H

Lorentz-Invarianz der Elektrodynamik

Lorentz Invariance of Electrodynamics

23 Lorentz-Transformation

23.a Galilei- und Lorentz-Transformation

Die Gleichungen der Newtonschen Mechanik sind invariant gegen die Galilei-Transformation (Galilei-Invarianz)

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z - vt, \quad t' = t. \tag{23.1}$$

Wir werden im Folgenden sehen, dass die Maxwell-Gleichungen bei geeigneter Transformation von Feldern, Strömen und Ladungen invariant sind gegen lineare Transformationen der Koordinaten x, y, z und t, die die Lichtgeschwindigkeit invariant lassen (Lorentz-Invarianz). Eine derartige Transformation lautet

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{23.2}$$

Betrachten wir zwei Ladungen q und $-q$, die sich für $t \le 0$ am gleichen Ort befinden und auch für $t \ge \Delta t$ am gleichen Ort sind, sich aber im Intervall $0 < t < \Delta t$ gegeneinander bewegen, wobei sie sich zur Zeit 0 am Ort $\mathbf{r}_0$ trennen und zur Zeit Δt am Ort $\mathbf{r}_1$ wieder zusammen kommen. Diese erzeugen nach (21.14) und (21.15) ein Feld, das sich von diesen beiden Ladungen mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet und am Ort $\mathbf{r}$ nur für Zeiten t von Null verschieden ist, für die $t > |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c$ und $t < \Delta t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c$ gilt und zwar unabhängig vom Inertialsystem, in dem wir uns befinden. (Wir müssen dabei nur voraussetzen, dass sich die Ladungen nicht mit Überlicht-Geschwindigkeit bewegen.) Wählen wir insbesondere Δt infinitesimal, so kommt der Lichtblitz zur Zeit $t = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c$ an, bewegt sich also mit Lichtgeschwindigkeit.

23 Lorentz Transformation

23.a Galilei and Lorentz Transformation

The equations of Newton's mechanics are invariant under the Galilei transformation (Galilei invariance)

We will see in the following that Maxwell's equations are invariant under appropriate transformations of fields, currents and charges against linear transformations of the coordinates x, y, z, and t, which leave the velocity of light invariant (Lorentz invariance). Such a transformation reads

Consider two charges q und $-q$, which are for $t \le 0$ at the same point and which are also for $t \ge \Delta t$ at the same point, which move however in the time interval $0 < t < \Delta t$ against each other. They separate at time 0 at $\mathbf{r}_0$ and they meet again at time Δt at $\mathbf{r}_1$. They generate according to (21.14) and (21.15) a field, which propagates with light-velocity. It is different from zero at point $\mathbf{r}$ at time t only, if $t > |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c$ and $t < \Delta t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c$ holds. This should hold independently of the system of inertia in which we consider the wave. (We need only assume, that the charges do not move faster than with light-velocity.) If we choose an infinitesimal Δt then the light flash arrives at time $t = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c$, since it propagates with light-velocity.

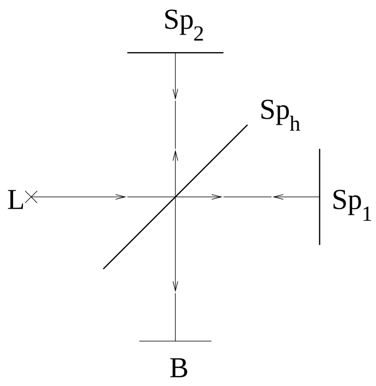
Da die Lorentz-Transformation nicht mit den Gesetzen der Newtonschen Mechanik verträglich ist und die Galilei-Transformation nicht mit den Maxwell-Gleichungen (das Licht müsste sich in einem bewegten Inertial-System mit einer von der Richtung abhängigen Geschwindigkeit ausbreiten), entsteht die Frage, welche der drei Möglichkeiten in der Natur erfüllt ist:
(i) es gibt ein ausgezeichnetes Inertialsystem für die Elektrodynamik, für das die Maxwell-Gleichungen nur gelten (Äther-Hypothese),
(ii) die Newton-Mechanik ist abzuändern,
(iii) die Maxwell-Gleichungen sind abzuändern.

Since the Lorentz transformation is not in agreement with the laws of Newton's mechanics and the Galilei transformation not with Maxwell's equations (in a moving inertial frame light would have a velocity dependent on the direction of light-propagation) the question arises which of the three following possibilities is realized in nature:
(i) there is a preferred system of inertia for electrodynamics, in which Maxwell's equations hold (ether-hypothesis),
(ii) Newton's mechanics has to be modified
(iii) Maxwell's equations have to be modified.

Die Entscheidung kann nur experimentell getroffen werden. Ein wesentlicher Versuch zur Widerlegung von (i) ist der Michelson-Morley-Versuch:

The decision can only be made experimentally: An essential experiment to refute (i) is the Michelson-Morley-experiment:

Ein Lichtstrahl trifft auf einen halbdurchlässigen Spiegel $\mathrm{Sp_h}$, wird durch diesen geteilt, an zwei Spiegeln Sp_1 und Sp_2 im Abstand l reflektiert und an dem halbdurchlässigen Spiegel wieder zusammengeführt. Man beobachtet die Interferenz der beiden Lichtstrahlen bei B. Bewegt sich die Apparatur mit der Geschwindigkeit v in Richtung Spiegel Sp_1, so beträgt die Laufzeit t_1 zwischen dem halbdurchlässigen Spiegel und dem Spiegel Sp_1 und zurück



A light beam hits a half-transparent mirror $\mathrm{Sp_h}$, is split into two beams, which are reflected at mirror Sp_1 and Sp_2, resp. at distance l and combined again at the half-transparent mirror. One observes the interference fringes of both beams at B. If the apparatus moves with velocity v in the direction of the mirror Sp_1, then the time t_1 the light needs to propagate from the half-transparent mirror to Sp_1 and back is

$$t_1 = \frac{l}{\mathrm{c}-v} + \frac{l}{\mathrm{c}+v} = \frac{2l\mathrm{c}}{\mathrm{c}^2 - v^2} = \frac{2l}{\mathrm{c}}(1 + \frac{v^2}{\mathrm{c}^2} + ...). \tag{23.3}$$

Für die Laufzeit t_2 zum Spiegel Sp_2 ergibt sich

The time t_2 the light needs to the mirror Sp_2 is

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{\mathrm{c}^2 - v^2}} = \frac{2l}{\mathrm{c}}(1 + \frac{v^2}{2\mathrm{c}^2} + ...), \tag{23.4}$$

da sich die Lichtgeschwindigkeit c in die beiden Komponenten v und $\sqrt{\mathrm{c}^2 - v^2}$ zerlegt. Damit bleibt ein Gangunterschied

since the light velocity c has to be separated into the two components v and $\sqrt{\mathrm{c}^2 - v^2}$. Thus there remains the time difference

$$t_1 - t_2 = \frac{lv^2}{\mathrm{c}^3}, \tag{23.5}$$

der durch Verschiebung der Interferenzen messbar wäre, wenn zum Beispiel v die Geschwindigkeit der Erde gegenüber der Sonne ist. Diese Verschiebung wurde nicht beobachtet. Man kann einwenden, dass das daran liegt, dass der Äther von der Erde mitgeführt wird. Es gibt jedoch viele weitere Versuche, die für die Lorentz-Invarianz sprechen, das heißt der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum unabhängig vom Inertialsystem.

Dafür spricht vor allem, dass die Konsequenzen für die Mechanik bei Versuchen mit Teilchen nahe der Lichtgeschwindigkeit, insbesondere bei Elementarteilchen bestens bestätigt werden.

Entwicklung der Relativitätstheorie

Um die Geschwindigkeit der Erde gegen den postulierten Äther zu bestimmen führten Michelson und Morley ihr Experiment erstmals 1887 mit negativem Ergebnis durch: Keine Bewegung gegen den Äther konnte festgestellt werden. 1892 hielten Fitzgerald und Lorentz das Ätherkonzept aufrecht, indem sie postulierten, dass sich alle Gegenstände in Richtung der Bewegung gegen den Äther um den Faktor $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ verkürzten (vgl. Lorentz-Kontraktion, Unterabschnitt 23.b.β).

Voigt fand 1887, dass die homogene Gleichung $\Box\Phi = 0$ mit dem d'Alembert-Operator $\Box$ (20.13) unter einer Klasse von linearen Transformationen der $\mathbf{x}$ und t invariant ist. Larmor gab in seiner 1898 fertiggestellten und 1900 erschienen Arbeit *Äther und Materie* bereits die Transformation (23.2) an. Welchen Einfluss dies auf Lorentz hatte, ist nicht bekannt. 1898 zog Poincaré bereits den Begriff der Gleichzeitigkeit in Zweifel.

1904 fand Lorentz, dass die Maxwell-Gleichungen ohne Ladungen und Ströme invariant unter den Transformationen (23.2) sind, falls man die Felder in geeigneter Weise mittransformiert (siehe Abschnitt 25). 1905 bemerkte Poincaré, dass man die Ladungs- und Stromdichten so transformieren kann, dass der volle Satz Maxwell-Gleichungen invariant unter Lorentz-Transformationen ist (vgl. Abschnitte 24 und 25).

which would be measurable by a displacement of the interference fringes, if for example the velocity v is the velocity of the earth against the sun. This displacement has not been observed. One may object, that this is due to a drag of the ether by the earth. There are however many other experiments, which are all in agreement with Lorentz-invariance, that is the constancy of the velocity of light in vacuum independent of the system of inertia.

The consequences in mechanics for particles with velocities comparable to the velocity of light in particular for elementary particles have confirmed Lorentz invariance very well.

Development of the Theory of Relativity

In order to determine the velocity of the earth against the postulated ether Michelson and Morley performed their experiment initially in 1887 with the negative result: No motion against the ether was detected. In 1892 Fitzgerald and Lorentz retained the ether concept by postulating that all material objects are contracted in their direction of motion against the ether by the factor $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ (compare Lorentz contraction, subsection 23.b.β).

In 1887 Voigt realized that the homogeneous equation $\Box\Phi = 0$ with the d'Alembert-operator $\Box$ (20.13) is form invariant under a class of linear transformations of $\mathbf{x}$ and t. Larmor gives in his paper *Ether and Matter* written in 1898 and published in 1900 already the transformation (23.2). It is unknown whether this had an influence on Lorentz. Already in 1898 Poincaré expressed doubts on the concept of simultaneity.

In 1904 Lorentz found that Maxwell's equations without charges and currents are invariant under the transformations (23.2) provided that the fields are transformed in an appropriate way (see section 25). In 1905 Poincaré realized, that the charge and current densities could be transformed so that the full set of Maxwell's equations are invariant in form under Lorentz-transformations (compare sections 24 and 25).

Einstein formulierte 1905 in Unkenntnis der Arbeit von Lorentz und gleichzeitig mit der oben genannten Arbeit von Poincaré die spezielle Relativitätstheorie in einer allgemeinen und vollständigen Weise. Er bemerkte, dass die Idee einer konstanten Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen eine Realität ist, die nicht nur die Elektrodynamik, sondern die gesamte Physik einschließlich der Mechanik beherrscht, und die die Galilei-Invarianz ablöst. Der Grund, dass es so lange dauerte, die (spezielle) Relativitätstheorie zu entwickeln und die Wissenschaftler davon zu überzeugen, dass diese die Realität beschreibt, ist die Rolle, die die Zeit in ihr spielt.

Es war (und ist für manchen noch heute) schwierig zu akzeptieren, dass man den Begriff einer absoluten (d. h. vom Inertialsystem unabhängigen) Gleichzeitigkeit aufgeben muss. Mehr zur Geschichte findet man in *A. Pais, "Raffiniert ist der Herrgott..." Albert Einstein, Vieweg Verlag Braunschweig*

Im Folgenden werden wir die Idee der vierdimensionalen Raum-Zeit entwickeln, innerhalb deren man Transformationen vornehmen kann ähnlich den orthogonalen Transformationen im dreidimensionalen Raum, an die wir bereits gewöhnt sind. Allerdings handelt es sich dabei nicht um einen Euklidischen Raum, d. h. einen Raum mit definiter Metrik, vielmehr haben Raum und Zeit unterschiedliche Metrik (siehe metrischer Tensor g, Gleichung 23.10). Man nennt diesen Raum auch Minkowski-Raum. Wir verwenden dabei die moderne von Minkowski 1908 eingeführte vierdimensionale Notation, die von Einstein zunächst als überflüssig, später von ihm aber als nützlich eingeschätzt wurde.

Ausgehend von den Grundideen der speziellen Relativitätstheorie
Die Naturgesetze und Ergebnisse der Experimente in einem Inertialsystem sind unabhängig von der Bewegung des Systems als Ganzem.
Die Lichtgeschwindigkeit ist in jedem Inertialsystem die Gleiche und unabhängig von der Geschwindigkeit der Quelle.
werden wir in den folgenden Abschnitten die Lorentz-invariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen und der relativistischen Mechanik einführen.

In 1905 Einstein without the knowledge of Lorentz's paper and simultaneously with Poincaré's work mentioned above formulated the theory of special relativity in a general and complete way. He realized, that the idea of a constant velocity of light in all inertial systems constitutes a reality which governs all physics including mechanics and not only electrodynamics, and which has to replace Galileian invariance. The reason, that it took so long to develop the theory of (special) relativity and to convince scientists that it describes the reality, is the role of time in this theory.

It was (and still is for some persons) difficult to accept, that the idea of absolute (that is independent of the system of inertia) simultaneity has to be abandoned. More on the history can be found in *A. Pais, "Subtle is the Lord ..." Albert Einstein, Oxford University Press*

In the following we will develop the idea of a four-dimensional space-time, in which one may perform transformations similar to orthogonal transformations in three-dimensional space, to which we are used. However this space is not a Euclidean space, that is a space with definite metric. Instead space and time have a metric with different sign (see the metric tensor g, eq. 23.10). This space is also called Minkowski space. We use the modern four-dimensional notation introduced by Minkowski in 1908, which was considered by Einstein initially as superfluous, but later as very useful.

Starting from the basic ideas of special relativity
The laws of nature and the results of experiments in a system of inertia are independent of the motion of such a system as whole.
The velocity of light is the same in each system of inertia and independent of the velocity of the source
we will introduce the Lorentz-invariant formulation of Maxwell's equations and of relativistic mechanics.

