H Lorentz-Invarianz der Elektrodynamik

23 Lorentz-Transformation

23.a Galilei- und Lorentz-Transformation

Die Gleichungen der Newtonschen Mechanik sind invariant gegen die Galilei-Transformation (Galilei-Invarianz)

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z - vt, \quad t' = t. \tag{23.1}$$

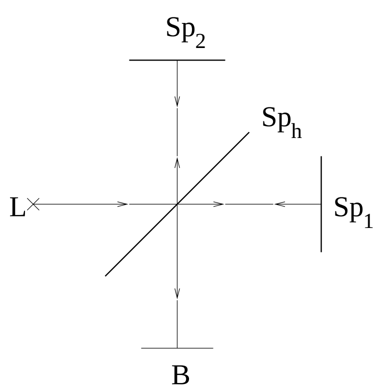
Wir werden im Folgenden sehen, dass die Maxwell-Gleichungen bei geeigneter Transformation von Feldern, Strömen und Ladungen invariant sind gegen lineare Transformationen der Koordinaten x, y, z und t, die die Lichtgeschwindigkeit invariant lassen (Lorentz-Invarianz). Eine derartige Transformation lautet

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{23.2}$$

Betrachten wir zwei Ladungen q und $-q$, die sich für $t \le 0$ am gleichen Ort befinden und auch für $t \ge \Delta t$ am gleichen Ort sind, sich aber im Intervall $0 < t < \Delta t$ gegeneinander bewegen, wobei sie sich zur Zeit 0 am Ort $\mathbf{r}_0$ trennen und zur Zeit Δt am Ort $\mathbf{r}_1$ wieder zusammen kommen. Diese erzeugen nach (21.14) und (21.15) ein Feld, das sich von diesen beiden Ladungen mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet und am Ort $\mathbf{r}$ nur für Zeiten t von Null verschieden ist, für die $t > |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c$ und $t < \Delta t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c$ gilt und zwar unabhängig vom Inertialsystem, in dem wir uns befinden. (Wir müssen dabei nur voraussetzen, dass sich die Ladungen nicht mit Überlicht-Geschwindigkeit bewegen.) Wählen wir insbesondere Δt infinitesimal, so kommt der Lichtblitz zur Zeit $t = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c$ an, bewegt sich also mit Lichtgeschwindigkeit.

Da die Lorentz-Transformation nicht mit den Gesetzen der Newtonschen Mechanik verträglich ist und die Galilei-Transformation nicht mit den Maxwell-Gleichungen (das Licht müsste sich in einem bewegten Inertial-System mit einer von der Richtung abhängigen Geschwindigkeit ausbreiten), entsteht die Frage, welche der drei Möglichkeiten in der Natur erfüllt ist:
(i) es gibt ein ausgezeichnetes Inertialsystem für die Elektrodynamik, für das die Maxwell-Gleichungen nur gelten (Äther-Hypothese),
(ii) die Newton-Mechanik ist abzuändern,
(iii) die Maxwell-Gleichungen sind abzuändern.

Die Entscheidung kann nur experimentell getroffen werden. Ein wesentlicher Versuch zur Widerlegung von (i) ist der Michelson-Morley-Versuch:Ein Lichtstrahl trifft auf einen halbdurchlässigen Spiegel $\mathrm{Sp_h}$, wird durch diesen geteilt, an zwei Spiegeln $\mathrm{Sp_1}$ und $\mathrm{Sp_2}$ im Abstand l reflektiert und an dem halbdurchlässigen Spiegel wieder zusammengeführt. Man beobachtet die Interferenz der beiden Lichtstrahlen bei B. Bewegt sich die Apparatur mit der Geschwindigkeit v in Richtung Spiegel $\mathrm{Sp_1}$, so beträgt die Laufzeit t_1 zwischen dem halbdurchlässigen Spiegel und dem Spiegel $\mathrm{Sp_1}$ und zurück



$$t_1 = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2} = \frac{2l}{c}(1 + \frac{v^2}{c^2} + ...). \tag{23.3}$$

Für die Laufzeit t_2 zum Spiegel Sp_2 ergibt sich

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{\mathrm{c}^2 - v^2}} = \frac{2l}{\mathrm{c}}(1 + \frac{v^2}{2\mathrm{c}^2} + ...), \tag{23.4}$$

da sich die Lichtgeschwindigkeit c in die beiden Komponenten v und $\sqrt{\mathrm{c}^2 - v^2}$ zerlegt. Damit bleibt ein Gangunterschied

$$t_1 - t_2 = \frac{lv^2}{\mathrm{c}^3}, \tag{23.5}$$

der durch Verschiebung der Interferenzen messbar wäre, wenn zum Beispiel v die Geschwindigkeit der Erde gegenüber der Sonne ist. Diese Verschiebung wurde nicht beobachtet. Man kann einwenden, dass das daran liegt, dass der Äther von der Erde mitgeführt wird. Es gibt jedoch viele weitere Versuche, die für die Lorentz-Invarianz sprechen, das heißt der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum unabhängig vom Inertialsystem.
Dafür spricht vor allem, dass die Konsequenzen für die Mechanik bei Versuchen mit Teilchen nahe der Lichtgeschwindigkeit, insbesondere bei Elementarteilchen bestens bestätigt werden.

