ Ladungsdichte Charge Density . . . 3
1.a.$\beta$ Strom und Stromdichte Current and Current Density . . . 4
1.a.$\gamma$ Ladungserhaltung und Kontinuitätsgleichung Conservation of Charge and Equation of Continuity . . . 5
1.b Maxwell-Gleichungen Maxwell's Equations . . . 5
1.c Coulomb- und Lorentz-Kraft Coulomb and Lorentz Force . . . 6

**2 Dimensionen und Einheiten Dimensions and Units 7**
2.a Gaußsches Maßsystem Gaussian Units . . . 7
2.b Andere Einheitensysteme Other Systems of Units . . . 7
2.c Motivation für Gaußsche Einheiten Motivation for Gaussian Units . . . 9

**B Elektrostatik Electrostatics 10**

**3 Elektrisches Feld, Potential, Energie des Feldes Electric Field, Potential, Energy of the Field 10**
3.a Statik Statics . . . 10
3.b Elektrisches Feld und Potential Electric Field and Potential . . . 10
3.b.$\alpha$ Elektrisches Potential Electric Potential . . . 10
3.b.$\beta$ Elektrischer Fluss und Ladung Electric Flux and Charge . . . 11
3.b.$\gamma$ Potential einer Ladungsverteilung Potential of a Charge Distribution . . . 12
3.c Coulombkraft und Feldenergie Coulomb Force and Field Energy . . . 13

**4 Elektrischer Dipol und Quadrupol Electric Dipole and Quadrupole 15**
4.a Das Feld für $r > R$ The Field for $r > R$ . . . 15
4.b Transformationseigenschaften Transformation Properties . . . 16
4.c Dipol Dipole . . . 17
4.d Quadrupol Quadrupole . . . 17
4.d.$\alpha$ Symmetrien Symmetries . . . 17
4.d.$\beta$ Symmetrischer Quadrupol Symmetric Quadrupole . . . 18
4.e Energie, Kraft und Drehmoment auf einen Multipol im äußeren Feld Energy, Force and Torque on a Multipole in an external Field . . . 18

**5 Multipol-Entwicklung in Kugelkoordinaten Multipole Expansion in Spherical Coordinates 20**
5.a Poisson-Gleichung in Kugelkoordinaten Poisson-Equation in Spherical Coordinates . . . 20
5.a.$\alpha$ Der Gradient The Gradient . . . 20
5.a.$\beta$ Die Divergenz The Divergence . . . 21
5.a.$\gamma$ Der Laplace-Operator The Laplacian . . . 21
5.b Kugelflächenfunktionen Spherical Harmonics . . . 22
5.c Radialgleichung und Multipol-Momente Radial Equation and Multipole Moments . . . 23
5.d Punktladung am Ort $\mathbf{r}'$, zylindersymmetrische Ladungsverteilung Point Charge at $\mathbf{r}'$, Cylindric Charge Distribution . . . 25

**6 Elektrisches Feld in Materie Electric Field in Matter** **27**
6.a Polarisation und dielektrische Verschiebung Polarization and Dielectric Displacement 27
6.b Grenzflächen zwischen Dielektrika Boundaries between Dielectric Media . . . . . 29
6.c Dielektrische Kugel im homogenen elektrischen Feld Dielectric Sphere in a Homogeneous Electric Field . . . . . 30
6.d Dielektrizitätskonstante nach Clausius und Mosotti Dielectric Constant according to Clausius and Mosotti . . . . . 31

**7 Elektrizität auf Leitern Electricity on Conductors** **33**
7.a Elektrische Leiter Electric Conductors . . . . . 33
7.a.$\alpha$ Randbedingungen an der Leiteroberfläche Boundary Conditions at the Surface of the Conductor . . . . . 33
7.a.$\beta$ Kraft auf Leiter (im Vakuum) Force acting on the Conductor (in Vacuo) . . . 34
7.b Kapazitäten Capacities . . . . . 34
7.c Influenzladungen Influence Charges . . . . . 36
7.c.$\alpha$ Leiterfreier Raum Space free of Conductors . . . . . 37
7.c.$\beta$ Leitende Ebene Conducting Plane . . . . . 37
7.c.$\gamma$ Leitende Kugel Conducting Sphere . . . . . 38