23.b Lorentz-Transformation

Wir führen die Notation

23.b Lorentz Transformation

We introduce the notation

$$x^0 = \mathrm{c}t, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \tag{23.6}$$

oder kurz

or shortly

$$(x^\mu) = (\mathrm{c}t, \mathbf{r}) \tag{23.7}$$

ein, weiter

, further

$$(x_\mu) = (\mathrm{c}t, -\mathbf{r}). \tag{23.8}$$

Dann können wir auch

Then we may write

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu, \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \tag{23.9}$$

schreiben (Summationskonvention) mit

(summation convention)

$$(g^{\cdot\cdot}) = (g_{\cdot\cdot}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{23.10}$$

Man bezeichnet g als den metrischen Tensor. Generell gilt für das Herauf- und Herunter-Ziehen von Indices

One calls g the metric tensor. Generally one has the rules for lifting and lowering of indices

$$C \cdot \cdot^{\mu} \cdot \cdot = g^{\mu\nu} C \cdot \cdot_{\nu} \cdot \cdot, \quad C \cdot \cdot_{\mu} \cdot \cdot = g_{\mu\nu} C \cdot \cdot^{\nu} \cdot \cdot \tag{23.11}$$

Wir vereinbaren: Indices κ, λ, μ, ν laufen von 0 bis 3, Indices α, β, γ, ... von 1 bis 3. Man beobachtet, dass nach (23.11) $g_\mu{}^\nu = g_{\mu\kappa} g^{\kappa\nu} = \delta_\mu{}^\nu$, $g^\mu{}_\nu = g^{\mu\kappa} g_{\kappa\nu} = \delta^\mu{}_\nu$ mit dem Kronecker-Delta ist.

We introduce the convention: Indices κ, λ, μ, ν run from 0 to 3, indices α, β, γ, ... from 1 to 3. One observes that according to (23.11) $g_\mu{}^\nu = g_{\mu\kappa} g^{\kappa\nu} = \delta_\mu{}^\nu$, $g^\mu{}_\nu = g^{\mu\kappa} g_{\kappa\nu} = \delta^\mu{}_\nu$ with the Kronecker-delta.

Wird ein Lichtblitz zur Zeit $t = 0$ bei $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ erzeugt, so wird seine Wellenfront durch

If a light-flash is generated at time $t = 0$ at $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, then its wave front is described by

$$s^2 = \mathrm{c}^2 t^2 - \mathbf{r}^2 = x^\mu x_\mu = 0 \tag{23.12}$$

beschrieben. Wir bezeichnen das durch die Koordinaten x^μ beschriebene System mit S. Wir postulieren nun mit Einstein: In jedem Inertialsystem breitet sich das Licht im Vakuum mit der gleichen Geschwindigkeit c aus. (Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit) Dann gilt für den Lichtblitz im gleichförmig bewegten System S' (dessen Ursprung für $t = t' = 0$ mit dem von S übereinstimmt)

. We denote the system described by the coordinates x^μ by S. Now we postulate with Einstein: Light in vacuum propagates in each inertial system with the same velocity c. (principle of the constance of light velocity) Then the propagation of the light flash in the uniformly moving system S', whose origin agrees at $t = t' = 0$ with that of S is given by

$$s'^2 = x'^\mu x'_\mu = 0. \tag{23.13}$$

Unter der Annahme eines homogenen Raum-Zeit-Kontinuums muss die Transformation zwischen x' und x linear sein

Requiring a homogeneous space-time continuum the transformation between x' and x has to be linear

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \tag{23.14}$$

und es muss gelten $s'^2 = f s^2$ mit einer Konstanten f. Verlangen wir, dass der Raum isotrop ist und kein Inertialsystem ausgezeichnet ist, so folgt $f = 1$. Die Bedingung $s'^2 = s^2$ impliziert

and $s'^2 = f s^2$ with some constant f has to hold. If we require that space is isotropic and no system of inertia is preferred, then $f = 1$ has to hold. The condition $s'^2 = s^2$ implies

$$s'^2 = x'^\mu x'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \Lambda_\mu{}^\kappa x_\kappa = s^2 = x^\nu \delta_\nu{}^\kappa x_\kappa, \tag{23.15}$$

was für beliebiges x erfüllt ist, wenn

which is fulfilled for arbitrary x, if

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\kappa = \delta_\nu{}^\kappa \tag{23.16}$$

erfüllt ist. Die Umkehrtransformation von (23.14) folgt aus

holds. The inverse transformation of (23.14) follows from

$$x^\kappa = \delta_\nu{}^\kappa x^\nu = \Lambda_\mu{}^\kappa \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \Lambda_\mu{}^\kappa x'^\mu. \tag{23.17}$$

Aus (23.16) folgt speziell für $\nu = \kappa = 0$ die Beziehung $(\Lambda^{00})^2 - \sum_\alpha (\Lambda^{\alpha 0})^2 = 1$. Man beachte, dass $\Lambda^\alpha{}_0 = +\Lambda^{\alpha 0}$, $\Lambda_\alpha{}^0 = -\Lambda^{\alpha 0}$. Daher ist $|\Lambda^{00}| > 1$. Man unterscheidet zwischen Transformationen mit positivem und negativem Λ^{00}, da es keinen kontinuierlichen Übergang zwischen diesen beiden Klassen gibt. Die Bedingung $\Lambda^{00} > 0$ sagt aus, dass $\Lambda^{00} = \frac{dt}{dt'}|_{\mathbf{r}'} > 0$, das heißt eine in S' ruhende Uhr läuft von S aus gesehen in der gleichen Zeitrichtung, wie die in S synchronisierten Uhren (und nicht rückwärts).

From (23.16) one obtains in particular for $\nu = \kappa = 0$ the relation $(\Lambda^{00})^2 - \sum_\alpha (\Lambda^{\alpha 0})^2 = 1$. Note that $\Lambda^\alpha{}_0 = +\Lambda^{\alpha 0}$, $\Lambda_\alpha{}^0 = -\Lambda^{\alpha 0}$. Thus one has $|\Lambda^{00}| > 1$. One distinguishes between transformations with positive and negative Λ^{00}, since there is no continuous transition between these two classes. The condition $\Lambda^{00} > 0$ means that $\Lambda^{00} = \frac{dt}{dt'}|_{\mathbf{r}'} > 0$, that is a clock which is at rest in S' changes its time seen from S with the same direction as the clock at rest in S (and not backwards).

Schließlich lässt sich noch eine Aussage über $\det(\Lambda^\mu{}_\nu)$ machen. Aus (23.16) folgt

Finally we can make a statement on $\det(\Lambda^\mu{}_\nu)$. From (23.16) it follows that

$$\Lambda^\mu{}_\nu g_{\mu\lambda} \Lambda^\lambda{}_\rho g^{\rho\kappa} = \delta_\nu{}^\kappa. \tag{23.18}$$

Unter Verwendung des Determinanten-Multiplikationssatzes folgt

Using the theorem on the multiplication of determinants we obtain

$$\det(\Lambda^\mu{}_\nu)^2 \det(g_{\mu\lambda}) \det(g^{\rho\kappa}) = 1. \tag{23.19}$$

Da $\det(g_{\mu\lambda}) = \det(g^{\rho\kappa}) = -1$ folgt

Since $\det(g_{\mu\lambda}) = \det(g^{\rho\kappa}) = -1$ one obtains

$$\det(\Lambda^\mu{}_\nu) = \pm 1. \tag{23.20}$$

Betrachten wir nur Rechts-Basis-Systeme, so ist $\det(\Lambda^\mu{}_\nu) = +1$. Transformationen, die

If we consider only a right-basis-system then we have $\det(\Lambda^\mu{}_\nu) = +1$. Transformations which fulfill

$$\Lambda^{00} > 0, \quad det(\Lambda^\mu{}_\nu) = 1 \tag{23.21}$$

erfüllen, heißen eigentliche Lorentz-Transformationen.

are called proper Lorentz transformations.

Gl. (23.21) hat die Konsequenz, dass das vierdimensionale Raumzeitvolumen invariant ist

Eq. (23.21) has the consequence, that the fourdimensional space time volume is invariant

$$dt' d^3r' = \frac{1}{c} d^4x' = \frac{1}{c} \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} d^4x = \frac{1}{c} \det(\Lambda^\mu{}_\nu) d^4x = \frac{1}{c} d^4x = dt d^3r. \tag{23.22}$$

Legen wir die z- und die z'-Achse in Richtung der Relativgeschwindigkeit v der sich gegeneinander bewegenden Inertialsysteme und setzen wir zusätzlich $x' = x$, $y' = y$, so folgt die spezielle Transformation (23.2). Die zugehörige Matrix Λ lautet

If the direction of the z- and the z'-axes point into the direction of the relative velocity between both inertial systems and $x' = x$, $y' = y$, then the special transformation (23.2) follows. The corresponding matrix Λ reads

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{23.23}$$

mit

with

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \tag{23.24}$$

23.b.α Zeitdilatation

Wir betrachten nun eine in S' ruhende Uhr im System S. Aus

23.b.α Time Dilatation

We consider now a clock in the system S which is at rest in S'. From

$$t = \gamma(t' + \frac{vz'}{c^2}) \tag{23.25}$$

folgt dann

we find that

$$\Lambda_0{}^0 = \left.\frac{\partial t}{\partial t'}\right|_{\mathbf{r}'} = \gamma. \tag{23.26}$$

Die in S' ruhende Uhr geht von S aus betrachtet langsamer

Thus the clock at rest in S' runs slower when seen from S

$$\Delta t' = \left.\frac{\partial t'}{\partial t}\right|_{\mathbf{r}'} \Delta t = \frac{1}{\gamma}\Delta t = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\Delta t. \tag{23.27}$$

Dieses Phänomen bezeichnet man als Zeitdilatation.

This phenomenon is called time dilatation.

23.b.β Längenkontraktion

Aus

23.b.β Lorentz Contraction

From

$$z' = \gamma(z - vt) \tag{23.28}$$

folgt

one obtains

$$\Lambda^3{}_3 = \left.\frac{\partial z'}{\partial z}\right|_t = \gamma \tag{23.29}$$

und damit

and therefore

$$\Delta z = \left.\frac{\partial z}{\partial z'}\right|_t \Delta z' = \frac{1}{\gamma}\Delta z' = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\Delta z'. \tag{23.30}$$

Ein Maßstab, der in S' ruht und in der Richtung der Relativ-Bewegung ausgedehnt ist, erscheint also in S verkürzt. Man bezeichnet das als Längenkontraktion. Dagegen bleiben die Entfernungen senkrecht zur Bewegungsrichtung unverändert: $\Delta x' = \Delta x$, $\Delta y' = \Delta y$.

Diese Verkürzung bewirkt, dass in (23.3) die Länge l durch $l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ zu ersetzen ist. Dann stimmen die beiden Laufzeiten des Lichts unabhängig von der Geschwindigkeit v überein, $t_1 = t_2$.

A length-meter which is at rest in S' and is extended in the direction of the relative movement, appears consequently contracted in S. This is called Lorentz contraction or FitzGerald-Lorentz contraction. However, the distances perpendicular to the velocity are unaltered: $\Delta x' = \Delta x$, $\Delta y' = \Delta y$.

This contraction has the effect, that in (23.3) the length l has to be replaced by $l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Then the two times the light has to travel agree independent of the velocity v, $t_1 = t_2$.

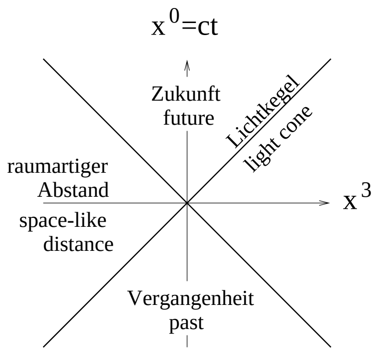
24 Viererskalare und Vierervektoren

24 Four-Scalars and Four-Vectors

24.a Abstand und Eigenzeit als Viererskalare

24.a Distance and Proper Time as Four-Scalars

Eine Größe, die invariant gegen Lorentz-Transformationen ist, heißt Viererskalar.
Beispiel: Gegeben seien zwei Raum-Zeit-Punkte (Ereignisse) (x^μ), $(\bar{x}^\mu)$. Die Größe



A quantity which is invariant under Lorentz-transformations is called four-scalar.
Example: Given two points in space-time (events) (x^μ), $(\bar{x}^\mu)$. The quantity

$$s^2 = (x^\mu - \bar{x}^\mu)(x_\mu - \bar{x}_\mu) \tag{24.1}$$

ist ein Viererskalar. Sie hat in jedem Inertialsystem den gleichen Wert. Speziell für $\bar{x}^\mu = 0$ (Ursprung) ist $s^2 = x^\mu x_\mu$.

is a four-scalar. It assumes the same number in all systems of inertia. Especially for $\bar{x}^\mu = 0$ (origin) it is $s^2 = x^\mu x_\mu$.

24.a.α Raumartiger Abstand $s^2 < 0$

24.a.α Space-like distance $s^2 < 0$

Wenn $s^2 < 0$, dann gibt es Inertialsysteme, in denen beide Ereignisse gleichzeitig stattfinden $x'^0 = 0$. Sei etwa $(x^\mu) = (ct, 0, 0, z)$. Dann erhält man aus (23.2)

If $s^2 < 0$, then there are systems of inertia, in which both events occur at the same time $x'^0 = 0$. If for example $(x^\mu) = (ct, 0, 0, z)$. Then one obtains from 23.2)

$$t' = \frac{t - \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{24.2}$$

mit $v = tc^2/z$

with $v = tc^2/z$

$$t' = 0, \quad z' = \frac{z(1 - \frac{v^2}{c^2})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = z\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \pm\sqrt{z^2 - c^2t^2} = \pm\sqrt{-s^2}. \tag{24.3}$$

Man bezeichnet daher zwei solche Ereignisse als raumartig zu einander gelegen.

Thus one calls such two events space-like separated.