Entwicklung der Relativitätstheorie

Um die Geschwindigkeit der Erde gegen den postulierten Äther zu bestimmen führten Michelson und Morley ihr Experiment erstmals 1887 mit negativem Ergebnis durch: Keine Bewegung gegen den Äther konnte festgestellt werden. 1892 hielten Fitzgerald und Lorentz das Ätherkonzept aufrecht, indem sie postulierten, dass sich alle Gegenstände in Richtung der Bewegung gegen den Äther um den Faktor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}^2}}$ verkürzten (vgl. Lorentz-Kontraktion, Unterabschnitt 23.b.β).
Voigt fand 1887, dass die homogene Gleichung $\Box\Phi = 0$ mit dem d'Alembert-Operator $\Box$ (20.13) unter einer Klasse von linearen Transformationen der $\mathbf{x}$ und t invariant ist. Larmor gab in seiner 1898 fertiggestellten und 1900 erschienen Arbeit *Äther und Materie* bereits die Transformation (23.2) an. Welchen Einfluss dies auf Lorentz hatte, ist nicht bekannt. 1898 zog Poincaré bereits den Begriff der Gleichzeitigkeit in Zweifel.
1904 fand Lorentz, dass die Maxwell-Gleichungen ohne Ladungen und Ströme invariant unter den Transformationen (23.2) sind, falls man die Felder in geeigneter Weise mittransformiert (siehe Abschnitt 25). 1905 bemerkte Poincaré, dass man die Ladungs- und Stromdichten so transformieren kann, dass der volle Satz Maxwell-Gleichungen invariant unter Lorentz-Transformationen ist (vgl. Abschnitte 24 und 25).
Einstein formulierte 1905 in Unkenntnis der Arbeit von Lorentz und gleichzeitig mit der oben genannten Arbeit von Poincaré die spezielle Relativitätstheorie in einer allgemeinen und vollständigen Weise. Er bemerkte, dass die Idee einer konstanten Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen eine Realität ist, die nicht nur die Elektrodynamik, sondern die gesamte Physik einschließlich der Mechanik beherrscht, und die die Galilei-Invarianz ablöst. Der Grund, dass es so lange dauerte, die (spezielle) Relativitätstheorie zu entwickeln und die Wissenschaftler davon zu überzeugen, dass diese die Realität beschreibt, ist die Rolle, die die Zeit in ihr spielt.
Es war (und ist für manchen noch heute) schwierig zu akzeptieren, dass man den Begriff einer absoluten (d. h. vom Inertialsystem unabhängigen) Gleichzeitigkeit aufgeben muss. Mehr zur Geschichte findet man in *A. Pais, "Raffiniert ist der Herrgott..." Albert Einstein, Vieweg Verlag Braunschweig*
Im Folgenden werden wir die Idee der vierdimensionalen Raum-Zeit entwickeln, innerhalb deren man Transformationen vornehmen kann ähnlich den orthogonalen Transformationen im dreidimensionalen Raum, an die wir bereits gewöhnt sind. Allerdings handelt es sich dabei nicht um einen Euklidischen Raum, d. h. einen Raum mit definiter Metrik, vielmehr haben Raum und Zeit unterschiedliche Metrik (siehe metrischer Tensor g, Gleichung 23.10). Man nennt diesen Raum auch Minkowski-Raum. Wir verwenden dabei die moderne von Minkowski 1908 eingeführte vierdimensionale Notation, die von Einstein zunächst als überflüssig, später von ihm aber als nützlich eingeschätzt wurde.
Ausgehend von den Grundideen der speziellen Relativitätstheorie
Die Naturgesetze und Ergebnisse der Experimente in einem Inertialsystem sind unabhängig von der Bewegung des Systems als Ganzem.
Die Lichtgeschwindigkeit ist in jedem Inertialsystem die Gleiche und unabhängig von der Geschwindigkeit der Quelle.

werden wir in den folgenden Abschnitten die Lorentz-invariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen und der relativistischen Mechanik einführen.

23.b Lorentz-Transformation

Wir führen die Notation

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \tag{23.6}$$

oder kurz

$$(x^\mu) = (ct, \mathbf{r}) \tag{23.7}$$

ein, weiter

$$(x_\mu) = (ct, -\mathbf{r}). \tag{23.8}$$

Dann können wir auch

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu, \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \tag{23.9}$$

schreiben (Summationskonvention) mit

$$(g^{\cdot\cdot}) = (g_{\cdot\cdot}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{23.10}$$

Man bezeichnet g als den metrischen Tensor. Generell gilt für das Herauf- und Herunter-Ziehen von Indices

$$C \cdot \cdot^{\mu} \cdot \cdot = g^{\mu\nu} C \cdot \cdot_{\nu} \cdot \cdot, \quad C \cdot \cdot_{\mu} \cdot \cdot = g_{\mu\nu} C \cdot \cdot^{\nu} \cdot \cdot \tag{23.11}$$

Wir vereinbaren: Indices κ, λ, μ, ν laufen von 0 bis 3, Indices α, β, γ, ... von 1 bis 3. Man beobachtet, dass nach (23.11) $g_\mu{}^\nu = g_{\mu\kappa} g^{\kappa\nu} = \delta_\mu{}^\nu$, $g^\mu{}_\nu = g^{\mu\kappa} g_{\kappa\nu} = \delta^\mu{}_\nu$ mit dem Kronecker-Delta ist.
Wird ein Lichtblitz zur Zeit $t = 0$ bei $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ erzeugt, so wird seine Wellenfront durch

$$s^2 = c^2 t^2 - \mathbf{r}^2 = x^\mu x_\mu = 0 \tag{23.12}$$

beschrieben. Wir bezeichnen das durch die Koordinaten x^μ beschriebene System mit S. Wir postulieren nun mit Einstein: In jedem Inertialsystem breitet sich das Licht im Vakuum mit der gleichen Geschwindigkeit c aus. (Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit) Dann gilt für den Lichtblitz im gleichförmig bewegten System S' (dessen Ursprung für $t = t' = 0$ mit dem von S übereinstimmt)

$$s'^2 = x'^\mu x'_\mu = 0. \tag{23.13}$$

Unter der Annahme eines homogenen Raum-Zeit-Kontinuums muss die Transformation zwischen x' und x linear sein

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \tag{23.14}$$

und es muss gelten $s'^2 = f s^2$ mit einer Konstanten f. Verlangen wir, dass der Raum isotrop ist und kein Inertialsystem ausgezeichnet ist, so folgt $f = 1$. Die Bedingung $s'^2 = s^2$ impliziert

$$s'^2 = x'^\mu x'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \Lambda_\mu{}^\kappa x_\kappa = s^2 = x^\nu \delta_\nu{}^\kappa x_\kappa, \tag{23.15}$$

was für beliebiges x erfüllt ist, wenn

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\kappa = \delta_\nu{}^\kappa \tag{23.16}$$

erfüllt ist. Die Umkehrtransformation von (23.14) folgt aus

$$x^\kappa = \delta_\nu{}^\kappa x^\nu = \Lambda_\mu{}^\kappa \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \Lambda_\mu{}^\kappa x'^\mu. \tag{23.17}$$

Aus (23.16) folgt speziell für $\nu = \kappa = 0$ die Beziehung $(\Lambda^{00})^2 - \sum_\alpha (\Lambda^{\alpha 0})^2 = 1$. Man beachte, dass $\Lambda^\alpha{}_0 = +\Lambda^{\alpha 0}$, $\Lambda_\alpha{}^0 = -\Lambda^{\alpha 0}$. Daher ist $|\Lambda^{00}| \geq 1$. Man unterscheidet zwischen Transformationen mit positivem und negativem Λ^{00}, da es keinen kontinuierlichen Übergang zwischen diesen beiden Klassen gibt. Die Bedingung $\Lambda^{00} > 0$ sagt aus, dass $\Lambda^{00} = \frac{dt}{dt'}|_{\mathbf{r}'} > 0$, das heißt eine in S' ruhende Uhr läuft von S aus gesehen in der gleichen Zeitrichtung, wie die in S synchronisierten Uhren (und nicht rückwärts). Schließlich lässt sich noch eine Aussage über $\det(\Lambda^{\mu}{}_{\nu})$ machen. Aus (23.16) folgt

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} g_{\mu\lambda} \Lambda^{\lambda}{}_{\rho} g^{\rho\kappa} = \delta_{\nu}{}^{\kappa}. \tag{23.18}$$

Unter Verwendung des Determinanten-Multiplikationssatzes folgt

$$\det(\Lambda^{\mu}{}_{\nu})^2 \det(g_{\mu\lambda}) \det(g^{\rho\kappa}) = 1. \tag{23.19}$$

Da $\det(g_{\mu\lambda}) = \det(g^{\rho\kappa}) = -1$ folgt

$$\det(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = \pm 1. \tag{23.20}$$