**8 Energie, Kräfte und Spannungen im Dielektrikum Energy, Forces and Stress in Dielectric Media** **40**
8.a Elektrostatische Energie Electrostatic Energy . . . . . 40
8.b Kraftdichte im isotropen Dielektrikum Force Density in Isotropic Dielectric Matter . . 41
8.c Maxwellscher Spannungstensor Maxwell's Stress Tensor . . . . . 44

**C Magnetostatik Magnetostatics** **46**

**9 Magnetische Induktion und Vektorpotential Magnetic Induction and Vector Potential** **46**
9.a Amperegesetz Ampere's Law . . . . . 46
9.b Magnetischer Fluss Magnetic Flux . . . . . 46
9.c Feld einer Stromverteilung Field of a Current Distribution . . . . . 47
9.d Vektorpotential Vector Potential . . . . . 48
9.e Kraft zwischen zwei Stromkreisen Force Between Two Circuits . . . . . 49

**10 Ringströme als magnetische Dipole Loops of Current as Magnetic Dipoles** **50**
10.a Lokalisierte Stromverteilung und magnetischer Dipol Localized Current Distribution and Magnetic Dipole . . . . . 50
10.b Magnetisches Dipolmoment eines Ringstroms Magnetic Dipolar Moment of a Current Loop . . . . . 51
10.c Kraft und Drehmoment auf einen Dipol im äußeren magnetischen Feld Force and Torque on a Dipole in an External Magnetic Field . . . . . 52
10.c.$\alpha$ Kraft Force . . . . . 52
10.c.$\beta$ Drehmoment Torque . . . . . 52

**11 Magnetismus in Materie Magnetism in Matter** **54**

**D Induktionsgesetz Law of Induction** **56**

**12 Faradaysches Induktionsgesetz Faraday's Law of Induction** **56**

**13 Induktivitäten und Stromkreise Inductances and Electric Circuits** **58**
13.a Induktivitäten Inductances . . . . . 58
13.b Stromkreis-Elemente Elements of Circuits . . . . . 59
13.c Kirchhoffsche Regeln Kirchhoff's Rules . . . . . 60
13.d Energie von Induktivitäten Energy of Inductances . . . . . 60

13.d.$\alpha$ Konstante Induktivitäten Constant Inductances . . . . . 61
13.d.$\beta$ Gegeneinander bewegte Stromkreise Moving Loops of Currents . . . . . 61
13.d.$\gamma$ Konstante magnetische Flüsse Constant Magnetic Fluxes . . . . . 61
13.d.$\delta$ Kraft zwischen zwei Stromkreisen Force between two Electric Circuits . . . . . 62
13.d.$\epsilon$ Energie eines magnetischen Dipols im äußeren Magnetfeld Energy of a Magnetic Dipole in an External Magnetic Induction . . . . . 62
13.d.$\zeta$ Permanente magnetische Momente Permanent Magnetic Moments . . . . . 63

**E Maxwell-Gleichungen Maxwell's Equations 64**

**14 Vollständige Maxwell-Gleichungen Complete Set of Maxwell's Equations 64**
14.a Widerspruchsfreiheit der Maxwell-Gleichungen Consistency of Maxwell's Equations . 64
14.b Maxwell-Gleichungen für freibewegliche Ladungen und Ströme Maxwell's Equations for Freely Moving Charges and Currents . . . . . 65

**15 Energie- und Impuls-Bilanz Energy and Momentum Balance 67**
15.a Energie Energy . . . . . 67
15.b Impuls-Bilanz Momentum Balance . . . . . 69