24.a.β Zeitartiger Abstand $s^2 > 0$

24.a.β Time-like distance $s^2 > 0$

In diesem Fall existiert ein Inertialsystem, in dem beide Ereignisse am gleichen Ort stattfinden ($\mathbf{x}' = \mathbf{0}$). In der Transformation (23.2) wählen wir $v = z/t$. Dann folgt

In this case there exists a system of inertia in which both events take place at the same point in space ($\mathbf{x}' = \mathbf{0}$). We choose $v = z/t$ in the transformation (23.2) and obtain

$$t' = \frac{t(1 - \frac{v^2}{c^2})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \operatorname{sign}(t)\sqrt{t^2 - \frac{z^2}{c^2}} = \operatorname{sign}(t)\frac{s}{c}, \quad z' = 0. \tag{24.4}$$

Ein Ereignis ist früher als das andere, das heißt, das Vorzeichen von t' stimmt mit dem von t überein.

One event takes place before the other that is the sign of t' agrees with that of t.

Eigenzeit τ

Proper Time τ

Unter der Eigenzeit τ versteht man die Zeit, die im jeweiligen Ruhesystem verstreicht. Bewegt sich ein Punkt mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$, so gilt für seine Eigenzeit

The proper time τ is the time which passes in the rest system under consideration. If a point moves with velocity $\mathbf{v}(t)$ its proper time varies as

$$d\tau = \frac{ds}{\mathrm{c}} = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{\mathrm{c}^2}}dt, \tag{24.5}$$

also

that is

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2(t)}{\mathrm{c}^2}}dt. \tag{24.6}$$

Die Eigenzeit ist unabhängig vom Inertialsystem, also ein Viererskalar.

The proper time is independent of the system of inertia, thus it is a four-scalar.

24.a.γ Lichtartiger Abstand $s^2 = 0$

24.a.γ Light-like distance $s^2 = 0$

Wenn ein Lichtblitz direkt von einem Ereignis zu einem anderen läuft, dann ist deren Abstand $s = 0$. Die in einem Inertialsystem gemessene Zeit kann je nach Inertialsystem beliebig lang oder kurz sein, jedoch kann sich die Reihenfolge der Ereignisse (bei einer eigentlichen Lorentz-Transformation) nicht umkehren.

If a light flash propagates directly from one event to another, then the distance of these two events $s = 0$. The time measured in a system of inertia depends on the system of inertia and may be arbitrarily long or short, however, the sequence of the events (under proper Lorentz transformation) cannot be reversed.

Ein weiterer Viererskalar ist die Ladung.

Another four-scalar is the charge.

24.b Weltgeschwindigkeit als Vierervektor

24.b World Velocity as Four-Vector

Transformiert sich eine vierkomponentige Größe (A^μ) beim Übergang von einem Inertialsystem zum anderen wie die Raum-Zeit-Koordinaten (x^μ), so bilden sie einen Vierervektor

If a four-component quantity (A^μ) transforms by the transition from one system of inertia to another as the space-time coordinates (x^μ), then it is a four-vector

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu. \tag{24.7}$$

Ein Beispiel ist die Weltgeschwindigkeit

An example is the world velocity

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma v^\mu \ \genfrac{}{}{0pt}{}{\text{mit}}{\text{with}}\ v^0 = \frac{dx^0}{dt} = \mathrm{c}\frac{dt}{dt} = \mathrm{c}. \tag{24.8}$$

Die Weltgeschwindigkeit $(u^\mu) = (\mathrm{c}\gamma, \mathbf{v}\gamma)$ ist ein Vierer-Vektor. Da τ invariant gegen Lorentz-Transformationen ist, transformiert sie sich wie (x^μ). Dagegen ist $(\mathrm{c}, \mathbf{v})$ kein Vierer-Vektor. Es ist

The world velocity $(u^\mu) = (\mathrm{c}\gamma, \mathbf{v}\gamma)$ is a four-vector. Since τ is invariant under Lorentz transformations, its components transform like (x^μ). However, $(\mathrm{c}, \mathbf{v})$ is not a four-vector. One has

$$u^\mu u_\mu = (\mathrm{c}^2 - \mathbf{v}^2)\gamma^2 = \mathrm{c}^2. \tag{24.9}$$

Allgemein ist das Skalar-Produkt zweier Vierer-Vektoren (A^μ) und (B^μ) ein Viererskalar

Quite generally the scalar product of two four-vectors (A^μ) and (B^μ) is a four-scalar

$$A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\kappa A^\nu B_\kappa = \delta^\kappa_\nu A^\nu B_\kappa = A^\nu B_\nu. \tag{24.10}$$

Wir zeigen das folgende Lemma: Ist (a^μ) ein beliebiger Vierervektor (oder hat man einen vollständigen Satz Vierervektoren) und ist $a^\mu b_\mu$ ein Viererskalar, dann ist auch (b^μ) ein Vierervektor. Beweis:

We show the following lemma: If (a^μ) is an arbitrary four-vector (or one has a complete set of four-vectors) and $a^\mu b_\mu$ is a four-scalar then (b^μ) is a four-vector too. Proof:

$$a^\mu b_\mu = a'^\kappa b'_\kappa = \Lambda^\kappa{}_\mu a^\mu b'_\kappa. \tag{24.11}$$

Da dies für alle (a^μ) oder einen vollständigen Satz gilt, gilt auch $b_\mu = \Lambda^\kappa{}_\mu b'_\kappa$. Dies ist aber die Transformationsformel (23.17) für Vierervektoren.

Since this holds for all (a^μ) or for a complete set, one has $b_\mu = \Lambda^\kappa{}_\mu b'_\kappa$. This, however, is the transformation formula (23.17) for four-vectors.

Additions-Theorem für Geschwindigkeiten

Addition theorem for velocities

Das Inertialsystem S' bewege sich gegenüber S mit der Geschwindigkeit v in z-Richtung. In S' bewege sich ein Punkt mit der Geschwindigkeit w' ebenfalls in z-Richtung. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt er sich in S? Wir haben

The system of inertia S' moves with velocity v in z-direction with respect to S. A point in S' moves with velocity w' also in z-direction. With which velocity does the point move in S? We have

$$z = \frac{z' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' + \frac{vz'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{24.12}$$

Mit $z' = w't'$ folgt dann

With $z' = w't'$ one obtains

$$z = \frac{(v + w')t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{(1 + \frac{vw'}{c^2})t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{24.13}$$

Daraus folgt die Geschwindigkeit des Punktes in S

From this one obtains the velocity of the point in S

$$w = \frac{z}{t} = \frac{w' + v}{1 + \frac{w'v}{c^2}}. \tag{24.14}$$

Wir beobachten

We observe

$$1 - \frac{w^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{\frac{w'}{c} + \frac{v}{c}}{1 + \frac{w'v}{c^2}}\right)^2 = \frac{(1 - \frac{w'^2}{c^2})(1 - \frac{v^2}{c^2})}{(1 + \frac{w'v}{c^2})^2}. \tag{24.15}$$

Wenn $|w'| < c$ und $|v| < c$, dann ist dieser Ausdruck positiv. Dann ist also auch $|w| < c$. Beispiel: $w' = v = 0.5c$, dann ist $w = 0.8c$.

If $|w'| < c$ and $|v| < c$, then this expression is positive. Then one obtains also $|w| < c$. Example: $w' = v = 0.5c$, then one obtains $w = 0.8c$.

24.c Viererstromdichte

24.c Current Density Four-Vector

Wir fassen Ladungs- und Stromdichte zusammen zur Viererstromdichte

We combine charge- and current-density in the charge-current density

$$(j^\mu) = (c\rho, \mathbf{j}) \tag{24.16}$$

und überzeugen uns, dass j^μ ein Vierervektor ist. Für Ladungen der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ gilt (für Ladungen verschiedener Geschwindigkeit können die Beiträge superponiert werden)

and convince us that j^μ is a four-vector. For charges of velocity $\mathbf{v}$ one has (the contributions of charges of different velocities can be superimposed)

$$j^\mu = \rho v^\mu, \quad (v^0 = c), \quad j^\mu = \rho\sqrt{1-\beta^2}u^\mu \tag{24.17}$$

Falls $\rho\sqrt{1-\beta^2}$ ein Viererskalar ist, ist j^μ ein Vierervektor. Nun ist

If $\rho\sqrt{1-\beta^2}$ is a four-scalar then indeed j^μ is a four-vector. Now one has

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{V_0\sqrt{1-\beta^2}} \tag{24.18}$$

mit dem Volumen V_0 im Ruhesystem und der Längenkontraktion $V = V_0\sqrt{1-\beta^2}$. Da die Ladung q und V_0 Viererskalare sind, ist auch $\rho\sqrt{1-\beta^2}$ ein Viererskalar.

with the volume V_0 in the rest system and the length contraction $V = V_0\sqrt{1-\beta^2}$. Since the charge q and V_0 are four-scalars this holds also $\rho\sqrt{1-\beta^2}$.

Wir bringen nun die Kontinuitätsgleichung in Lorentz-invariante Form. Aus $\dot\rho + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ folgt

We bring the equation of continuity in Lorentz-invariant form. From $\dot\rho + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ one obtains

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0, \tag{24.19}$$

da $\partial j^0/\partial x^0 = \partial\rho/\partial t$. Wir betrachten nun die Transformations-Eigenschaften der Ableitungen $\partial/\partial x^\mu$

since $\partial j^0/\partial x^0 = \partial\rho/\partial t$. We consider now the transformation properties of the derivatives $\partial/\partial x^\mu$

$$\frac{\partial f}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial f}{\partial x^\nu} = \Lambda_\mu{}^\nu \frac{\partial f}{\partial x^\nu}, \tag{24.20}$$

das heisst die Ableitung transformiert sich gemäß

that is the derivatives transform according to

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu{}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{24.21}$$

wie $x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu$. Man schreibt daher

as $x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu$. Thus one writes

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu, \quad (\partial_\mu) = (\frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla). \tag{24.22}$$

Man achte auf die Stellung der Indices. Ähnlich gilt

Watch the positions of the indices. Similarly one has

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \partial^\mu, \quad (\partial^\mu) = (\frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla). \tag{24.23}$$

Man kann dann die Kontinuitätsgleichung als

Then the equation of continuity can be written

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{24.24}$$

schreiben. Generell ist die Viererdivergenz $\partial_\mu P^\mu = \partial^\mu P_\mu$ eines Vierervektors P ein Viererskalar.

. Generally the four-divergency $\partial_\mu P^\mu = \partial^\mu P_\mu$ of a four-vector P is a four-scalar.

24.d Viererpotential

24.d Four-Potential

Wir fassen nun $\mathbf{A}$ und Φ zusammen zum Viererpotential

We combine the potentials $\mathbf{A}$ and Φ in the four-potential

$$(A^\mu) = (\Phi, \mathbf{A}), \tag{24.25}$$

dann gilt

then one has

$$\Box A^\mu = -\frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^\mu \tag{24.26}$$

in der Lorenz-Eichung mit der Eichbedingung

in the Lorenz-gauge with the gauge condition

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{\mathrm{c}}\dot\Phi = 0 \to \partial_\mu A^\mu = 0. \tag{24.27}$$

Dabei ist

There

$$\Box = \triangle - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 = -\partial_\mu\partial^\mu \tag{24.28}$$

ein Viererskalar $\Box' = \Box$.

is a four-scalar $\Box' = \Box$.

Wir zeigen nun, dass die retardierte Lösung $A_{\rm r}^\mu$ manifest Lorentz-invariant ist. Wir behaupten

We now show that the retarded solution $A_{\rm r}^\mu$ is manifestly Lorentz-invariant. We claim

$$A_{\rm r}^\mu(x) = \frac{1}{c}\int d^4y j^\mu(y)\delta(\frac{1}{2}s^2)\theta(x^0 - y^0) \tag{24.29}$$

$$s^2 = (x^\mu - y^\mu)(x_\mu - y_\mu) = c^2(t_y - t_x)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 \tag{24.30}$$

$$\theta(x^0) = \begin{cases} 1 & x^0 > 0 \\ 0 & x^0 < 0 \end{cases} \tag{24.31}$$

Wir betrachten nun generell die Integration über eine δ-Funktion, die von einer Funktion f abhängt. Offensichtlich tragen nur die Nullstellen t_i von f bei,

We consider now generally the integration over a δ-function, which depends on a function f. Apparently only the zeroes t_i of f contribute,

$$\int g(t)\delta(f(t))dt = \sum_i \int_{t_i-\epsilon}^{t_i+\epsilon} g(t)\delta(f(t))dt \quad \begin{matrix}\text{mit}\\ \text{with}\end{matrix} \quad f(t_i) = 0. \tag{24.32}$$

Mit $z = f(t)$, $dz = f'(t)dt$ folgt dann

With $z = f(t)$, $dz = f'(t)dt$ one obtains

$$\int g(t)\delta(f(t))dt = \sum_i \int_{-\epsilon/f'(t_i)}^{\epsilon/f'(t_i)} g(t_i)\delta(z)\frac{dz}{f'(t_i)} = \sum_i \frac{g(t_i)}{|f'(t_i)|}. \tag{24.33}$$

Damit ergeben sich die Nullstellen in der δ-Funktion von (24.29) zu $t_y = t_x \pm |\mathbf{x}-\mathbf{y}|/c$ und die Ableitungen zu $f'(t_y) = c^2(t_y - t_x) = \pm c|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, was

Thus the zeroes in the δ-function of (24.29) are $t_y = t_x \pm |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c$ and their derivatives are given by $f'(t_y) = c^2(t_y - t_x) = \pm c|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, which yields

$$A_r^\mu(x) = \frac{1}{c}\int d^4y j^\mu \delta(\frac{1}{2}s^2)\theta(t_x - t_y) = \int d^3y \frac{1}{c|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} j^\mu(\mathbf{y}, t_x - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c}) \tag{24.34}$$

ergibt. Wegen $\theta(t_x - t_y)$ erhalten wir die retardierte Lösung. Sie ist in Übereinstimmung mit (21.14) und (21.15). Ersetzen wir die θ-Funktion durch $\theta(t_y - t_x)$, so ergibt sich die avancierte Lösung. Man beachte, dass sich das Vorzeichen der Zeitdifferenz längs des Lichtkegels unter eigentlichen Lorentz-Transformationen nicht ändert.

. The factor $\theta(t_x - t_y)$ yields the retarded solution. The solution is in agreement with (21.14) and (21.15). If we replace the θ-function by $\theta(t_y - t_x)$, then we obtain the advanced solution. Remember, that the sign of the time difference does not change under proper Lorentz transformations.