Betrachten wir nur Rechts-Basis-Systeme, so ist $\det(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = +1$. Transformationen, die

$$\Lambda^{00} > 0, \quad det(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = 1 \tag{23.21}$$

erfüllen, heißen eigentliche Lorentz-Transformationen.
Gl. (23.21) hat die Konsequenz, dass das vierdimensionale Raumzeitvolumen invariant ist

$$dt' d^3 r' = \frac{1}{\mathrm{c}} d^4 x' = \frac{1}{\mathrm{c}} \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} d^4 x = \frac{1}{\mathrm{c}} \det(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) d^4 x = \frac{1}{\mathrm{c}} d^4 x = dt d^3 r. \tag{23.22}$$

Legen wir die z- und die z'-Achse in Richtung der Relativgeschwindigkeit v der sich gegeneinander bewegenden Inertialsysteme und setzen wir zusätzlich $x' = x$, $y' = y$, so folgt die spezielle Transformation (23.2). Die zugehörige Matrix Λ lautet

$$(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{23.23}$$

mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}^2}}}, \quad \beta = \frac{v}{\mathrm{c}}. \tag{23.24}$$

23.b.α Zeitdilatation

Wir betrachten nun eine in S' ruhende Uhr im System S. Aus

$$t = \gamma(t' + \frac{vz'}{\mathrm{c}^2}) \tag{23.25}$$

folgt dann

$$\Lambda_0{}^0 = \left.\frac{\partial t}{\partial t'}\right|_{\mathbf{r}'} = \gamma. \tag{23.26}$$

Die in S' ruhende Uhr geht von S aus betrachtet langsamer

$$\Delta t' = \left.\frac{\partial t'}{\partial t}\right|_{\mathbf{r}'} \Delta t = \frac{1}{\gamma} \Delta t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}^2}} \Delta t. \tag{23.27}$$

Dieses Phänomen bezeichnet man als Zeitdilatation.

23.b.β Längenkontraktion

Aus

$$z' = \gamma(z - vt) \tag{23.28}$$

folgt

$$\Lambda^3{}_3 = \left.\frac{\partial z'}{\partial z}\right|_t = \gamma \tag{23.29}$$

und damit

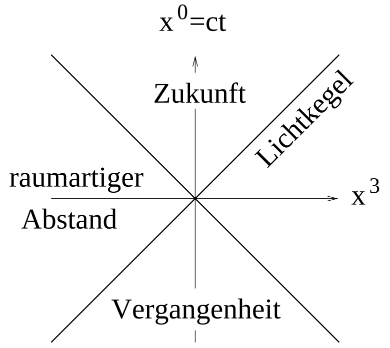
$$\Delta z = \left.\frac{\partial z}{\partial z'}\right|_t \Delta z' = \frac{1}{\gamma}\Delta z' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\Delta z'. \tag{23.30}$$

Ein Maßstab, der in S' ruht und in der Richtung der Relativ-Bewegung ausgedehnt ist, erscheint also in S verkürzt. Man bezeichnet das als Längenkontraktion. Dagegen bleiben die Entfernungen senkrecht zur Bewegungsrichtung unverändert: $\Delta x' = \Delta x$, $\Delta y' = \Delta y$.

Diese Verkürzung bewirkt, dass in (23.3) die Länge l durch $l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ zu ersetzen ist. Dann stimmen die beiden Laufzeiten des Lichts unabhängig von der Geschwindigkeit v überein, $t_1 = t_2$.

24 Viererskalare und Vierervektoren

24.a Abstand und Eigenzeit als Viererskalare



Eine Größe, die invariant gegen Lorentz-Transformationen ist, heißt Viererskalar.
Beispiel: Gegeben seien zwei Raum-Zeit-Punkte (Ereignisse) (x^μ), $(\bar{x}^\mu)$. Die Größe

$$s^2 = (x^\mu - \bar{x}^\mu)(x_\mu - \bar{x}_\mu) \tag{24.1}$$

ist ein Viererskalar. Sie hat in jedem Inertialsystem den gleichen Wert. Speziell für $\bar{x}^\mu = 0$ (Ursprung) ist $s^2 = x^\mu x_\mu$.

24.a.α Raumartiger Abstand $s^2 < 0$

Wenn $s^2 < 0$, dann gibt es Inertialsysteme, in denen beide Ereignisse gleichzeitig stattfinden $x'^0 = 0$. Sei etwa $(x^\mu) = (ct, 0, 0, z)$. Dann erhält man aus (23.2)

$$t' = \frac{t - \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{24.2}$$

mit $v = tc^2/z$

$$t' = 0, \quad z' = \frac{z(1 - \frac{v^2}{c^2})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = z\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \pm\sqrt{z^2 - c^2t^2} = \pm\sqrt{-s^2}. \tag{24.3}$$

Man bezeichnet daher zwei solche Ereignisse als raumartig zu einander gelegen.

24.a.β Zeitartiger Abstand $s^2 > 0$

In diesem Fall existiert ein Inertialsystem, in dem beide Ereignisse am gleichen Ort stattfinden ($\mathbf{x}' = \mathbf{0}$). In der Transformation (23.2) wählen wir $v = z/t$. Dann folgt

$$t' = \frac{t(1 - \frac{v^2}{c^2})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \operatorname{sign}(t)\sqrt{t^2 - \frac{z^2}{c^2}} = \operatorname{sign}(t)\frac{s}{c}, \quad z' = 0. \tag{24.4}$$

Ein Ereignis ist früher als das andere, das heißt, das Vorzeichen von t' stimmt mit dem von t überein.
Eigenzeit τ
Unter der Eigenzeit τ versteht man die Zeit, die im jeweiligen Ruhesystem verstreicht. Bewegt sich ein Punkt mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$, so gilt für seine Eigenzeit

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}dt, \tag{24.5}$$

also

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2(t)}{c^2}}dt. \tag{24.6}$$

Die Eigenzeit ist unabhängig vom Inertialsystem, also ein Viererskalar.

24.a.γ Lichtartiger Abstand $s^2 = 0$

Wenn ein Lichtblitz direkt von einem Ereignis zu einem anderen läuft, dann ist deren Abstand $s = 0$. Die in einem Inertialsystem gemessene Zeit kann je nach Inertialsystem beliebig lang oder kurz sein, jedoch kann sich die Reihenfolge der Ereignisse (bei einer eigentlichen Lorentz-Transformation) nicht umkehren.
Ein weiterer Viererskalar ist die Ladung.