**F Elektromagnetische Wellen Electromagnetic Waves 73**

**16 Elektromagnetische Wellen im Vakuum und in homogenen isotropen Isolatoren Electromagnetic Waves in Vacuum and in Homogeneous Isotropic Insulators 73**
16.a Wellengleichung Wave Equation . . . . . 73
16.b Ebene Wellen Plane Waves . . . . . 74
16.c Überlagerung ebener periodischer Wellen Superposition of Plane Periodic Waves . . . 75
16.c.$\alpha$ Einschub über Fourier-Reihen und Integrale Insertion on Fourier Series and Integrals . . . . . 75
16.c.$\beta$ Zurück zu den Maxwell-Gleichungen Back to Maxwell's Equations . . . . . 76
16.c.$\gamma$ Zeitmittelwerte und Zeitintegrale Time averages and time integrals . . . . . 78

**17 Elektromagnetische Wellen in homogenen Leitern Electromagnetic Waves in Homogeneous Conductors 80**
17.a Transversal-Schwingungen bei niedrigen Frequenzen Transverse Oscillations at Low Frequencies . . . . . 80
17.b Transversal-Schwingungen bei hohen Frequenzen Transverse Oscillations at High Frequencies . . . . . 81
17.c Longitudinale = Plasma-Schwingungen Longitudinal = Plasma Oscilations . . . . . 82

**18 Reflexion und Brechung an einer ebenen Grenzfläche Reflection and Refraction at a Planar Surface 83**
18.a Problemstellung und Ausbreitungsrichtung Problem and Direction of Propagation . . 83
18.b Grenzbedingungen, Amplituden Boundary Conditions, Amplitudes . . . . . 84
18.c Diskussion für $\mu_1 = \mu_2$ Discussion for $\mu_1 = \mu_2$ . . . . . 85
18.c.$\alpha$ Isolator, $|\sin\alpha_2| < 1$: Brechung Insulator, $|sin\alpha_2| < 1$: Refraction . . . . . 85
18.c.$\beta$ Isolator, $|\sin\alpha_2| > 1$: Totalreflexion Insulator, $|sin\alpha_2| > 1$: Total Reflection . . 86
18.c.$\gamma$ Metallische Reflexion, $\alpha = 0$ Metallic Reflection, $\alpha = 0$ . . . . . 86
18.c.$\delta$ Oberflächenwellen am Leiter Surfave Waves along a Conductor . . . . . 86

**19 Hohlleiter Wave Guides 88**
19.a Hohlleiter Wave Guides . . . . . 88
19.b Lösung für rechteckigen Querschnitt Solution for a Rectangular Cross Section . . . . . 90
19.c Wellenpakete Wave Packets . . . . . 91

**G Elektrodynamische Potentiale Electrodynamic Potentials 93**

**20 Elektrodynamische Potentiale, Eichtransformationen Electrodynamic Potentials, Gauge Transformations 93**
20.a Potentiale Potentials . . . 93
20.b Eichtransformationen Gauge Transformations . . . 94

**21 Die elektromagnetischen Potentiale einer allgemeinen Ladungs- und Stromverteilung Electromagnetic Potentials of a general Charge and Current Distribution 96**
21.a Berechnung der Potentiale Calculation of the Potentials . . . 96
21.b Eichbedingung Gauge Condition . . . 98

**22 Ausstrahlung harmonischer Schwingungen Radiation from Harmonic Oscillations 99**
22.a Strahlungsfeld Radiation Field . . . 99
22.a.$\alpha$ Nahzone (Statische Zone) Near Zone (Static Zone) . . . 99
22.a.$\beta$ Fernzone (Strahlungszone) Far Zone (Radiation Zone) . . . 99
22.b Elektrische Dipolstrahlung (Hertzscher Dipol) Electric Dipole Radiation (Hertz Dipole) 100
22.c Magnetische Dipolstrahlung und elektrische Quadrupolstrahlung Magnetic Dipole radiation and Electric Quadrupole Radiation . . . 102
22.c.$\alpha$ Magnetische Dipolstrahlung Magnetic Dipole Radiation . . . 102
22.c.$\beta$ Elektrische Quadrupolstrahlung Electric Quadrupole Radiation . . . 103