25 Elektromagnetischer Feldtensor

25 Electromagnetic Field Tensor

25.a Feldtensor

25.a Field Tensor

Aus dem Viererpotential (A^μ) erhalten wir die Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$,

We obtain the fields $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ from the four-potential

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad}\Phi - \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\mathbf{A}}, \tag{25.1}$$

zum Beispiel

for example

$$B_1 = \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} = \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3, \quad E_1 = -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} = \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1. \tag{25.2}$$

Wir führen daher den elektromagnetischen Feldtensor ein

Thus we introduce the electromagnetic field tensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}. \tag{25.3}$$

Er ist antisymmetrisch. Explizit lautet er

It is antisymmetric. It reads explicitely

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{25.4}$$

25.b Maxwell-Gleichungen

25.b Maxwell's Equations

25.b.α Die inhomogenen Gleichungen

25.b.α The Inhomogeneous Equations

Die Gleichung $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$ lässt sich ausdrücken

The equation $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$ reads

$$\partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^0. \tag{25.5}$$

Aus der 1-Komponente von $\operatorname{rot}\mathbf{B} - \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\mathbf{j}$ folgt

From the 1-component of $\operatorname{curl}\mathbf{B} - \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\mathbf{j}$ one obtains

$$\frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^3} - \frac{\partial E_1}{\partial x^0} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^1 \to \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} + \partial_0 F^{01} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^1, \tag{25.6}$$

ähnlich für die anderen Komponenten. Diese vier Komponenten-Gleichungen lassen sich zusammenfassen zu

similarly for the other components. These four component-equations can be combined to

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^\nu. \tag{25.7}$$

Setzen wir die Darstellung der Felder durch die Potentiale ein, (25.3), so folgt

If we insert the representation of the fields by the potentials, (25.3), we obtain

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^\nu. \tag{25.8}$$

Mit der Bedingung für die Lorentz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$, (24.27) folgt dann

Together with the condition for the Lorentz gauge $\partial_\mu A^\mu = 0$, (24.27) one obtains

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^\nu \tag{25.9}$$

in Übereinstimmung mit (24.26) und (24.28).

in agreement with (24.26) and (24.28).

25.b.β Die homogenen Gleichungen

25.b.β The Homogeneous Equations

Ähnlich kann man die homogenen Maxwell-Gleichungen umschreiben. Aus $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ wird

Similarly the homogeneous Maxwell's equations can be written. From $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ one obtains

$$\partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} = 0 \tag{25.10}$$

und aus $(\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}})_x = 0$ wird

and $(\operatorname{curl}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}})_x = 0$ reads

$$-\partial^2 F^{30} - \partial^3 F^{02} - \partial^0 F^{23} = 0. \tag{25.11}$$

Diese Gleichungen lassen sich zusammenfassen zu

These equations can be combined to

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0. \tag{25.12}$$

Man beachte, dass die Gleichung nur für $\lambda \neq \mu \neq \nu \neq \lambda$ nicht trivial ist. Sind zwei Indices gleich, so verschwindet die linke Seite identisch. Man kann diese Gleichungen auch mit Hilfe des dualen Feldtensors

One observes, that these equations are only non-trivial for $\lambda \neq \mu \neq \nu \neq \lambda$. If two indices are equal, then the left-hand side vanishes identically. One may represent the equations equally well by the dual field tensor

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda} \tag{25.13}$$

ausdrücken. Dabei ist $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$ vollständig antisymmetrisch gegen Vertauschung der Indices. Das heißt, er ändert sein Vorzeichen, wenn zwei Indices vertauscht werden. Das impliziert, dass er verschwindet, wenn zwei Indices gleich sind. Er ist daher nur von Null verschieden, wenn alle vier Indices verschieden sind. Wir normieren ihn auf $\epsilon^{0123} = 1$. Damit hat man explizit

. Here $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$ is completely antisymmetric against interchange of the four indices. Thus it changes sign, if two of the indices are exchanged. This implies, that it vanishes, if two indices are equal. It is only different from zero, if all four indices are different. It is normalized to $\epsilon^{0123} = 1$. Then one obtains explicitely

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{25.14}$$

und (25.12) lässt sich schreiben

and (25.12) can be written

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \tag{25.15}$$

Man überzeuge sich, dass ϵ ein Pseudoskalar ist, das heißt es gilt

One should convince oneself that ϵ is a pseudoscalar, that is

$$\epsilon'^{\mu\nu\kappa\lambda} = \det(\Lambda)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}, \tag{25.16}$$

wobei $\det(\Lambda)$ gemäß der Diskussion nach (23.19) nur die Werte ± 1 annimmt und für eigentliche Lorentz-Transformationen gleich $+1$ ist (23.21).

where $\det(\Lambda)$ takes only the values ± 1 according to the discussion after (23.19). For proper Lorentz transformations it equals $+1$ (23.21).

25.c Transformation der elektrischen und magnetischen Felder

25.c Transformation of the Electric and Magnetic Fields

Da sich (∂^μ) und (A^ν) wie Vierer-Vektoren transformieren, gilt

Since (∂^μ) and (A^ν) transform like four-vectors, one has

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\kappa \Lambda^\nu{}_\lambda F^{\kappa\lambda} \tag{25.17}$$

für die Transformation des elektromagnetischen Feldes. Wählen wir speziell

for the transformation of the electromagnetic field. If we choose in particular

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \tag{25.18}$$

so folgt

then one obtains

$$E_1' = F'^{10} = \Lambda^1{}_\kappa \Lambda^0{}_\lambda F^{\kappa\lambda} = \gamma F^{10} - \beta\gamma F^{13} = \gamma(E_1 - \beta B_2), \tag{25.19}$$

also

thus

$$E_1' = \gamma(E_1 - \frac{v}{c} B_2), \tag{25.20}$$

ähnlich

similarly

$$B_1' = \gamma(B_1 + \frac{v}{c} E_2) \tag{25.21}$$

$$E_2' = \gamma(E_2 + \frac{v}{c} B_1), \qquad B_2' = \gamma(B_2 - \frac{v}{c} E_1) \tag{25.22}$$

$$E_3' = E_3, \qquad B_3' = B_3, \tag{25.23}$$

was wir auch zu

which can be combined to

$$E_\parallel' = E_\parallel, \qquad B_\parallel' = B_\parallel, \qquad \text{Komponente component} \parallel \mathbf{v} \tag{25.24}$$

$$\mathbf{E}_\perp' = \gamma(\mathbf{E}_\perp + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}), \qquad \mathbf{B}_\perp' = \gamma(\mathbf{B}_\perp - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}), \qquad \text{Komponenten components} \perp \mathbf{v} \tag{25.25}$$

zusammenfassen können.

.

25.d Felder einer gleichförmig bewegten Punktladung

25.d Fields of a Point Charge in Uniform Motion

Wir können daraus zum Beispiel die Felder einer Ladung, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$ bewegt, berechnen. Im Ruhesystem S' der Ladung, die im Ursprung ist, gilt

From this we can determine the fields of a charge which moves with constant velocity $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$. In the rest system S' of the charge, which is supposed to be in the origin of S', one has

$$\mathbf{E}' = q\frac{\mathbf{r}'}{r'^3}, \qquad \mathbf{B}' = \mathbf{0}. \tag{25.26}$$

Im System S gilt für die Ladung $x_q = y_q = 0$, $z_q = vt$. Wir drücken nun $\mathbf{r}'$ aus durch $\mathbf{r}$ und t und erhalten

In the system S the coordinates of the charge are $x_q = y_q = 0$, $z_q = vt$. Now we express $\mathbf{r}'$ by $\mathbf{r}$ and t and obtain

$$\mathbf{E}' = \left(\frac{qx}{N}, \frac{qy}{N}, \frac{q\gamma(z - vt)}{N}\right), \tag{25.27}$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{0}, \tag{25.28}$$

$$N = r'^3 = (x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2)^{3/2}. \tag{25.29}$$

Es folgt

It follows that

$$\left.\begin{array}{r} E_1 = \gamma(E_1' + \frac{v}{c}B_2') = \frac{q\gamma x}{N} \\ E_2 = \gamma(E_2' - \frac{v}{c}B_1') = \frac{q\gamma y}{N} \\ E_3 = E_3' = \frac{q\gamma(z-vt)}{N} \end{array}\right\} \mathbf{E} = \frac{q\gamma(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)}{N} \tag{25.30}$$

$$\left.\begin{array}{r} B_1 = \gamma(B'_1 - \frac{v}{c}E'_2) = -\frac{q\gamma\beta y}{N} \\ B_2 = \gamma(B'_2 + \frac{v}{c}E'_1) = \frac{q\gamma\beta x}{N} \\ B_3 = B'_3 = 0 \end{array}\right\} \mathbf{B} = \frac{q\gamma(\mathbf{v}\times\mathbf{r})}{cN}. \tag{25.31}$$

Flächen konstanten Ns sind in Bewegungsrichtung abgeplattete Rotations-Ellipsoide. Dabei ist kurze Halbachse / lange Halbachse $= 1/\gamma = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, also eine Verkürzung, wie sie auch bei der Längenkontraktion auftritt.

Areas of constant N are oblate rotational ellipsoids. The ratio short half-axis / long half-axis is given by $1/\gamma = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, thus the same contraction as for the Lorentz contraction.

25.e Doppler-Effekt

25.e Doppler Effect

Wir betrachten eine monochromatische ebene Welle

We consider a monochromatic plane wave

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\phi}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i\phi} \quad \begin{array}{c}\text{mit}\\ \text{with}\end{array} \ \phi = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t. \tag{25.32}$$

Wir wissen, wie sich $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ und damit auch $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{B}_0$ transformieren. Es bleibt daher noch der Viererskalar der Phase ϕ zu betrachten. Schreiben wir

We know, how $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ and thus $\mathbf{E}_0$ and $\mathbf{B}_0$ transform. Thus we are left with considering the phase ϕ which is a four-scalar. If we write

$$(k^\mu) = (\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}), \tag{25.33}$$

so folgt

then

$$\phi = -k_\mu x^\mu \tag{25.34}$$

. Da (x^μ) ein beliebiger Vierervektor und ϕ ein Viererskalar sind, folgt, dass (k^μ) ein Vierervektor ist. Daher erhält man für die spezielle Lorentz-Transformation (25.18)

follows. Since (x^μ) is an arbitrary four-vector and ϕ is a four-scalar, it follows, that (k^μ) has to be a four-vector. Thus one obtains for the special Lorentz transformation (25.18)

$$\omega' = ck'^0 = c\gamma(k^0 - \beta k^3) = \gamma(\omega - \beta c k^3), \quad k'^1 = k^1, \quad k'^2 = k^2, \quad k'^3 = \gamma(k^3 - \beta\frac{\omega}{c}). \tag{25.35}$$

Ist der Winkel zwischen z-Achse und Ausbreitungsrichtung θ, so gilt $k^3 = \frac{\omega}{c}\cos\theta$ und es folgt

If the angle between z-axis and direction of propagation is θ, then $k^3 = \frac{\omega}{c}\cos\theta$ holds, and one obtains

$$\omega' = \omega\gamma(1 - \beta\cos\theta). \tag{25.36}$$

Ist daher $\mathbf{v}$ parallel beziehungsweise antiparallel zur Ausbreitungs-Richtung, so hat man die longitudinale Doppler-Verschiebung

Thus if $\mathbf{v}$ is parallel and antiparallel to the direction of propagation, resp., then one deals with the longitudinal Doppler shift

$$\theta = 0: \quad \omega' = \omega\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{25.37}$$

$$\theta = \pi: \quad \omega' = \omega\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}. \tag{25.38}$$

Ist dagegen $\theta = \pi/2$ beziehungsweise $\theta' = \pi/2$, so hat man die transversale Doppler-Verschiebung

If however $\theta = \pi/2$ and $\theta' = \pi/2$, resp., then one deals with the transverse Doppler shift.

$$\theta = \frac{\pi}{2}: \quad \omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{25.39}$$

$$\theta' = \frac{\pi}{2}: \quad \omega' = \omega\sqrt{1-\beta^2}. \tag{25.40}$$

Dabei ist θ' der Winkel zwischen der z′-Achse und der Ausbreitungsrichtung in S'.

Here θ' is the angle between the z′-axis and the direction of propagation in S'.

26 Relativistische Mechanik

26.a Lorentz-Kraftdichte

Die Kraftdichte lautet

$$\mathbf{k} = \rho\mathbf{E} + \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{j}\times\mathbf{B}, \tag{26.1}$$

also zum Beispiel für die erste Komponente

$$k^1 = \rho E_1 + \frac{1}{\mathrm{c}}(j^2B_3 - j^3B_2) = \frac{1}{\mathrm{c}}(j^0F^{10} - j^2F^{12} - j^3F^{13}) = \frac{1}{\mathrm{c}}j_\nu F^{1\nu}. \tag{26.2}$$

Man führt daher den Vierer-Vektor der Lorentz-Kraftdichte

$$k^\mu = \frac{1}{\mathrm{c}}j_\nu F^{\mu\nu} \tag{26.3}$$

ein. Wir betrachten die zeitartige Komponente

$$k^0 = \frac{1}{\mathrm{c}}j_\nu F^{0\nu} = \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}. \tag{26.4}$$

Während die raumartigen Komponenten die mechanische Impulsänderung pro Zeit- und Volumen-Einheit angeben, gibt die zeitartige Komponente die pro Zeit und Volumen zugeführte Energie an

$$(k^\mu) = (\frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}, \mathbf{k}). \tag{26.5}$$

26.b Lorentz-Kraft auf eine Punktladung

Die Vierer-Stromdichte am Ort $\mathbf{x}$ einer Punktladung q am Ort $\mathbf{x}_{\mathrm{q}}$ ist

$$j^\nu(\mathbf{x},t) = q\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{\mathrm{q}}(t))v^\nu. \tag{26.6}$$

Daher ist die auf die Punktladung wirkende Kraft gegeben durch

$$K^\mu = \frac{q}{\mathrm{c}}v_\nu F^{\mu\nu}. \tag{26.7}$$

Dies ist kein Vierer-Vektor, da (v^μ) kein Vierer-Vektor ist. Multiplizieren wir sie hingegen mit γ so erhält man einen Vierer-Vektor, die Minkowski-Kraft

$$\gamma K^\mu = \frac{q}{\mathrm{c}}u_\nu F^{\mu\nu}. \tag{26.8}$$

$\mathbf{K}$ ist der der Punktladung pro Zeiteinheit zugeführte Impuls, $\mathrm{c}K^0$ die der Punktladung pro Zeiteinheit zugeführte Energie. Die Minkowski-Kraft ist dann der pro Eigenzeit zugeführte Impuls beziehungsweise die pro Eigenzeit zugeführte Energie durch c.