24.b Weltgeschwindigkeit als Vierervektor

Transformiert sich eine vierkomponentige Größe (A^μ) beim Übergang von einem Inertialsystem zum anderen wie die Raum-Zeit-Koordinaten (x^μ), so bilden sie einen Vierervektor

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu. \tag{24.7}$$

Ein Beispiel ist die Weltgeschwindigkeit

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma v^\mu \text{ mit } v^0 = \frac{dx^0}{dt} = \mathrm{c}\frac{dt}{dt} = \mathrm{c}. \tag{24.8}$$

Die Weltgeschwindigkeit $(u^\mu) = (\mathrm{c}\gamma, \mathbf{v}\gamma)$ ist ein Vierer-Vektor. Da τ invariant gegen Lorentz-Transformationen ist, transformiert sie sich wie (x^μ). Dagegen ist $(\mathrm{c}, \mathbf{v})$ kein Vierer-Vektor. Es ist

$$u^\mu u_\mu = (\mathrm{c}^2 - \mathbf{v}^2)\gamma^2 = \mathrm{c}^2. \tag{24.9}$$

Allgemein ist das Skalar-Produkt zweier Vierer-Vektoren (A^μ) und (B^μ) ein Viererskalar

$$A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\kappa A^\nu B_\kappa = \delta^\kappa_\nu A^\nu B_\kappa = A^\nu B_\nu. \tag{24.10}$$

Wir zeigen das folgende Lemma: Ist (a^μ) ein beliebiger Vierervektor (oder hat man einen vollständigen Satz Vierervektoren) und ist $a^\mu b_\mu$ ein Viererskalar, dann ist auch (b^μ) ein Vierervektor. Beweis:

$$a^\mu b_\mu = a'^\kappa b'_\kappa = \Lambda^\kappa{}_\mu a^\mu b'_\kappa. \tag{24.11}$$

Da dies für alle (a^μ) oder einen vollständigen Satz gilt, gilt auch $b_\mu = \Lambda^\kappa{}_\mu b'_\kappa$. Dies ist aber die Transformationsformel (23.17) für Vierervektoren.

Additions-Theorem für Geschwindigkeiten

Das Inertialsystem S' bewege sich gegenüber S mit der Geschwindigkeit v in z-Richtung. In S' bewege sich ein Punkt mit der Geschwindigkeit w' ebenfalls in z-Richtung. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt er sich in S? Wir haben

$$z = \frac{z' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}^2}}}, \quad t = \frac{t' + \frac{vz'}{\mathrm{c}^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}^2}}}. \tag{24.12}$$

Mit $z' = w't'$ folgt dann

$$z = \frac{(v + w')t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}^2}}}, \quad t = \frac{(1 + \frac{vw'}{\mathrm{c}^2})t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}^2}}}. \tag{24.13}$$

Daraus folgt die Geschwindigkeit des Punktes in S

$$w = \frac{z}{t} = \frac{w' + v}{1 + \frac{w'v}{\mathrm{c}^2}}. \tag{24.14}$$

Wir beobachten

$$1 - \frac{w^2}{\mathrm{c}^2} = 1 - \left(\frac{\frac{w'}{\mathrm{c}} + \frac{v}{\mathrm{c}}}{1 + \frac{w'v}{\mathrm{c}^2}}\right)^2 = \frac{(1 - \frac{w'^2}{\mathrm{c}^2})(1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}^2})}{(1 + \frac{w'v}{\mathrm{c}^2})^2}. \tag{24.15}$$

Wenn $|w'| < \mathrm{c}$ und $|v| < \mathrm{c}$, dann ist dieser Ausdruck positiv. Dann ist also auch $|w| < \mathrm{c}$. Beispiel: $w' = v = 0.5\mathrm{c}$, dann ist $w = 0.8\mathrm{c}$.

24.c Viererstromdichte

Wir fassen Ladungs- und Stromdichte zusammen zur Viererstromdichte

$$(j^\mu) = (\mathrm{c}\rho, \mathbf{j}) \tag{24.16}$$

und überzeugen uns, dass j^μ ein Vierervektor ist. Für Ladungen der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ gilt (für Ladungen verschiedener Geschwindigkeit können die Beiträge superponiert werden)

$$j^\mu = \rho v^\mu, \quad (v^0 = \mathrm{c}), \quad j^\mu = \rho\sqrt{1-\beta^2}u^\mu \tag{24.17}$$

Falls $\rho\sqrt{1-\beta^2}$ ein Viererskalar ist, ist j^μ ein Vierervektor. Nun ist

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{V_0\sqrt{1-\beta^2}} \tag{24.18}$$

mit dem Volumen V_0 im Ruhesystem und der Längenkontraktion $V = V_0\sqrt{1-\beta^2}$. Da die Ladung q und V_0 Viererskalare sind, ist auch $\rho\sqrt{1-\beta^2}$ ein Viererskalar.
Wir bringen nun die Kontinuitätsgleichung in Lorentz-invariante Form. Aus $\dot\rho + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ folgt

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0, \tag{24.19}$$

da $\partial j^0/\partial x^0 = \partial\rho/\partial t$. Wir betrachten nun die Transformations-Eigenschaften der Ableitungen $\partial/\partial x^\mu$

$$\frac{\partial f}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial f}{\partial x^\nu} = \Lambda_\mu{}^\nu \frac{\partial f}{\partial x^\nu}, \tag{24.20}$$

das heisst die Ableitung transformiert sich gemäß

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu{}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{24.21}$$

wie $x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu$. Man schreibt daher

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu, \quad (\partial_\mu) = (\frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla). \tag{24.22}$$

Man achte auf die Stellung der Indices. Ähnlich gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \partial^\mu, \quad (\partial^\mu) = (\frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla). \tag{24.23}$$

Man kann dann die Kontinuitätsgleichung als

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{24.24}$$

schreiben. Generell ist die Viererdivergenz $\partial_\mu P^\mu = \partial^\mu P_\mu$ eines Vierervektors P ein Viererskalar.

24.d Viererpotential

Wir fassen nun $\mathbf{A}$ und Φ zusammen zum Viererpotential

$$(A^\mu) = (\Phi, \mathbf{A}), \tag{24.25}$$

dann gilt

$$\Box A^\mu = -\frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^\mu \tag{24.26}$$

in der Lorenz-Eichung mit der Eichbedingung

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{\mathrm{c}}\dot\Phi = 0 \to \partial_\mu A^\mu = 0. \tag{24.27}$$

Dabei ist

$$\Box = \triangle - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 = -\partial_\mu \partial^\mu \tag{24.28}$$

ein Viererskalar $\Box' = \Box$.

Wir zeigen nun, dass die retardierte Lösung A_r^μ manifest Lorentz-invariant ist. Wir behaupten

$$\begin{aligned} A_\mathrm{r}^\mu(x) &= \frac{1}{c}\int d^4y j^\mu(y)\delta(\frac{1}{2}s^2)\theta(x^0 - y^0) && (24.29)\\ s^2 &= (x^\mu - y^\mu)(x_\mu - y_\mu) = c^2(t_y - t_x)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 && (24.30)\\ \theta(x^0) &= \begin{cases} 1 & x^0 > 0 \\ 0 & x^0 < 0 \end{cases} && (24.31) \end{aligned}$$

Wir betrachten nun generell die Integration über eine δ-Funktion, die von einer Funktion f abhängt. Offensichtlich tragen nur die Nullstellen t_i von f bei,

$$\int g(t)\delta(f(t))dt = \sum_i \int_{t_i-\epsilon}^{t_i+\epsilon} g(t)\delta(f(t))dt \quad \text{mit} \quad f(t_i) = 0. \tag{24.32}$$