**H Lorentz-Invarianz der Elektrodynamik Lorentz Invariance of Electrodynamics 104**

**23 Lorentz-Transformation Lorentz Transformation 104**
23.a Galilei- und Lorentz-Transformation Galilei and Lorentz Transformation . . . 104
23.b Lorentz-Transformation Lorentz Transformation . . . 107
23.b.$\alpha$ Zeitdilatation Time Dilatation . . . 110
23.b.$\beta$ Längenkontraktion Lorentz Contraction . . . 110

**24 Vierervektoren und Viererkovektoren Four-Vectors and Four-Covectors 111**
24.a Abstand und Eigenzeit als Vierervektoren Distance and Proper Time as Four-Vectors . 111
24.a.$\alpha$ Raumartiger Abstand $s^2 < 0$ Space-like distance $s^2 < 0$ . . . 111
24.a.$\beta$ Zeitartiger Abstand $s^2 > 0$ Time-like distance $s^2 > 0$ . . . 111
24.a.$\gamma$ Lichtartiger Abstand $s^2 = 0$ Light-like distance $s^2 = 0$ . . . 112
24.b Weltgeschwindigkeit als Vierervektor World Velocity as Four-Vector . . . 112
24.c Viererstromdichte Current Density Four-Vector . . . 113
24.d Vierervektorpotential Four-Vector Potential . . . 114

**25 Elektromagnetischer Feldtensor Electromagnetic Field Tensor 116**
25.a Feldtensor Field Tensor . . . 116
25.b Maxwell-Gleichungen Maxwell's Equations . . . 116
25.b.$\alpha$ Die inhomogenen Gleichungen The Inhomogeneous Equations . . . 116
25.b.$\beta$ Die homogenen Gleichungen The Homogeneous Equations . . . 117
25.c Transformation der elektrischen und magnetischen Felder Transformation of the Electric and Magnetic Fields . . . 117
25.d Felder einer gleichförmig bewegten Punktladung Fields of a Point Charge in Uniform Motion . . . 118
25.e Doppler-Effekt Doppler Effect . . . 119

**26 Relativistische Mechanik Relativistic Mechanics 120**
26.a Lorentz-Kraftdichte Lorentz Force Density . . . 120
26.b Lorentz-Kraft auf eine Punktladung Lorentz Force Acting on a Point Charge . . . 120
26.c Energie und Impuls eines Massenpunktes Energy and Momentum of a Mass Point . . 121
26.d Bewegungsgleichung Equation of Motion . . . 122

**27 Lagrange-Formulierung Lagrangian Formulation 124**
27.a Lagrange-Funktion einer massiven Ladung im elektromagnetischen Feld Lagrangian of a Massive Charge in the Electromagnetic Field . . . 124
27.b Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes Lagrangian Density of the Electromagnetic Field . . . 124

**28 Energie-Impuls-Tensor und Erhaltungsgrößen Energy Momentum Tensor and Conserved Quantities 127**
28.a Der Tensor The Tensor . . . 127
28.b Erhaltungssätze Conservation Laws . . . 128
28.b.$\alpha$ Ladung Charge . . . 129
28.b.$\beta$ Energie und Impuls Energy and Momentum . . . 130
28.b.$\gamma$ Drehimpuls und Schwerpunktsbewegung Angular Momentum and Center of Mass . . . 130

**29 Feld einer beliebig bewegten Punktladung Field of an arbitrarily Moving Point-Charge 133**
29.a Liénard-Wiechert-Potential Liénard-Wiechert Potential . . . 133
29.b Die Felder The Fields . . . 133
29.c Gleichförmige Bewegung Uniform Motion . . . 135
29.d Beschleunigte Ladung momentan in Ruhe Accelerated Charge Momentarily at Rest . 135
29.e Abstrahlung, $\beta \neq 0$ Emitted Radiation $\beta \neq 0$ . . . 136