26 Relativistic Mechanics

26.a Lorentz Force Density

The force density reads (26.1), that is e.g. for the first component (26.2).

Thus one introduces the four-vector of the force density (26.3). We consider the time-like component (26.4).

The time-like component gives the mechanical energy acquired per time and volume, whereas the space-like components give the rate of change of mechanic momentum per time and volume (26.5).

26.b Lorentz Force Acting on a Point Charge

The four-current-density at $\mathbf{x}$ of a point charge q at $\mathbf{x}_{\mathrm{q}}$ reads (26.6).

Thus the force acting on the point charge is given by (26.7).

This is not a four-vector, since (v^μ) is not a four-vector. If we multiply it by γ then we obtain a four-vector, the Minkowski force (26.8).

$\mathbf{K}$ is the momentum which is fed into the point charge per time unit, $\mathrm{c}K^0$ is the power fed into it. The Minkowski force is the momentum and the energy divided by c, resp., fed into it per proper time.

26.c Energie und Impuls eines Massenpunktes

Da Impulsänderung und Energieänderung durch c einen Vierervektor bilden, erwarten wir, dass auch mechanischer Impuls und Energie durch c einen Vierervektor bilden

26.c Energy and Momentum of a Mass Point

We assume that also mechanical momentum and energy/c combine to a four-vector, since the change of momentum and energy divided by c are components of a four-vector

$$(G^\mu) = (\frac{1}{c}E, \mathbf{G}). \tag{26.9}$$

Im Ruhesystem S' erwarten wir $\mathbf{G}' = \mathbf{0}$, das heißt

In the rest system S' we expect $\mathbf{G}' = \mathbf{0}$ to hold, that is

$$(G'^\mu) = (\frac{1}{c}E_0, \mathbf{0}). \tag{26.10}$$

Im System S ergibt sich mit der speziellen Transformation (23.23) für $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$

In the system S the special transformation (23.23) yields for $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$

$$\mathbf{G} = \gamma\tfrac{v}{c^2}E_0\mathbf{e}_z = \gamma\mathbf{v}\frac{E_0}{c^2}, \tag{26.11}$$

$$E = cG^0 = c\gamma G'^0 = \gamma E_0. \tag{26.12}$$

Für Geschwindigkeiten klein gegen die Lichtgeschwindigkeit folgt

For velocities small in comparison to light-velocity one obtains

$$\mathbf{G} = \frac{E_0}{c^2}\mathbf{v}\big(1 + \frac{v^2}{2c^2} + ...\big). \tag{26.13}$$

In der Newtonschen Mechanik haben wir

In Newton's mechanics we have

$$\mathbf{G}_{\text{Newton}} = m\mathbf{v} \tag{26.14}$$

für einen Massenpunkt der Masse m. Für Geschwindigkeiten $v \ll c$ sollte der Impuls der Newtonschen und der relativistischen Mechanik übereinstimmen. Daraus folgt

for a mass point of mass m. For velocities $v \ll c$ the momentum of Newton's and of the relativistic mechanics should agree. From this one obtains

$$m = \frac{E_0}{c^2} \to E_0 = mc^2, \quad \mathbf{G} = m\gamma\mathbf{v}. \tag{26.15}$$

Für die Energie E folgt dann

Then one obtains for the energy E

$$E = mc^2\gamma = mc^2 + \frac{m}{2}v^2 + O(v^4/c^2). \tag{26.16}$$

Man ordnet dem Teilchen eine Ruheenergie $E_0 = mc^2$ zu. Bei kleinen Geschwindigkeiten kommt dazu der aus der Newtonschen Mechanik bekannte Beitrag $\frac{m}{2}v^2$ hinzu. Damit gilt

One associates a rest energy $E_0 = mc^2$ with the masses. At small velocities the contribution $\frac{m}{2}v^2$ known from Newtonian mechanics has to be added

$$G^\mu = mu^\mu. \tag{26.17}$$

Wir beobachten noch

We finally observe

$$G^\mu G_\mu = m^2u^\mu u_\mu = m^2c^2, \tag{26.18}$$

woraus

from which one obtains

$$-\mathbf{G}^2 + \frac{1}{c^2}E^2 = m^2c^2, \quad E^2 = m^2c^4 + \mathbf{G}^2c^2 \tag{26.19}$$

folgt.

.

Solange die Teilchen erhalten bleiben, ist die Ruheenergie $E_0 = mc^2$ nicht beobachtbar. Bei der Umwandlung von Teilchen wird sie jedoch beobachtet, zum Beispiel beim Zerfall eines Teilchens in zwei andere

One does not observe the rest energy $E_0 = mc^2$ as long as the particles are conserved. However they are observed when the particles are converted, for example, when a particle decays into two other ones

$$\Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p^+. \tag{26.20}$$

Mit den Massen

With the masses

$$m_\Lambda = 2182 m_e, \quad m_\pi = 273 m_e, \quad m_p = 1836 m_e \tag{26.21}$$

folgt für das vor dem Zerfall ruhende Λ die Energie- und Impuls-Bilanz

one obtains the momentum and energy bilance for the Λ which is at rest before the decay

$$m_\Lambda c^2 = \sqrt{m_\pi^2 c^4 + \mathbf{G}_\pi^2 c^2} + \sqrt{m_p^2 c^4 + \mathbf{G}_p^2 c^2} \tag{26.22}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{G}_\pi + \mathbf{G}_p. \tag{26.23}$$

Die Lösung des Gleichungssystems ergibt

The solution of the system of equations yields

$$|\mathbf{G}| = 4c\sqrt{M(m_\Lambda - M)(M - m_\pi)(M - m_p)}/m_\Lambda, \quad 2M = m_\Lambda + m_\pi + m_p. \tag{26.24}$$

Mit Hilfe der Vierervektoren kann man aus

By means of the four-vectors one may solve

$$G_\Lambda{}^\mu = G_\pi{}^\mu + G_p{}^\mu \tag{26.25}$$

nach G_p auflösen und quadrieren

with respect to G_p and take the square

$$G_p{}^\mu G_{p\mu} = (G_\Lambda^\mu - G_\pi^\mu)(G_{\Lambda\mu} - G_{\pi\mu}) = G_\Lambda^\mu G_{\Lambda\mu} + G_\pi^\mu G_{\pi\mu} - 2G_\Lambda^\mu G_{\pi\mu}. \tag{26.26}$$

Dies ergibt

This yields

$$m_p^2 c^2 = m_\Lambda^2 c^2 + m_\pi^2 c^2 - 2m_\Lambda E_\pi \tag{26.27}$$

und damit

and therefore

$$E_\pi = \frac{c^2}{2m_\Lambda}\left(m_\Lambda^2 + m_\pi^2 - m_p^2\right) \tag{26.28}$$

und analog

and analogously

$$E_p = \frac{c^2}{2m_\Lambda}\left(m_\Lambda^2 - m_\pi^2 + m_p^2\right). \tag{26.29}$$

26.d Bewegungsgleichung

26.d Equation of Motion

Wir schreiben nun noch explizit die Bewegungsgleichung für Massenpunkte auf

Finally we write down explicitely the equations of motion for point masses

$$\frac{dG^\mu}{dt} = K^\mu. \tag{26.30}$$

Wie wir früher schon bemerkten, ist die Gleichung nicht manifest Lorentz-invariant. Wir haben jedoch

As mentioned before these equations are not manifestly Lorentz-invariant. We have, however,

$$\frac{dG^\mu}{d\tau} = \frac{dG^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{dG^\mu}{dt} = \gamma K^\mu, \tag{26.31}$$

wobei die rechte Seite wieder die Minkowski-Kraft ist. In dieser Form ist die Bewegungsgleichung manifest Lorentz-invariant.

Falls eine Kraft die Ruheenergie eines Teilchens nicht ändert, so folgt aus

where the right-hand side is the Minkowski force. In this form the equations of motion are manifestly Lorentz invariant.

If the force does not change the rest energy of a particle, one obtains from

$$G^\mu G_\mu = m^2 \mathrm{c}^2 \to \frac{d}{d\tau}(G^\mu G_\mu) = 0 \to G^\mu \gamma K_\mu = 0 \to u^\mu K_\mu = 0. \tag{26.32}$$

Die Kraft ist orthogonal zur Weltgeschwindigkeit. Als Beispiel dient die Lorentz-Kraft

The force is orthogonal on the world velocity. An example is the Lorentz force

$$u_\mu K^\mu = \frac{q}{\mathrm{c}} \gamma v_\mu v_\nu F^{\mu\nu} = 0, \tag{26.33}$$

da $F^{\mu\nu}$ antisymmetrisch ist. Wir beobachten

since $F^{\mu\nu}$ is antisymmetric. We observe

$$v^\mu K_\mu = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{K} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{c}} \frac{dE}{dt} = 0. \tag{26.34}$$

Die Gleichung (26.32) ist also äquivalent zu

Thus equation (26.32) is equivalent to

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{K}, \tag{26.35}$$

die die der Masse zugeführte Leistung angibt.

which yields the power fed into the kinetic energy of the mass.

27 Lagrange-Formulierung

27 Lagrangian Formulation

27.a Lagrange-Funktion einer massiven Ladung im elektromagnetischen Feld

27.a Lagrangian of a Massive Charge in the Electromagnetic Field

Wir behaupten, die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ einer Punktladung q der Masse m im elektromagnetischen Feld kann geschrieben werden als

We claim, that the Lagrangian $\mathcal{L}$ of a point charge q of mass m in an electromagnetic field can be written

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}} - q\Phi(\mathbf{r},t) + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\cdot\dot{\mathbf{r}}. \tag{27.1}$$

Die Wirkung I kann dann

Then the action I can be written

$$I = \int dt\mathcal{L} = -mc^2\int d\tau - \frac{q}{c}\int dt A^\mu \frac{dx_\mu}{dt} = \int d\tau(-mc^2 - \frac{q}{c}A^\mu u_\mu), \tag{27.2}$$

das heißt als Vierer-Skalar geschrieben werden.

that is as a four-scalar.

Wir überzeugen uns nun, dass hieraus die korrekten Bewegungsgleichungen folgen. Die Bewegungs-Gleichung lautet

Now we show, that this Lagrangian yields the correct equations of motion

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_\alpha} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\alpha} = 0, \tag{27.3}$$

woraus mit

from which by use of

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_\alpha} = \frac{m\dot{x}^\alpha}{\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}}} + \frac{q}{c}A^\alpha(\mathbf{r}(t),t) = G^\alpha + \frac{q}{c}A^\alpha \tag{27.4}$$

dann

one finally obtains

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G} + \frac{q}{c}\dot{\mathbf{A}} + \frac{q}{c}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} + q\nabla\Phi - \frac{q}{c}\nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) = 0 \tag{27.5}$$

folgt. Man beachte, dass in $\dot{\mathbf{A}}$ nur die partielle Zeit-Ableitung von $\mathbf{A}$ steckt, daher haben wir $d\mathbf{A}/dt = \dot{\mathbf{A}} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}$. Durch geeignetes Zusammenfassen der Beiträge folgt

. Note that $\dot{\mathbf{A}}$ contains only the partial time-derivative of $\mathbf{A}$, thus we have $d\mathbf{A}/dt = \dot{\mathbf{A}} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}$. By suitable combination of the contributions one obtains

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G} + q(\nabla\Phi + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}) - \frac{q}{c}\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A}) = 0 \tag{27.6}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G} - q\mathbf{E} - \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} = 0. \tag{27.7}$$

Also liefert die obige Lagrange-Funktion tatsächlich die korrekte Bewegungsgleichung.

Thus the Lagrangian given above yields the correct equation of motion.

27.b Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes

27.b Lagrangian Density of the Electromagnetic Field

Die Lagrange-Dichte L des elektromagnetischen Feldes eines Systems von Ladungen setzt sich aus drei Anteilen zusammen

The Lagrangian density L of the electromagnetic field of a system of charges consists of three contributions

$$L = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{c}A^\mu j_\mu + L_{\text{mech}}. \tag{27.8}$$

Der mechanische Anteil ist für Punktladungen der Masse m_i

The mechanical part for point charges of mass m_i reads

$$L_{\rm mech} = -\sum_i m_i {\rm c}^3 \int d\tau \delta^4(x - x_i(\tau)), \tag{27.9}$$

der nach Integration über d^4x den entsprechenden Anteil der Wirkung I in (27.1) ergibt. Der zweite Anteil in (27.8) beschreibt die Wechselwirkung zwischen dem Feld und der Ladung. Integration dieses Anteils für Punktladungen unter Verwendung von

which yields after integration over d^4x the corresponding contribution to the action I given in (27.1). The second contribution in (27.8) describes the interaction between field and charge. Integration of this contribution for point charges using

$$j_\mu(\mathbf{r},t) = \sum_i q_i \frac{dx_{i,\mu}}{dt} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \tag{27.10}$$

ergibt den entsprechenden Anteil in (27.1). Der erste Anteil ist der Beitrag des freien Feldes. Dass er die korrekten Maxwell-Gleichungen ergibt, werden wir unten nachprüfen. Die Wirkung selbst ergibt sich zu

yields the corresponding contribution in (27.1). The first contribution is that of the free field. Below we will see, that it yields Maxwell's equations correctly. The action itself reads

$$I = \frac{1}{\rm c}\int d^4x L(x) = \int dt \int d^3x L(\mathbf{x},t) = \int dt \mathcal{L}(t), \quad \mathcal{L}(t) = \int d^3x L(\mathbf{x},t). \tag{27.11}$$

Die Wirkung muss nun extremal unter Variation der Felder A sein. Dabei betrachten wir F als Funktion von A (25.3), $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Dann ergibt die Variation bezüglich A

The action has to be extremal if the fields A are varied. There we have to consider F as function of A (25.3), $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Then the variation with respect to A yields

$$\begin{aligned}
\delta L &= -\frac{1}{8\pi} F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} - \frac{1}{\rm c} j_\nu \delta A^\nu && (27.12)\\
\delta F^{\mu\nu} &= \delta(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu && (27.13)\\
F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} &= F_{\mu\nu}\partial^\mu\delta A^\nu - F_{\mu\nu}\partial^\nu \delta A^\mu = 2F_{\mu\nu}\partial^\mu \delta A^\nu && (27.14)\\
\delta L &= -\frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu}\partial^\mu \delta A^\nu - \frac{1}{\rm c} j_\nu \delta A^\nu. && (27.15)
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Variation der Wirkung nach A

Thus the variation of the action with respect to A is

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int d^4x \big(-\frac{1}{4\pi {\rm c}} F_{\mu\nu}\partial^\mu \delta A^\nu - \frac{1}{{\rm c}^2} j_\nu \delta A^\nu\big)\\
&= -\int d^4x \frac{1}{4\pi {\rm c}} \partial^\mu (F_{\mu\nu}\delta A^\nu) + \int d^4x \big(\frac{1}{4\pi {\rm c}}\partial^\mu F_{\mu\nu} - \frac{1}{{\rm c}^2} j_\nu\big)\delta A^\nu. && (27.16)
\end{aligned}$$

Der erste Term der zweiten Zeile ist ein Oberflächen-Term (im vier-dimensionalen Raum). Aus dem zweiten Term folgen die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (25.7)

The first term of the second line is a surface-term (in four dimensions). From the second term one concludes Maxwell's inhomogeneous equations (25.7)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{\rm c} j^\nu. \tag{27.17}$$

Die homogenen Maxwell-Gleichungen sind bereits durch die Darstellung $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\nu$ erfüllt.