Mit $z = f(t)$, $dz = f'(t)dt$ folgt dann

$$\int g(t)\delta(f(t))dt = \sum_i \int_{-\epsilon/f'(t_i)}^{\epsilon/f'(t_i)} g(t_i)\delta(z)\frac{dz}{f'(t_i)} = \sum_i \frac{g(t_i)}{|f'(t_i)|}. \tag{24.33}$$

Damit ergeben sich die Nullstellen in der δ-Funktion von (24.29) zu $t_y = t_x \pm |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c$ und die Ableitungen zu $f'(t_y) = c^2(t_y - t_x) = \pm c|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, was

$$A_r^\mu(x) = \frac{1}{c}\int d^4y j^\mu \delta(\frac{1}{2}s^2)\theta(t_x - t_y) = \int d^3y \frac{1}{c|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} j^\mu(\mathbf{y}, t_x - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c}) \tag{24.34}$$

ergibt. Wegen $\theta(t_x - t_y)$ erhalten wir die retardierte Lösung. Sie ist in Übereinstimmung mit (21.14) und (21.15). Ersetzen wir die θ-Funktion durch $\theta(t_y - t_x)$, so ergibt sich die avancierte Lösung. Man beachte, dass sich das Vorzeichen der Zeitdifferenz längs des Lichtkegels unter eigentlichen Lorentz-Transformationen nicht ändert.

25 Elektromagnetischer Feldtensor

25.a Feldtensor

Aus dem Viererpotential (A^μ) erhalten wir die Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$,

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad}\Phi - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}, \tag{25.1}$$

zum Beispiel

$$B_1 = \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} = \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3, \quad E_1 = -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} = \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1. \tag{25.2}$$

Wir führen daher den elektromagnetischen Feldtensor ein

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}. \tag{25.3}$$

Er ist antisymmetrisch. Explizit lautet er

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{25.4}$$

25.b Maxwell-Gleichungen

25.b.α Die inhomogenen Gleichungen

Die Gleichung $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$ lässt sich ausdrücken

$$\partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \frac{4\pi}{c} j^0. \tag{25.5}$$

Aus der 1-Komponente von $\operatorname{rot}\mathbf{B} - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$ folgt

$$\frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^3} - \frac{\partial E_1}{\partial x^0} = \frac{4\pi}{c} j^1 \to \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} + \partial_0 F^{01} = \frac{4\pi}{c} j^1, \tag{25.6}$$

ähnlich für die anderen Komponenten. Diese vier Komponenten-Gleichungen lassen sich zusammenfassen zu

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu. \tag{25.7}$$

Setzen wir die Darstellung der Felder durch die Potentiale ein, (25.3), so folgt

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} j^\nu. \tag{25.8}$$

Mit der Bedingung für die Lorentz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$, (24.27) folgt dann

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu \tag{25.9}$$

in Übereinstimmung mit (24.26) und (24.28).

25.b.β Die homogenen Gleichungen

Ähnlich kann man die homogenen Maxwell-Gleichungen umschreiben. Aus $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ wird

$$\partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} = 0 \tag{25.10}$$

und aus $(\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\mathbf{B}})_{\mathrm{x}} = 0$ wird

$$-\partial^2 F^{30} - \partial^3 F^{02} - \partial^0 F^{23} = 0. \tag{25.11}$$

Diese Gleichungen lassen sich zusammenfassen zu

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0. \tag{25.12}$$

Man beachte, dass die Gleichung nur für $\lambda \neq \mu \neq \nu \neq \lambda$ nicht trivial ist. Sind zwei Indices gleich, so verschwindet die linke Seite identisch. Man kann diese Gleichungen auch mit Hilfe des dualen Feldtensors

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda} \tag{25.13}$$

ausdrücken. Dabei ist $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$ vollständig antisymmetrisch gegen Vertauschung der Indices. Das heißt, er ändert sein Vorzeichen, wenn zwei Indices vertauscht werden. Das impliziert, dass er verschwindet, wenn zwei Indices gleich sind. Er ist daher nur von Null verschieden, wenn alle vier Indices verschieden sind. Wir normieren ihn auf $\epsilon^{0123} = 1$. Damit hat man explizit

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{25.14}$$

und (25.12) lässt sich schreiben

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \tag{25.15}$$

Man überzeuge sich, dass ϵ ein Pseudoskalar ist, das heißt es gilt

$$\epsilon'^{\mu\nu\kappa\lambda} = \det(\Lambda)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}, \tag{25.16}$$

wobei $\det(\Lambda)$ gemäß der Diskussion nach (23.19) nur die Werte ± 1 annimmt und für eigentliche Lorentz-Transformationen gleich $+1$ ist (23.21).

25.c Transformation der elektrischen und magnetischen Felder

Da sich (∂^μ) und (A^ν) wie Vierer-Vektoren transformieren, gilt

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\kappa \Lambda^\nu{}_\lambda F^{\kappa\lambda} \tag{25.17}$$

für die Transformation des elektromagnetischen Feldes. Wählen wir speziell

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \tag{25.18}$$

so folgt

$$E_1' = F'^{10} = \Lambda^1{}_\kappa \Lambda^0{}_\lambda F^{\kappa\lambda} = \gamma F^{10} - \beta\gamma F^{13} = \gamma(E_1 - \beta B_2), \tag{25.19}$$

also

$$E_1' = \gamma(E_1 - \frac{v}{\mathrm{c}}B_2), \tag{25.20}$$

ähnlich

$$
\begin{aligned}
& & B'_1 &= \gamma(B_1 + \frac{v}{\mathrm{c}} E_2) & (25.21)\\
E'_2 &= \gamma(E_2 + \frac{v}{\mathrm{c}} B_1), & B'_2 &= \gamma(B_2 - \frac{v}{\mathrm{c}} E_1) & (25.22)\\
E'_3 &= E_3, & B'_3 &= B_3, & (25.23)
\end{aligned}
$$

was wir auch zu

$$
\begin{aligned}
E'_{\|} &= E_{\|}, & B'_{\|} &= B_{\|}, & &\text{Komponente } \| \mathbf{v} & (25.24)\\
\mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \frac{\mathbf{v}}{\mathrm{c}} \times \mathbf{B}), & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{v}}{\mathrm{c}} \times \mathbf{E}), & &\text{Komponenten } \perp \mathbf{v} & (25.25)
\end{aligned}
$$

zusammenfassen können.