**Anhänge Appendices i**

**A Umrechnung zwischen Maßsystemen der Elektrodynamik Connection between different Systems of Units i**

**B Formeln zur Vektorrechnung Formulae for Vector Calculus iv**
B.a Vektoralgebra Vector Algebra . . . iv
B.a.$\alpha$ Summationskonvention und orthonormale Basis Summation Convention and Orthonormal Basis . . . iv
B.a.$\beta$ Skalarprodukt Scalar Product . . . iv
B.a.$\gamma$ Vektorielles Produkt Vector Product . . . iv
B.a.$\delta$ Mehrfachprodukte Multiple Products . . . v
B.b Vektoranalysis Vector Analysis . . . vi
B.b.$\alpha$ Räumliche Differentiation, Nabla-Operator Differentiation in Space, Del Operator . . . vi
B.b.$\beta$ Zweifache Ableitung, Laplace-Operator Second Derivatives, Laplacian . . . vi
B.b.$\gamma$ Ableitung von Produkten Derivatives of Products . . . vii
B.c Spezielle Ausdrücke Special Expressions . . . vii
B.d Integral-Sätze Integral Theorems . . . viii
B.d.$\alpha$ Linien-Integrale Line Integrals . . . viii
B.d.$\beta$ Flächen-Integrale Surface Integrals . . . viii
B.d.$\gamma$ Volumen-Integrale Volume Integrals . . . viii
B.d.$\delta$ Volumen-Integrale über Produkte Volume Integrals of Products . . . ix
B.e Der Laplace-Operator von $1/r$ und Verwandtes The Laplacian of $1/r$ and Related Expressions . . . x
B.e.$\alpha$ Der Laplace-Operator von $1/r$ The Laplacian of $1/r$ . . . x
B.e.$\beta$ Darstellung eines Vektorfeldes als Summe eines rotationsfreien und eines divergenzfreien Feldes Representation of a Vector Field as a Sum of an Irrotational and a Divergence-free Field . . . x

**C Kugelflächenfunktionen Spherical Harmonics** **xii**
C.a Eigenwert-Problem und Separation der Variablen Eigenvalue Problem and Separation of Variables . . . . . xii
C.b Zugeordnete Legendre-Funktionen Associated Legendre Functions . . . . . xii
C.c Orthogonalität und Normierung Orthogonality and Normalization . . . . . xiv
C.d Bemerkung zur Vollständigkeit Remark on Completeness . . . . . xv

**Korrekturen seit Entfernung des Vermerks 'vorläufig'**

Vor Gl. (3.15) **E** statt $E$.

Zwischen Gleichung (7.43) und (7.44) $q'' = q'R/r'$

In Abschnitten 20, 21, 24 Lorenz-Eichung statt Lorentz-Eichung (siehe Hinweis in Abschnitt 20)

In (22.a.$\alpha$) $\Phi_0$ und $\mathbf{A}_0$ statt $\Phi$ und $\mathbf{A}$.

Nach Gleichung (C.33): 'Dabei können die auftretenden Potenzen $(\cos\theta)^{l-|m|-2k} = (z/r)^{l-|m|-2k}((x^2 + y^2 + z^2)/r^2)^k$ geschrieben werden.'

Korrekturen offensichtlicher Druckfehler wie in der Überschrift '27 Lagrangre-Formulierung' werden hier normalerweise nicht angegeben, aber im Skriptum ausgeführt.

**Corrigenda since the removal of the remark 'preliminary'**

Before eq. (3.15) **E** instead of $E$.

Between eqs. (7.43) and (7.44) $q'' = q'R/r'$

In sections 20, 21, and 24 Lorenz gauge instead of Lorentz gauge (see note in section 20)

In (22.a.$\alpha$) $\Phi_0$ and $\mathbf{A}_0$ instead of $\Phi$ and $\mathbf{A}$.

After eq. (C.33): 'The appearing powers of the $\cos\theta$ can be written $(\cos\theta)^{l-|m|-2k} = (z/r)^{l-|m|-2k}((x^2 + y^2 + z^2)/r^2)^k$.'

Corrigenda of obvious misprints as in the headline '27 Lagrangre-Formulierung' are normally not listed here, but performed in the script.