Maxwell's homogeneous equations are already fulfilled due to the representation $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\nu$.

Generell erhält man für eine Lagrange-Dichte, die von einem Feld (A^μ) und deren Ableitungen abhängt, durch Variation

Generally one obtains for a Lagrangian density, which depends on a field (A^μ) and its derivatives by variation

$$\mathrm{c}\delta I = \int d^4x \delta L(x)$$

$$= \int d^4x \left(\frac{\delta L}{\delta A^\nu(x)} \delta A^\nu(x) + \frac{\delta L}{\delta \partial^\mu A^\nu(x)} \partial^\mu \delta A^\nu(x) \right)$$

$$= \int d^4x \partial^\mu \left(\frac{\delta L}{\delta \partial^\mu A^\nu(x)} \delta A^\nu(x) \right) + \int d^4x \left(\frac{\delta L}{\delta A^\nu(x)} - \partial^\mu \left(\frac{\delta L}{\delta \partial^\mu A^\nu(x)} \right) \right) \delta A^\nu(x). \quad (27.18)$$

Es ist üblich, die partiellen Ableitungen von L nach A beziehungsweise ∂A mit $\delta L/\delta...$ zu bezeichnen. Da die Variation verschwinden muss, folgen allgemein die Bewegungsgleichungen

Usually one denotes the partial derivatives of L with respect to A and ∂A by $\delta L/\delta....$ Since the variation has to vanish, one obtains in general the equations of motion

$$\partial^\mu \left(\frac{\delta L}{\delta \partial^\mu A^\nu(x)} \right) - \frac{\delta L}{\delta A^\nu(x)} = 0. \quad (27.19)$$

Dies ist die Verallgemeinerung der Lagrangeschen Bewegungsgleichung (27.3) auf Felder. Neben der Zeitableitung von $\delta L/\delta \dot{A}^\nu$ treten auch die räumlichen Ableitungen von $\delta L/\delta \nabla A^\nu$ auf.

This is the generalization of Lagrange's equations of motion (27.3) for fields. There appear derivatives of $\delta L/\delta \nabla A^\nu$ with respect to the space variables besides the time-derivatives of $\delta L/\delta \dot{A}^\nu$.

28 Energie-Impuls-Tensor und Erhaltungsgrößen

28 Energy Momentum Tensor and Conserved Quantities

28.a Der Tensor

28.a The Tensor

Im Abschnitt 15.b hatten wir aus der Dichte der Lorentz-Kraft einen Erhaltungssatz für den Impuls des elektromagnetischen Feldes "im Vakuum", das heißt ohne Berücksichtigung zusätzlicher Beiträge in Materie hergeleitet

In section 15.b we have calculated the conservation law for momentum from the density of the Lorentz-force in vacuo that is without considering additional contributions due to matter

$$-\mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}_{\mathrm{s}} - \frac{\partial}{\partial x^\beta}T^{\alpha\beta}\mathbf{e}^\alpha, \tag{28.1}$$

$$\mathbf{g}_{\mathrm{s}} = \frac{1}{4\pi \mathrm{c}}\mathbf{E}\times\mathbf{B}, \tag{28.2}$$

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\big(E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta\big) - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{8\pi}\big(E^2+B^2\big). \tag{28.3}$$

Als nullte Komponente müssen wir die Energiedichte betrachten. Für diese hatten wir in Abschnitt 15.a gefunden

The zeroth component is the energy-density. For this density we have obtainded in section 15.a

$$-k^0 = -\frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{\mathrm{c}}\operatorname{div}\mathbf{S} + \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{u} \tag{28.4}$$

$$\mathbf{S} = \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B} \tag{28.5}$$

$$u = \frac{1}{8\pi}\big(E^2+B^2\big). \tag{28.6}$$

Wir fassen zusammen

We summarize

$$-k^\mu = -\partial_\nu T^{\mu\nu} \tag{28.7}$$

mit dem elektromagnetischen Energie-Impuls-Tensor

with the electromagnetic energy-momentum tensor

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -u & -\frac{1}{\mathrm{c}}S_1 & -\frac{1}{\mathrm{c}}S_2 & -\frac{1}{\mathrm{c}}S_3 \\ -\mathrm{c}g_{\mathrm{s}1} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ -\mathrm{c}g_{\mathrm{s}2} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ -\mathrm{c}g_{\mathrm{s}3} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}. \tag{28.8}$$

Man beobachtet, dass $T^{\mu\nu}$ symmetrisch ist, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, da $T_{\alpha\beta}$ symmetrisch ist und $\mathrm{c}\mathbf{g}_{\mathrm{s}} = \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ gilt. Man prüft leicht nach, dass

One observes, that $T^{\mu\nu}$ is symmetric, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, since $T_{\alpha\beta}$ is symmetric and $\mathrm{c}\mathbf{g}_{\mathrm{s}} = \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ holds. One easily checks, that

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\big(-F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^\kappa{}_\lambda F^\lambda{}_\kappa\big) \tag{28.9}$$

gilt, entweder durch explizites Auswerten und Vergleich oder aus

holds either by explicit calculation and comparison or from

$$k^\mu = \frac{1}{\mathrm{c}}j_\lambda F^{\mu\lambda} = \frac{1}{4\pi}(\partial^\nu F_{\nu\lambda})F^{\mu\lambda} = \frac{1}{4\pi}\partial^\nu(F_{\nu\lambda}F^{\mu\lambda}) - \frac{1}{4\pi}F_{\nu\lambda}\partial^\nu F^{\mu\lambda}. \tag{28.10}$$

Nun folgt aus

From

$$F_{\nu\lambda}\big(\partial^\nu F^{\mu\lambda} + \partial^\mu F^{\lambda\nu} + \partial^\lambda F^{\nu\mu}\big) = 0 \tag{28.11}$$

die Beziehung

one obtains the relation

$$\frac{1}{2}\partial^\mu\big(F_{\nu\lambda}F^{\lambda\nu}\big) + 2F_{\nu\lambda}\partial^\nu F^{\mu\lambda} = 0, \tag{28.12}$$

so dass wir schließlich

so that finally we obtain

$$\begin{aligned} k^\mu &= \frac{1}{4\pi}\partial^\nu\big(F_{\nu\lambda}F^{\mu\lambda}\big) + \frac{1}{16\pi}\partial^\mu\big(F_{\nu\lambda}F^{\lambda\nu}\big) \\ &= \frac{1}{4\pi}\partial_\nu\big(- F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^\kappa{}_\lambda F^\lambda{}_\kappa\big) \end{aligned} \tag{28.13}$$

erhalten. $T^{\mu\nu}$ ist ein Vierer-Tensor, das heißt er transformiert sich gemäß

. $T^{\mu\nu}$ is a four-tensor, i.e. it transforms according to

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\kappa\Lambda^\nu{}_\lambda T^{\kappa\lambda}. \tag{28.14}$$

28.b Erhaltungssätze

Wir gehen aus von einem Vierervektorfeld $(j^\mu(x))$. In jedem dreidimensionalen raumartigen Unterraum R des vierdimensionalen Raums sei (j^μ) nur in einem endlichen Bereich von Null verschieden. Mit raumartig bezeichnen wir einen Raum, wenn je zwei Punkte des Raumes einen raumartigen Abstand haben. Eine Weltlinie, das heißt eine Linie, die überall Unterlichtgeschwindigkeit hat, durchstößt einen raumartigen Unterraum in genau einem Punkt. Trägt man den Unterraum als $x^0(\mathbf{r})$ auf, so ist die Steigung stets kleiner 1. Für die Weltlinie ist die Steigung dagegen überall größer 1. Die Punkte konstanter Zeit eines Inertialsystems bilden zum Beispiel einen raumartigen Raum. Wir integrieren nun die Divergenz $\partial_\mu j^\mu$ über das vierdimensionale Volumen Ω, das von zwei raumartigen Räumen R und R' begrenzt wird und erhalten

28.b Conservation Laws

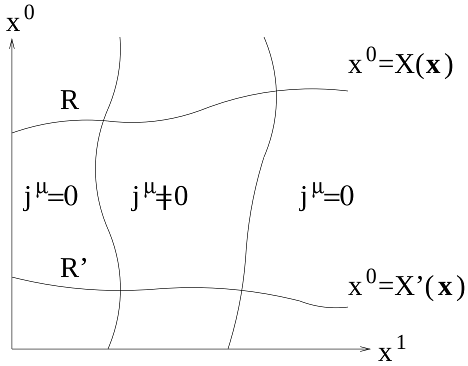
We start out from a four-vector field $(j^\mu(x)$. In any three-dimensional space-like subspace R of the four-dimensional space be (j^μ) different from zero only in a finite region. We call a space space-like if any two points in this space have a space-like distance. A world-line, that is a line which everywhere has a velocity below light-speed hits a space-like subspace in exactly one point. If one plots the subspace as a function $x^0(\mathbf{r})$ then its slope is everywhere less then 1. The slope of the world-line is everywhere larger than 1. For example, the points of constant time in an inertial frame constitute such a space-like space. We now integrate the divergence $\partial_\mu j^\mu$ over the four-dimensional volume Ω, which is bounded by two space-like spaces R and R' and obtain

$$\int_\Omega d^4x\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = \int_R d^3x\big(j^0 - \frac{\partial X}{\partial x^\alpha}j^\alpha\big) - \int_{R'} d^3x\big(j^0 - \frac{\partial X'}{\partial x^\alpha}j^\alpha\big). \tag{28.15}$$

Den Beitrag $\partial_\mu j^\mu$ integriert man einfach in x^μ-Richtung bis zur Begrenzung R beziehungsweise R' oder bis j^μ verschwindet. Für die 0-Komponente ergibt das unmittelbar den angegebenen Beitrag. Für die 1-Komponente bleibt zunächst das Integral $\pm\int dx^0dx^2dx^3j^1$ an der Berandung.

The contribution $\partial_\mu j^\mu$ is integrated in x^μ-direction until the boundary R or R' or until j^μ vanishes. This yields immediately the contribution given for the 0-component. For the 1-component one obtains initially the integral $\pm\int dx^0dx^2dx^3j^1$ at the boundary.

Die dx^0-Integration lässt sich aber in eine $dx^1 \frac{\partial X}{\partial x^1}$-Integration umformen. Wächst (fällt) $X = x^0$ auf der Berandung mit x^1, so handelt es sich um die untere (obere) Grenze der Integration. Daher das Minus-Zeichen vor $\frac{\partial X}{\partial x^1}$. Entsprechendes gilt für die anderen Raumkomponenten.



The dx^0-integration may be transformed into an $dx^1 \frac{\partial X}{\partial x^1}$-integration. If $X = x^0$ increases (decreases) at the boundary with x^1, then this is the lower (upper) limit of the integration. Thus we have a minus-sign in front of $\frac{\partial X}{\partial x^1}$, similarly for the other space-components.

Wir können uns auch noch davon überzeugen, dass

We may convince ourselves that

$$\int_R d^3x \big(j^0 - \frac{\partial X}{\partial x^\alpha} j^\alpha\big) = \int_R dV_\mu j^\mu \tag{28.16}$$

mit $(dV_\mu) = (1, -\nabla X) d^3x$ ein Viererskalar ist. Führen wir nämlich einen Vierervektor $(\bar{j}^\mu)$ so ein, dass

with $(dV_\mu) = (1, -\nabla X) d^3x$ is a four-scalar. If we introduce a four-vector $(\bar{j}^\mu)$, so that

$$\bar{j}^\mu = \begin{cases} j^\mu & \text{in } R \\ 0 & \text{in } R' \end{cases}, \tag{28.17}$$

so folgt

then it follows that

$$\int_R dV_\mu j^\mu = \int_R dV_\mu \bar{j}^\mu = \int_\Omega d^4x \frac{\partial \bar{j}^\mu}{\partial x^\mu}, \tag{28.18}$$

wobei letzteres Integral offensichtlich ein Viererskalar ist, da sowohl d^4x wie auch die Vierer-Divergenz von $\bar{j}$ ein Viererskalar ist. Da aber das Feld (j^μ) beliebig ist, gilt für jedes infinitesimale (dV_μ) aus R, dass $dV_\mu j^\mu$ ein Viererskalar ist. Da (j^μ) Vierervektor ist, muss auch (dV^μ) Vierervektor sein. Damit können wir (28.16) schreiben als

where the last integral is obviously a four-scalar, since both d^4x and the four-divergence of $\bar{j}$ is a four-scalar. Since the field (j^μ) is arbitrary, we find that $dV_\mu j^\mu$ has to be a four-scalar for each infinitesimal (dV_μ) in R. Since (j^μ) is a four-vector, (dV^μ) must be a four-vector, too. Then (28.16) reads

$$\int_\Omega d^4x \partial_\mu j^\mu = \int_R dV_\mu j^\mu - \int_{R'} dV_\mu j^\mu. \tag{28.19}$$

Dies ist der Gaußsche Satz in vier Dimensionen.

This is the divergence theorem in four dimensions.