25.d Felder einer gleichförmig bewegten Punktladung

Wir können daraus zum Beispiel die Felder einer Ladung, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$ bewegt, berechnen. Im Ruhesystem S' der Ladung, die im Ursprung ist, gilt

$$\mathbf{E}' = q\frac{\mathbf{r}'}{r'^3}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{0}. \tag{25.26}$$

Im System S gilt für die Ladung $x_{\mathrm{q}} = y_{\mathrm{q}} = 0$, $z_{\mathrm{q}} = vt$. Wir drücken nun $\mathbf{r}'$ aus durch $\mathbf{r}$ und t und erhalten

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}' &= \left(\frac{qx}{N}, \frac{qy}{N}, \frac{q\gamma(z-vt)}{N}\right), & (25.27)\\
\mathbf{B}' &= \mathbf{0}, & (25.28)\\
N &= r'^3 = (x^2 + y^2 + \gamma^2(z-vt)^2)^{3/2}. & (25.29)
\end{aligned}
$$

Es folgt

$$
\left.\begin{array}{r}
E_1 = \gamma(E'_1 + \frac{v}{\mathrm{c}} B'_2) = \frac{q\gamma x}{N}\\
E_2 = \gamma(E'_2 - \frac{v}{\mathrm{c}} B'_1) = \frac{q\gamma y}{N}\\
E_3 = E'_3 = \frac{q\gamma(z-vt)}{N}
\end{array}\right\} \mathbf{E} = \frac{q\gamma(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)}{N} \tag{25.30}
$$

$$
\left.\begin{array}{r}
B_1 = \gamma(B'_1 - \frac{v}{\mathrm{c}} E'_2) = -\frac{q\gamma\beta y}{N}\\
B_2 = \gamma(B'_2 + \frac{v}{\mathrm{c}} E'_1) = \frac{q\gamma\beta x}{N}\\
B_3 = B'_3 = 0
\end{array}\right\} \mathbf{B} = \frac{q\gamma(\mathbf{v} \times \mathbf{r})}{\mathrm{c}N}. \tag{25.31}
$$

Flächen konstanten Ns sind in Bewegungsrichtung abgeplattete Rotations-Ellipsoide. Dabei ist kurze Halbachse / lange Halbachse $= 1/\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}^2}}$, also eine Verkürzung, wie sie auch bei der Längenkontraktion auftritt.

25.e Doppler-Effekt

Wir betrachten eine monochromatische ebene Welle

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \mathrm{e}^{i\phi}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \mathrm{e}^{i\phi} \quad \text{mit } \phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t. \tag{25.32}$$

Wir wissen, wie sich $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ und damit auch $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{B}_0$ transformieren. Es bleibt daher noch der Viererskalar der Phase ϕ zu betrachten. Schreiben wir

$$(k^\mu) = (\frac{\omega}{\mathrm{c}}, \mathbf{k}), \tag{25.33}$$

so folgt

$$\phi = -k_\mu x^\mu. \tag{25.34}$$

Da (x^μ) ein beliebiger Vierervektor und ϕ ein Viererskalar sind, folgt, dass (k^μ) ein Vierervektor ist. Daher erhält man für die spezielle Lorentz-Transformation (25.18)

$$\omega' = ck'^0 = c\gamma(k^0 - \beta k^3) = \gamma(\omega - \beta c k^3), \quad k'^1 = k^1, \quad k'^2 = k^2, \quad k'^3 = \gamma(k^3 - \beta\frac{\omega}{c}). \tag{25.35}$$

Ist der Winkel zwischen z-Achse und Ausbreitungsrichtung θ, so gilt $k^3 = \frac{\omega}{c}\cos\theta$ und es folgt

$$\omega' = \omega\gamma(1 - \beta\cos\theta). \tag{25.36}$$

Ist daher $\mathbf{v}$ parallel beziehungsweise antiparallel zur Ausbreitungs-Richtung, so hat man die longitudinale Doppler-Verschiebung

$$\theta = 0: \quad \omega' = \omega\sqrt{\tfrac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{25.37}$$

$$\theta = \pi: \quad \omega' = \omega\sqrt{\tfrac{1+\beta}{1-\beta}}. \tag{25.38}$$

Ist dagegen $\theta = \pi/2$ beziehungsweise $\theta' = \pi/2$, so hat man die transversale Doppler-Verschiebung

$$\theta = \frac{\pi}{2}: \qquad \omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{25.39}$$

$$\theta' = \frac{\pi}{2}: \quad \omega' = \omega\sqrt{1-\beta^2}. \tag{25.40}$$

Dabei ist θ' der Winkel zwischen der z$'$-Achse und der Ausbreitungsrichtung in S'.

26 Relativistische Mechanik

26.a Lorentz-Kraftdichte

Die Kraftdichte lautet

$$\mathbf{k} = \rho\mathbf{E} + \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{j} \times \mathbf{B}, \tag{26.1}$$

also zum Beispiel für die erste Komponente

$$k^1 = \rho E_1 + \frac{1}{\mathrm{c}}(j^2 B_3 - j^3 B_2) = \frac{1}{\mathrm{c}}(j^0 F^{10} - j^2 F^{12} - j^3 F^{13}) = \frac{1}{\mathrm{c}} j_\nu F^{1\nu}. \tag{26.2}$$

Man führt daher den Vierer-Vektor der Lorentz-Kraftdichte

$$k^\mu = \frac{1}{\mathrm{c}} j_\nu F^{\mu\nu} \tag{26.3}$$

ein. Wir betrachten die zeitartige Komponente

$$k^0 = \frac{1}{\mathrm{c}} j_\nu F^{0\nu} = \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \tag{26.4}$$

Während die raumartigen Komponenten die mechanische Impulsänderung pro Zeit- und Volumen-Einheit angeben, gibt die zeitartige Komponente die pro Zeit und Volumen zugeführte Energie an

$$(k^\mu) = (\frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \mathbf{k}). \tag{26.5}$$

26.b Lorentz-Kraft auf eine Punktladung

Die Vierer-Stromdichte am Ort $\mathbf{x}$ einer Punktladung q am Ort $\mathbf{x}_\mathrm{q}$ ist

$$j^\nu(\mathbf{x}, t) = q\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{q}(t))v^\nu. \tag{26.6}$$

Daher ist die auf die Punktladung wirkende Kraft gegeben durch

$$K^\mu = \frac{q}{\mathrm{c}} v_\nu F^{\mu\nu}. \tag{26.7}$$

Dies ist kein Vierer-Vektor, da (v^μ) kein Vierer-Vektor ist. Multiplizieren wir sie hingegen mit γ so erhält man einen Vierer-Vektor, die Minkowski-Kraft

$$\gamma K^\mu = \frac{q}{\mathrm{c}} u_\nu F^{\mu\nu}. \tag{26.8}$$

$\mathbf{K}$ ist der der Punktladung pro Zeiteinheit zugeführte Impuls, $\mathrm{c}K^0$ die der Punktladung pro Zeiteinheit zugeführte Energie. Die Minkowski-Kraft ist dann der pro Eigenzeit zugeführte Impuls beziehungsweise die pro Eigenzeit zugeführte Energie durch c.