Wir ziehen nun Folgerungen daraus:

From this we conclude:

28.b.α Ladung

(j^μ) sei der Viererstrom der Ladungsdichte. Aus der Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ folgt für jedes raumartige R der gleiche Wert

28.b.α Charge

(j^μ) be the four-vector of the current density. One obtains from the equation of continuity $\partial_\mu j^\mu = 0$ for each space-like R the same result

$$q = \int_R dV_\mu j^\mu \tag{28.20}$$

für die Ladung, da das Integral der Divergenz über Ω in (28.19) verschwindet (da der Integrand verschwindet), und da man immer das gleiche R' wählen kann. Die Ladung ist daher eine Erhaltungsgröße, genauer gesagt haben wir konsistentes Verhalten gefunden, denn wir haben bereits in Unterabschnitt 24.c angenommen, dass die Ladung erhalten ist. Neu ist, dass ihre Bestimmung in einem beliebigen dreidimensionalen Unterraum möglich ist.

for the charge, since the integral of the divergence in Ω in (28.19) vanishes, (since the integrand vanishes) and since one may always choose the same R'. Thus the charge is a conserved quantity, more precisely we have found a consistent behaviour, since we already have assumed in subsection 24.c that charge is conserved. New is, that it can be determined in an arbitrary space-like three-dimensional space.

28.b.β Energie und Impuls

28.b.β Energy and Momentum

Aus

From

$$k^\mu = \partial_\nu T^{\mu\nu} \tag{28.21}$$

folgt

one obtains

$$\int_\Omega d^4x k^\mu = \int_R dV_\nu T^{\mu\nu} - \int_{R'} dV_\nu T^{\mu\nu}. \tag{28.22}$$

In einem ladungsfreien Raum ($k^\mu = 0$), das heißt für freie elektromagnetische Wellen gilt dann, dass die Komponenten des Strahlungs-Impulses

In a charge-free space ($k^\mu = 0$), that is for free electromagnetic waves one finds, that the components of the momentum of radiation

$$G_{\mathrm{s}}^\mu = -\frac{1}{\mathrm{c}} \int_R dV_\nu T^{\mu\nu} \tag{28.23}$$

unabhängig von R sind. Sie sind also erhalten. Es sei nun (b_μ) ein beliebiger konstanter Vierervektor. Dann ist $b_\mu T^{\mu\nu}$ ein Vierervektor und $\partial_\nu(b_\mu T^{\mu\nu}) = 0$. Damit wird dann $b_\mu G_{\mathrm{s}}^\mu$ zum Viererskalar und G_{s}^μ ist ein Vierervektor.

are independent of R. Thus they are conserved. Now be (b_μ) an arbitrary but constant four-vector. Then $b_\mu T^{\mu\nu}$ is a four-vector and $\partial_\nu(b_\mu T^{\mu\nu}) = 0$. Then $b_\mu G_{\mathrm{s}}^\mu$ is a four-scalar and G_{s}^μ is a four-vector.

Sind nun im Vierervolumen Ω Ladungen, so gilt

If there are charges in the four-volume Ω, then one obtains.

$$G_{\mathrm{s}}^\mu(R) = -\frac{1}{\mathrm{c}} \int_\Omega d^4x k^\mu + G_{\mathrm{s}}^\mu(R'). \tag{28.24}$$

Für Punktladungen q_i hat man (26.7, 26.30)

For point-charges q_i one has (26.7, 26.30)

$$\frac{1}{\mathrm{c}} \int d^4x k^\mu = \sum_i \int dt K_i^\mu = \sum_i \int dt \dot{G}_i^\mu = G_i^\mu(R) - G_i^\mu(R'). \tag{28.25}$$

Dabei ist $G_i^\mu(R) = m_i u_i^\mu(R)$ der Vierer-Impuls der Ladung $\#i$ an der Stelle, an der die Weltlinie der Ladung den Unterraum R durchstößt. Damit ist

Here $G_i^\mu(R) = m_i u_i^\mu(R)$ is the four-momentum of the charge $\#i$ at the point where its worldline hits the three-dimensional space R. Then

$$G^\mu = G_{\mathrm{s}}^\mu(R) + \sum_i G_i^\mu(R) \tag{28.26}$$

der erhaltene Vierer-Impuls.

is the conserved four-momentum.

28.b.γ Drehimpuls und Schwerpunktsbewegung

28.b.γ Angular Momentum and Center of Mass

Aus (28.7) folgt

Eq. (28.7) yields

$$\partial_\nu\big(x^\lambda T^{\mu\nu} - x^\mu T^{\lambda\nu}\big) = x^\lambda k^\mu - x^\mu k^\lambda + T^{\mu\lambda} - T^{\lambda\mu}. \tag{28.27}$$

Da der Tensor T symmetrisch ist, kürzen sich die beiden letzten Terme weg. Wir führen den Tensor

Since the tensor T is symmetric, the last two terms cancel. We introduce the tensor

$$M_{\rm s}^{\lambda\mu}(R) = -\frac{1}{\rm c}\int_R dV_\nu (x^\lambda T^{\mu\nu} - x^\mu T^{\lambda\nu}) \tag{28.28}$$

ein. Er ist antisymmetrisch $M_{\rm s}^{\lambda\mu} = -M_{\rm s}^{\mu\lambda}$. Auf Grund von (28.19) gilt

. It is antisymmetric $M_{\rm s}^{\lambda\mu} = -M_{\rm s}^{\mu\lambda}$. Due to (28.19) one has

$$M_{\rm s}^{\lambda\mu}(R) = -\frac{1}{\rm c}\int_\Omega d^4x\big(x^\lambda k^\mu - x^\mu k^\lambda\big) + M_{\rm s}^{\lambda\mu}(R'). \tag{28.29}$$

Für Punktladungen erhält man

For point-charges one obtains

$$\frac{1}{\rm c}\int_\Omega d^4x\big(x^\lambda k^\mu - x^\mu k^\lambda\big) = \sum_i \int dt\big(x_i^\lambda K_i^\mu - x_i^\mu K_i^\lambda\big) = \sum_i \int dt \frac{d}{dt}\big(x_i^\lambda G_i^\mu - x_i^\mu G_i^\lambda\big), \tag{28.30}$$

da $\dot{x}^\lambda G^\mu = \dot{x}^\mu G^\lambda$. Daher ist

since $\dot{x}^\lambda G^\mu = \dot{x}^\mu G^\lambda$. Therefore

$$M^{\lambda\mu}(R) = M_{\rm s}^{\lambda\mu}(R) + M_{\rm m}^{\lambda\mu}(R) \tag{28.31}$$

mit dem mechanischen Anteil

including the mechanical contribution

$$M_{\rm m}^{\lambda\mu}(R) = \sum_i \big(x_i^\lambda G_i^\mu - x_i^\mu G_i^\lambda\big)\big|_R \tag{28.32}$$

eine Erhaltungsgröße, das heißt $M^{\lambda\mu}(R)$ ist unabhängig von der Wahl von R. Zugleich ist $(M^{\lambda\mu})$ ein Vierertensor.

is a conserved quantity, that is $M^{\lambda\mu}(R)$ is independent of the choice of R. Simultaneously $(M^{\lambda\mu})$ is a four-tensor.

Es bleibt noch die Bedeutung von M zu bestimmen. Hierzu betrachten wir M in dem dreidimensionalen Raum R, der durch die konstante Zeit t im Inertialsystem S gegeben ist. Wir haben dann

Finally we have to determine the meaning of M. For this purpose we consider M in the three-dimensional space R given by constant time t for a system of inertia S. Then we have

$$M^{\lambda\mu} = -\frac{1}{\rm c}\int d^3x\big(x^\lambda T^{\mu 0} - x^\mu T^{\lambda 0}\big) + \sum_i \big(x_i^\lambda G_i^\mu - x_i^\mu G_i^\lambda\big) \tag{28.33}$$

Wir betrachten zunächst die raumartigen Komponenten

First we consider the space-like components

$$M^{\alpha\beta} = \int d^3x\big(x^\alpha g_{\rm s}^\beta - x^\beta g_{\rm s}^\alpha\big) + \sum_i \big(x_i^\alpha G_i^\beta - x_i^\beta G_i^\alpha\big). \tag{28.34}$$

Dies ist für $\alpha \neq \beta$ eine Komponente des Drehimpulses $\mathbf{L}$, nämlich $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}L_\gamma$. Wir haben damit die Erhaltung des Drehimpulses gefunden.

This is for $\alpha \neq \beta$ a component of the angular momentum $\mathbf{L}$, namely $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}L_\gamma$. Thus we have found the conservation of angular momentum.

Ist eine Komponente zeitartig, so erhält man

If one component is time-like then one finds

$$M^{0\alpha} = {\rm c}t\Big(\int d^3x g_s^\alpha + \sum_i G_i^\alpha\Big) - \frac{1}{\rm c}\Big(\int d^3x x^\alpha u + \sum_i x_i^\alpha E_i\Big). \tag{28.35}$$

Der erste Beitrag stellt ct multipliziert mit dem Gesamtimpuls dar. Der zweite Beitrag ist die Summe aller Energien dividiert durch c multipliziert mit der Ortskoordinate x^α. Man kann diesen zweiten Beitrag als den Energie-Schwerpunkt (tatsächlich die α-Komponente davon) multipliziert mit der Gesamtenergie dividiert durch c auffassen. Da Gesamtimpuls und Energie konstant sind, heißt das, dass sich der Energie-Schwerpunkt mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathrm{c}^2 \frac{\text{Gesamtimpuls}}{\text{Gesamtenergie}}$ bewegt. Für nichtrelativistische Geschwindigkeiten reduziert sich der mechanische Anteil auf

The first contribution is ct multiplied by the total momentum. The second contribution is the sum of all energies times their space-coordinates x^α divided by c. This second contribution can be considered as the center of energy (actually its α-component) multiplied by the total energy divided by c. Since total momentum and total energy are constant, one concludes, that the center of energy moves with the constant velocity $\mathrm{c}^2 \frac{\text{total momentum}}{\text{total energy}}$. For non-relativistic velocities the mechanical part of the energy reduces to

$$M_{\mathrm{m}}^{0\alpha} = \mathrm{c}\left(t \sum_i G_i^\alpha - \sum_i m_i x_i^\alpha\right). \tag{28.36}$$

Die Erhaltung dieser Größe beinhaltet die gleichförmige Bewegung des Massenschwerpunkts mit der Geschwindigkeit Gesamtimpuls durch Gesamtmasse. Relativistisch geht das in die gleichförmige Bewegung des Energieschwerpunktes über. Die Lorentz-Invarianz verknüpft diese Erhaltung mit der Erhaltung des Drehimpulses zur Erhaltung des antisymmetrischen Tensors M.

Then the conservation of this quantity comprises the uniform movement of the center of mass with the velocity total momentum divided by total mass. In the theory of relativity this transforms into a uniform moving center of energy. Lorentz-invariance combines this conservation with the conservation of angular momentum to the antisymmetric tensor M.

29 Feld einer beliebig bewegten Punktladung

29 Field of an arbitrarily Moving Point-Charge

29.a Liénard-Wiechert-Potential

29.a Liénard-Wiechert Potential

Wir bestimmen zunächst das Potential am Punkt (x^μ) einer Punktladung q, die sich auf einer Weltlinie $\mathbf{r}_\mathrm{q}(t)$ bewegt. Ihre Viererstromdichte ist

First we determine the potential at a point (x^μ) of a point-charge q which moves along a world-line $\mathbf{r}_\mathrm{q}(t)$. Its four-current density reads

$$j^\mu(x') = qv^\mu\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{r}_\mathrm{q}(t)), \quad v^\mu = (\mathrm{c}, \dot{\mathbf{r}}_\mathrm{q}(t)). \tag{29.1}$$

Das Viererpotential ergibt sich dann nach (24.29) zu

According to (24.29) the four-potential reads

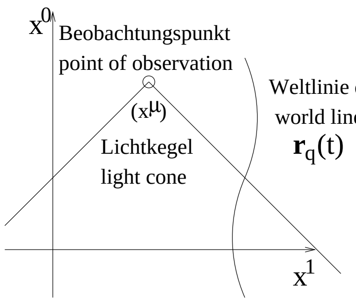
$$A^\mu(x) = \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^4x' j^\mu(x')\delta(\frac{1}{2}s^2)\theta(t-t') = q\int dt' v^\mu(t')\delta(\frac{1}{2}s^2)\theta(t-t') \tag{29.2}$$

mit

with

$$s^2 = a^\nu a_\nu, \quad a^\nu = x^\nu - x^\nu_\mathrm{q}(t'). \tag{29.3}$$

(a^ν) ist eine Funktion von (x^ν) und t'. Das Differential von $\frac{1}{2}s^2$ ergibt sich zu



(a^ν) is a function of (x^ν) and t'. The differential of $\frac{1}{2}s^2$ is given by

$$d(\frac{1}{2}s^2) = a_\nu da^\nu = a_\nu dx^\nu - a_\nu v^\nu dt'. \tag{29.4}$$

Damit erhält man das retardierte Liénard-Wiechert-Potential

Thus one obtains the Liénard-Wiechert potential

$$A^\mu(x) = qv^\mu(t')\frac{1}{|\frac{\partial\frac{1}{2}s^2}{\partial t'}|} = \left.\frac{qv^\mu}{a_\nu v^\nu}\right|_\mathrm{r} = \left.\frac{qu^\mu}{a_\nu u^\nu}\right|_\mathrm{r}. \tag{29.5}$$

Dabei sind die beiden Ausdrücke mit dem Index $_\mathrm{r}$ zu der Zeit t' auszuwerten, zu der $s^2 = 0$ und $t > t'$.

Here the two expressions with the index $_\mathrm{r}$ are to be evaluated at the time t' at which $s^2 = 0$ and $t > t'$.

Wir beachten, dass $a_\nu v^\nu = a\mathrm{c} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{v} > 0$, da $a = \mathrm{c}(t-t') = |\mathbf{a}|$. Im momentanen Ruhesystem der Ladung ist $a_\nu u^\nu/\mathrm{c}$ der Abstand zwischen Beobachtungspunkt und Ladung.

We note, that $a_\nu v^\nu = a\mathrm{c} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{v} > 0$, since $a = \mathrm{c}(t-t') = |\mathbf{a}|$. $a_\nu u^\nu/\mathrm{c}$ is the distance between point of observation and charge in the momentary rest system of the charge.

29.b Die Felder

29.b The Fields

Aus den Potentialen berechnen wir nun die Felder

Starting from the potentials we calculate the fields

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{29.6}$$

Hierzu müssen wir die Ableitungen von v, a und t' bilden

In order to do this we have to determine the derivatives of v, a and t'

$$\partial^\mu v^\nu = \frac{\partial v^\nu}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x_\mu} \tag{29.7}$$

$$\partial^\mu a^\nu = \partial^\mu(x^\nu - x_{\mathrm{q}}^\nu(t')) = g^{\mu\nu} - v^\nu \frac{\partial t'}{\partial x_\mu} \tag{29.8}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial x_\mu} = \frac{a^\mu}{(a\cdot v)}, \tag{29.9}$$

wobei der letzte Ausdruck wegen $s^2 = 0$ aus (29.4) gewonnen wurde. Hier und im Folgenden verwenden wir

where the last expression has been obtained from $s^2 = 0$ by means of (29.4). Here and in the following we use

$$(a\cdot v) = a^\nu v_\nu = a\mathrm{c} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = \mathrm{c}(a - \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta}) \tag{29.10}$$

$$(v\cdot v) = v^\nu v_\nu = \mathrm{c}^2 - v^2 = \mathrm{c}^2(1-\beta^2) \tag{29.11}$$

$$(a\cdot\dot v) = a^\nu \dot v_\nu = -\mathbf{a}\cdot\dot{\mathbf{v}}. \tag{29.12}$$

Damit wertet man aus

One evaluates

$$\partial^\mu v^\nu = \frac{\dot v^\nu a^\mu}{(a\cdot v)} \tag{29.13}$$

$$\partial^\mu a^\nu = g^{\mu\nu} - \frac{v^\nu a^\mu}{(a\cdot v)} \tag{29.14}$$

$$\begin{aligned}\partial^\mu(a\cdot v) &= (\partial^\mu a^\kappa)v_\kappa + a_\kappa(\partial^\mu v^\kappa)\\ &= g^{\mu\kappa}v_\kappa - \frac{v^\kappa a^\mu}{(a\cdot v)}v_\kappa + a_\kappa\frac{\dot v^\kappa a^\mu}{(a\cdot v)}\\ &= v^\mu - a^\mu\frac{(v\cdot v)}{(a\cdot v)} + a^\mu\frac{(a\cdot\dot v)}{(a\cdot v)}.\end{aligned} \tag{29.15}$$

Es folgt dann

Then one obtains

$$\begin{aligned}\partial^\mu A^\nu &= \partial^\mu\left(q\frac{v^\nu}{(a\cdot v)}\right) = q\frac{\partial^\mu v^\nu}{(a\cdot v)} - q\frac{v^\nu\partial^\mu(a\cdot v)}{(a\cdot v)^2}\\ &= a^\mu b^\nu - q\frac{v^\mu v^\nu}{(a\cdot v)^2},\end{aligned} \tag{29.16}$$

$$b^\nu = q\frac{v^\nu(v\cdot v) - v^\nu(a\cdot\dot v) + \dot v^\nu(a\cdot v)}{(a\cdot v)^3}. \tag{29.17}$$

Damit ist

Therefore

$$(b^\nu) = \frac{q}{(a-\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta})^3}\left(1-\beta^2+\frac{\mathbf{a}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}}{\mathrm{c}}, \boldsymbol{\beta}(1-\beta^2) + \frac{1}{\mathrm{c}}\boldsymbol{\beta}(\mathbf{a}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}) + \frac{1}{\mathrm{c}}(a-\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}}\right) \tag{29.18}$$

und die Felder stellen sich dar

and the fields read

$$F^{\mu\nu} = a^\mu b^\nu - a^\nu b^\mu \tag{29.19}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}b^0 - a\mathbf{b} = \frac{q(1-\beta^2)(\mathbf{a}-\boldsymbol{\beta}a)}{(a-\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} + \frac{q\mathbf{a}\times((\mathbf{a}-\boldsymbol{\beta}a)\times\dot{\boldsymbol{\beta}})}{\mathrm{c}(a-\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} \tag{29.20}$$

$$\mathbf{B} = -\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{E}}{a} \tag{29.21}$$

Der Beitrag proportional zur Beschleunigung $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ fällt ab wie $1/a$, für diesen Beitrag bilden $\mathbf{a}$, $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ ein Orthogonal-System. Der von $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ unabhängige Beitrag fällt wie $1/a^2$ ab.

The contribution proportional to the acceleration $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ decreases like $1/a$; $\mathbf{a}$, $\mathbf{E}$, and $\mathbf{B}$ constiute an orthogonal system for this contribution. The contribution independent of $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ falls off like $1/a^2$.

29.c Gleichförmige Bewegung

29.c Uniform Motion

(vergleiche Abschnitt 25.d). Der Skalar $\gamma a^\lambda v_\lambda/c$ ist gerade der Abstand zwischen Beobachtungspunkt und Ort der Ladung im Ruhesystem der Ladung. Daher gilt

(compare section 25.d). The scalar $\gamma a^\lambda v_\lambda/c$ is the distance between the point of observation and the point of the charge in the rest-system of the charge. Thus one has

$$a - \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\gamma}|\mathbf{r}'|, \quad (a - \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta})^3 = N/\gamma^3. \tag{29.22}$$

Berücksichtigt man $\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t'$, $a = c(t-t')$, so folgt

Considering that $\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t'$, $a = c(t-t')$, one obtains

$$\mathbf{a} - \boldsymbol{\beta} a = \mathbf{r} - \mathbf{v}t' - \mathbf{v}t + \mathbf{v}t' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t \tag{29.23}$$

und damit

and thus

$$\mathbf{E} = \frac{q\gamma(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)}{N}, \quad \mathbf{B} = \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{v}t')\times(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)q\gamma}{c(t-t')N} = \frac{q\gamma\mathbf{v}\times\mathbf{r}}{cN} \tag{29.24}$$

in Übereinstimmung mit (25.30) und (25.31).

in accordance with (25.30) and (25.31).

29.d Beschleunigte Ladung momentan in Ruhe

29.d Accelerated Charge Momentarily at Rest

Für $\beta = 0$ vereinfachen sich die Gleichungen (29.20) und (29.21) zu

The equations (29.20) and (29.21) simplify for $\beta = 0$ to

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{a}}{a^3} + \frac{q}{ca^3}\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}) \tag{29.25}$$

$$\mathbf{B} = -\frac{q}{ca^2}(\mathbf{a}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}), \tag{29.26}$$

woraus mit der Energiestromdichte $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ die in den Raumwinkel $d\Omega$ abgestrahlte Leistung

from which the power radiated into the solid angle $d\Omega$ can be determined with the energy-current density $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$

$$\frac{d\dot{U}_\mathrm{s}}{d\Omega} = a^2\mathbf{S}\cdot\mathbf{n} = \frac{ca}{4\pi}[\mathbf{a},\mathbf{E},\mathbf{B}] = \frac{q^2}{4\pi ca^2}(\mathbf{a}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})^2 = \frac{q^2}{4\pi c^3}(\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{v}})^2 \tag{29.27}$$

und die gesamte abgestrahlte Leistung

and the total radiated power

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\dot{\mathbf{v}}^2 \tag{29.28}$$

(Larmor-Formel) folgt.

(Larmor-formula) follows.

Für eine harmonische Bewegung $\mathbf{r}_\mathrm{q} = \mathbf{r}_{0\mathrm{q}}\cos(\omega t)$ und $\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{r}_{0\mathrm{q}}\omega^2\cos(\omega t)$ folgt

For a harmonic motion $\mathbf{r}_\mathrm{q} = \mathbf{r}_{0\mathrm{q}}\cos(\omega t)$ and $\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{r}_{0\mathrm{q}}\omega^2\cos(\omega t)$ one obtains

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{2}{3}\frac{q^2\mathbf{r}_{0\mathrm{q}}^2}{c^3}\omega^4(\cos(\omega t))^2, \quad \overline{\dot{U}_\mathrm{s}} = \frac{1}{3}\frac{p_0^2}{c^3}\omega^4 \tag{29.29}$$

in Übereinstimmung mit Abschnitt 22.b. Dies gilt für $\beta \ll 1$. Sonst hat man in 22.b auch Quadrupol- und höhere Multipolanteile zu berücksichtigen und hier, dass β nicht mehr vernachlässigt werden kann, was auf zusätzliche Beiträge der Ordnung ω^6 und höher führt.

in agreement with section 22.b. This applies for $\beta \ll 1$. Otherwise one has to take into account quadrupole and higher multipole contributions in 22.b, and here that β cannot be neglected anymore, which yields additional contributions in order ω^6 and higher orders.

29.e Abstrahlung, $\beta \neq 0$

29.e Emitted Radiation $\beta \neq 0$

Wir hatten gesehen, dass die Ladung im momentanen Ruhesystem die Leistung $\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{\mathrm{c}^3}\dot{\mathbf{v}}^2$ abstrahlt. Der abgestrahlte Impuls ist Null wegen der Symmetrie der Strahlung (ohne Berücksichtigung des statischen Anteils von $\mathbf{E}$, der aber so rasch abnimmt, dass er für hinreichend großes a nichts mehr beiträgt)

We had seen, that in the system momentarily at rest the charge emits the power $\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{\mathrm{c}^3}\dot{\mathbf{v}}^2$. The emitted momentum vanishes because of the symmetry of the radiation (without consideration of the static contribution of $\mathbf{E}$, which, however, decays that fast that it does not contribute for sufficiently large a)

$$\mathbf{E}(-\mathbf{a}) = \mathbf{E}(\mathbf{a}), \quad \mathbf{B}(-\mathbf{a}) = -\mathbf{B}(\mathbf{a}), \quad T_{\alpha\beta}(-\mathbf{a}) = T_{\alpha\beta}(\mathbf{a}). \tag{29.30}$$

Wir können daher den pro Eigenzeit abgestrahlten Impuls-Energie-Vektor schreiben als

Thus we may write the energy-momentum-vector emitted per proper time

$$\frac{d}{d\tau}\big(\frac{1}{\mathrm{c}}U_\mathrm{s}, \mathbf{G}_\mathrm{s}\big) = \frac{u^\mu}{\mathrm{c}}\frac{2q^2}{3\mathrm{c}^3}\left(-\frac{du^\lambda}{d\tau}\frac{du_\lambda}{d\tau}\right), \tag{29.31}$$

da $\dot{u}^0 = \mathrm{c}\dot{\gamma} \propto \mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} = 0$. Da die Formel lorentzinvariant geschrieben ist, gilt sie in jedem Inertialsystem, das heißt

since $\dot{u}^0 = \mathrm{c}\dot{\gamma} \propto \mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} = 0$. Since the formula is written in a lorentz-invariant way, it holds in each inertial frame, that is

$$\begin{aligned} \frac{dU_\mathrm{s}}{dt} &= \frac{d\tau}{dt}\frac{u^0}{\mathrm{c}}\frac{2q^2}{3\mathrm{c}^3}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\left(-\frac{d(\gamma v^\lambda)}{dt}\frac{d(\gamma v_\lambda)}{dt}\right) \\ &= \frac{2q^2}{3\mathrm{c}^3}\gamma^2\left((\gamma\mathbf{v})^{\cdot}(\gamma\mathbf{v})^{\cdot} - \mathrm{c}^2\dot{\gamma}^2\right) \\ &= \frac{2q^2}{3\mathrm{c}^3}\gamma^2\left(\gamma^2\dot{\mathbf{v}}^2 + 2\gamma\dot{\gamma}(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}) + \dot{\gamma}^2(\mathbf{v}^2 - \mathrm{c}^2)\right). \end{aligned} \tag{29.32}$$

Mit $d\tau/dt \cdot u^0/\mathrm{c} = 1$ und

With $d\tau/dt \cdot u^0/\mathrm{c} = 1$ and

$$\dot{\gamma} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{\mathrm{c}^2}}}\right) = \gamma^3\frac{\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}}{\mathrm{c}^2} \tag{29.33}$$

folgt schließlich

one obtains finally

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{\mathrm{c}^3}\left(\gamma^4\dot{\mathbf{v}}^2 + \gamma^6\frac{(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}})^2}{\mathrm{c}^2}\right). \tag{29.34}$$

Beim Umlaufen in einem Synchrotron vom Radius r ist die Beschleunigung $\dot{v} = v^2/r$ senkrecht zur Bewegungsrichtung. Daraus folgt

Orbiting in a synchrotron of radius r a charge undergoes the acceleration $\dot{v} = v^2/r$ perpendicular to its velocity. Thus one has

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{2}{3}q^2\mathrm{c}\beta^4\gamma^4/r^2 = \frac{2}{3}q^2\mathrm{c}(\gamma^2-1)^2/r^2. \tag{29.35}$$

Pro Umlauf ist die abgestrahlte Energie

The radiated energy per circulation is

$$\Delta U_\mathrm{s} = \frac{2\pi r}{v}\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{4\pi}{3}q^2\beta^3\gamma^4/r. \tag{29.36}$$

Bei Desy ergibt sich für ein umlaufendes Elektron der Energie E =7.5 GeV und $m_e c^2$ =0.5 MeV ein Wert $\gamma = E/(m_e c^2) = 15000$. Für $r = 32$ m folgt dann $\Delta U = 9.5$ MeV. Bei Petra hat man mit $E = 19$GeV ein $\gamma = 38000$ und mit $r = 367$m eine Energieabstrahlung von $\Delta U = 34$MeV pro Umlauf.

Aufgabe Hera bei Desy hat $r = 1008$m und arbeitet mit Elektronen von $E_e = 30$GeV und Protonen von Ep $= 820$GeV. Man berechne deren Energieabstrahlung pro Umlauf.

At Desy one obtains for an orbiting electron of energy E =7.5 GeV and mass $m_e c^2$ =0.5 MeV a value $\gamma = E/(m_e c^2) = 15000$. For $r = 32$m one obtains $\Delta U = 9.5$MeV. Petra yields with $E = 19$GeV a $\gamma = 38000$ and with $r = 367$m a radiation $\Delta U = 34$MeV per circulation.

Exercise Hera at Desy has $r = 1008$m and uses electrons of $E_e = 30$GeV and protons of Ep $= 820$GeV. Calculate the energy radiated per circulation.