26.c Energie und Impuls eines Massenpunktes

Da Impulsänderung und Energieänderung durch c einen Vierervektor bilden, erwarten wir, dass auch mechanischer Impuls und Energie durch c einen Vierervektor bilden

$$(G^\mu) = (\frac{1}{\mathrm{c}}E, \mathbf{G}). \tag{26.9}$$

Im Ruhesystem S' erwarten wir $\mathbf{G}' = \mathbf{0}$, das heißt

$$(G'^\mu) = (\frac{1}{\mathrm{c}}E_0, \mathbf{0}). \tag{26.10}$$

Im System S ergibt sich mit der speziellen Transformation (23.23) für $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$

$$\mathbf{G} = \gamma \tfrac{v}{c^2} E_0 \mathbf{e}_z = \gamma \mathbf{v} \frac{E_0}{c^2}, \tag{26.11}$$

$$E = cG^0 = c\gamma G'^0 = \gamma E_0. \tag{26.12}$$

Für Geschwindigkeiten klein gegen die Lichtgeschwindigkeit folgt

$$\mathbf{G} = \frac{E_0}{c^2}\mathbf{v}\big(1 + \frac{v^2}{2c^2} + ...\big). \tag{26.13}$$

In der Newtonschen Mechanik haben wir

$$\mathbf{G}_{\text{Newton}} = m\mathbf{v} \tag{26.14}$$

für einen Massenpunkt der Masse m. Für Geschwindigkeiten $v \ll c$ sollte der Impuls der Newtonschen und der relativistischen Mechanik übereinstimmen. Daraus folgt

$$m = \frac{E_0}{c^2} \to E_0 = mc^2, \quad \mathbf{G} = m\gamma\mathbf{v}. \tag{26.15}$$

Für die Energie E folgt dann

$$E = mc^2\gamma = mc^2 + \frac{m}{2}v^2 + O(v^4/c^2). \tag{26.16}$$

Man ordnet dem Teilchen eine Ruheenergie $E_0 = mc^2$ zu. Bei kleinen Geschwindigkeiten kommt dazu der aus der Newtonschen Mechanik bekannte Beitrag $\frac{m}{2}v^2$ hinzu. Damit gilt

$$G^\mu = mu^\mu. \tag{26.17}$$

Wir beobachten noch

$$G^\mu G_\mu = m^2 u^\mu u_\mu = m^2 c^2, \tag{26.18}$$

woraus

$$-\mathbf{G}^2 + \frac{1}{c^2}E^2 = m^2c^2, \quad E^2 = m^2c^4 + \mathbf{G}^2c^2 \tag{26.19}$$

folgt.
Solange die Teilchen erhalten bleiben, ist die Ruheenergie $E_0 = mc^2$ nicht beobachtbar. Bei der Umwandlung von Teilchen wird sie jedoch beobachtet, zum Beispiel beim Zerfall eines Teilchens in zwei andere

$$\Lambda^0 \to \pi^- + p^+. \tag{26.20}$$

Mit den Massen

$$m_\Lambda = 2182 m_e, \quad m_\pi = 273 m_e, \quad m_p = 1836 m_e \tag{26.21}$$

folgt für das vor dem Zerfall ruhende Λ die Energie- und Impuls-Bilanz

$$m_\Lambda c^2 = \sqrt{m_\pi^2 c^4 + \mathbf{G}_\pi^2 c^2} + \sqrt{m_p^2 c^4 + \mathbf{G}_p^2 c^2} \tag{26.22}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{G}_\pi + \mathbf{G}_p. \tag{26.23}$$

Die Lösung des Gleichungssystems ergibt

$$|\mathbf{G}| = 4c\sqrt{M(m_\Lambda - M)(M - m_\pi)(M - m_p)}/m_\Lambda, \quad 2M = m_\Lambda + m_\pi + m_p. \tag{26.24}$$

Mit Hilfe der Vierervektoren kann man aus

$$G_\Lambda{}^\mu = G_\pi{}^\mu + G_p{}^\mu \tag{26.25}$$

nach G_p auflösen und quadrieren

$$G_p{}^\mu G_{p\mu} = (G_\Lambda^\mu - G_\pi^\mu)(G_{\Lambda\mu} - G_{\pi\mu}) = G_\Lambda^\mu G_{\Lambda\mu} + G_\pi^\mu G_{\pi\mu} - 2G_\Lambda^\mu G_{\pi\mu}. \tag{26.26}$$

Dies ergibt

$$m_p^2 c^2 = m_\Lambda^2 c^2 + m_\pi^2 c^2 - 2m_\Lambda E_\pi \tag{26.27}$$

und damit

$$E_\pi = \frac{c^2}{2m_\Lambda}\left(m_\Lambda^2 + m_\pi^2 - m_p^2\right) \tag{26.28}$$

und analog

$$E_p = \frac{c^2}{2m_\Lambda}\left(m_\Lambda^2 - m_\pi^2 + m_p^2\right). \tag{26.29}$$

26.d Bewegungsgleichung

Wir schreiben nun noch explizit die Bewegungsgleichung für Massenpunkte auf

$$\frac{dG^\mu}{dt} = K^\mu. \tag{26.30}$$

Wie wir früher schon bemerkten, ist die Gleichung nicht manifest Lorentz-invariant. Wir haben jedoch

$$\frac{dG^\mu}{d\tau} = \frac{dG^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{dG^\mu}{dt} = \gamma K^\mu, \tag{26.31}$$

wobei die rechte Seite wieder die Minkowski-Kraft ist. In dieser Form ist die Bewegungsgleichung manifest Lorentz-invariant.
Falls eine Kraft die Ruheenergie eines Teilchens nicht ändert, so folgt aus

$$G^\mu G_\mu = m^2 c^2 \to \frac{d}{d\tau}(G^\mu G_\mu) = 0 \to G^\mu \gamma K_\mu = 0 \to u^\mu K_\mu = 0. \tag{26.32}$$

Die Kraft ist orthogonal zur Weltgeschwindigkeit. Als Beispiel dient die Lorentz-Kraft

$$u_\mu K^\mu = \frac{q}{c}\gamma v_\mu v_\nu F^{\mu\nu} = 0, \tag{26.33}$$

da $F^{\mu\nu}$ antisymmetrisch ist. Wir beobachten

$$v^\mu K_\mu = -\mathbf{v}\cdot\mathbf{K} + \frac{c}{c}\frac{dE}{dt} = 0. \tag{26.34}$$

Die Gleichung (26.32) ist also äquivalent zu

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{K}, \tag{26.35}$$

die die der Masse zugeführte Leistung angibt.

27 Lagrange-Formulierung

27.a Lagrange-Funktion einer massiven Ladung im elektromagnetischen Feld

Wir behaupten, die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ einer Punktladung q der Masse m im elektromagnetischen Feld kann geschrieben werden als

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}} - q\Phi(\mathbf{r},t) + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\cdot\dot{\mathbf{r}}. \tag{27.1}$$

Die Wirkung I kann dann

$$I = \int dt\mathcal{L} = -mc^2\int d\tau - \frac{q}{c}\int dt A^\mu\frac{dx_\mu}{dt} = \int d\tau(-mc^2 - \frac{q}{c}A^\mu u_\mu), \tag{27.2}$$

das heißt als Vierer-Skalar geschrieben werden.
Wir überzeugen uns nun, dass hieraus die korrekten Bewegungsgleichungen folgen. Die Bewegungs-Gleichung lautet

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_\alpha} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\alpha} = 0, \tag{27.3}$$

woraus mit

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_\alpha} = \frac{m\dot{x}^\alpha}{\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}}} + \frac{q}{c}A^\alpha(\mathbf{r}(t),t) = G^\alpha + \frac{q}{c}A^\alpha \tag{27.4}$$

dann

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G} + \frac{q}{c}\dot{\mathbf{A}} + \frac{q}{c}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} + q\nabla\Phi - \frac{q}{c}\nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) = 0 \tag{27.5}$$

folgt. Man beachte, dass in $\dot{\mathbf{A}}$ nur die partielle Zeit-Ableitung von $\mathbf{A}$ steckt, daher haben wir $d\mathbf{A}/dt = \dot{\mathbf{A}} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}$. Durch geeignetes Zusammenfassen der Beiträge folgt

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G} + q(\nabla\Phi + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}) - \frac{q}{c}\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A}) \quad = \quad 0 \tag{27.6}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G} - q\mathbf{E} - \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} \quad = \quad 0. \tag{27.7}$$

Also liefert die obige Lagrange-Funktion tatsächlich die korrekte Bewegungsgleichung.

27.b Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes

Die Lagrange-Dichte L des elektromagnetischen Feldes eines Systems von Ladungen setzt sich aus drei Anteilen zusammen

$$L = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{c}A^\mu j_\mu + L_{\text{mech}}. \tag{27.8}$$

Der mechanische Anteil ist für Punktladungen der Masse m_i

$$L_{\text{mech}} = -\sum_i m_i c^3\int d\tau\delta^4(x - x_i(\tau)), \tag{27.9}$$

der nach Integration über d^4x den entsprechenden Anteil der Wirkung I in (27.1) ergibt. Der zweite Anteil in (27.8) beschreibt die Wechselwirkung zwischen dem Feld und der Ladung. Integration dieses Anteils für Punktladungen unter Verwendung von

$$j_\mu(\mathbf{r},t) = \sum_i q_i\frac{dx_{i,\mu}}{dt}\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) \tag{27.10}$$

ergibt den entsprechenden Anteil in (27.1). Der erste Anteil ist der Beitrag des freien Feldes. Dass er die korrekten Maxwell-Gleichungen ergibt, werden wir unten nachprüfen. Die Wirkung selbst ergibt sich zu

$$I = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^4x L(x) = \int dt \int d^3x L(\mathbf{x}, t) = \int dt \mathcal{L}(t), \quad \mathcal{L}(t) = \int d^3x L(\mathbf{x}, t). \tag{27.11}$$

Die Wirkung muss nun extremal unter Variation der Felder A sein. Dabei betrachten wir F als Funktion von A (25.3), $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Dann ergibt die Variation bezüglich A

$$\begin{aligned} \delta L &= -\frac{1}{8\pi} F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} - \frac{1}{\mathrm{c}} j_\nu \delta A^\nu & (27.12)\\ \delta F^{\mu\nu} &= \delta(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu & (27.13)\\ F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} &= F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu - F_{\mu\nu} \partial^\nu \delta A^\mu = 2 F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu & (27.14)\\ \delta L &= -\frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu - \frac{1}{\mathrm{c}} j_\nu \delta A^\nu. & (27.15) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Variation der Wirkung nach A

$$\begin{aligned} \delta I &= \int d^4x \big(-\frac{1}{4\pi \mathrm{c}} F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu - \frac{1}{\mathrm{c}^2} j_\nu \delta A^\nu \big) \\ &= -\int d^4x \frac{1}{4\pi \mathrm{c}} \partial^\mu (F_{\mu\nu} \delta A^\nu) + \int d^4x \big(\frac{1}{4\pi \mathrm{c}} \partial^\mu F_{\mu\nu} - \frac{1}{\mathrm{c}^2} j_\nu \big) \delta A^\nu. \end{aligned} \tag{27.16}$$

Der erste Term der zweiten Zeile ist ein Oberflächen-Term (im vier-dimensionalen Raum). Aus dem zweiten Term folgen die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (25.7)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^\nu. \tag{27.17}$$

Die homogenen Maxwell-Gleichungen sind bereits durch die Darstellung $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\nu$ erfüllt. Generell erhält man für eine Lagrange-Dichte, die von einem Feld (A^μ) und deren Ableitungen abhängt, durch Variation

$$\begin{aligned} \mathrm{c} \delta I &= \int d^4x \delta L(x) \\ &= \int d^4x \left(\frac{\delta L}{\delta A^\nu(x)} \delta A^\nu(x) + \frac{\delta L}{\delta \partial^\mu A^\nu(x)} \partial^\mu \delta A^\nu(x) \right) \\ &= \int d^4x \partial^\mu \left(\frac{\delta L}{\delta \partial^\mu A^\nu(x)} \delta A^\nu(x) \right) + \int d^4x \left(\frac{\delta L}{\delta A^\nu(x)} - \partial^\mu \left(\frac{\delta L}{\delta \partial^\mu A^\nu(x)} \right) \right) \delta A^\nu(x). \end{aligned} \tag{27.18}$$

Es ist üblich, die partiellen Ableitungen von L nach A beziehungsweise ∂A mit $\delta L / \delta ...$ zu bezeichnen. Da die Variation verschwinden muss, folgen allgemein die Bewegungsgleichungen

$$\partial^\mu \left(\frac{\delta L}{\delta \partial^\mu A^\nu(x)} \right) - \frac{\delta L}{\delta A^\nu(x)} = 0. \tag{27.19}$$

Dies ist die Verallgemeinerung der Lagrangeschen Bewegungsgleichung (27.3) auf Felder. Neben der Zeitableitung von $\delta L / \delta \dot{A}^\nu$ treten auch die räumlichen Ableitungen von $\delta L / \delta \nabla A^\nu$ auf.

28 Energie-Impuls-Tensor und Erhaltungsgrößen

28.a Der Tensor

Im Abschnitt 15.b hatten wir aus der Dichte der Lorentz-Kraft einen Erhaltungssatz für den Impuls des elektromagnetischen Feldes "im Vakuum", das heißt ohne Berücksichtigung zusätzlicher Beiträge in Materie hergeleitet

$$
\begin{aligned}
-\mathbf{k} &= \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}_{\mathrm{s}} - \frac{\partial}{\partial x^\beta}T^{\alpha\beta}\mathbf{e}^\alpha, && (28.1)\\
\mathbf{g}_{\mathrm{s}} &= \frac{1}{4\pi \mathrm{c}}\mathbf{E}\times\mathbf{B}, && (28.2)\\
T^{\alpha\beta} &= \frac{1}{4\pi}\big(E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta\big) - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{8\pi}\big(E^2+B^2\big). && (28.3)
\end{aligned}
$$

Als nullte Komponente müssen wir die Energiedichte betrachten. Für diese hatten wir in Abschnitt 15.a gefunden

$$
\begin{aligned}
-k^0 &= -\frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{\mathrm{c}}\,\mathrm{div}\,\mathbf{S} + \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{u} && (28.4)\\
\mathbf{S} &= \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B} && (28.5)\\
u &= \frac{1}{8\pi}\big(E^2+B^2\big). && (28.6)
\end{aligned}
$$

Wir fassen zusammen

$$-k^\mu = -\partial_\nu T^{\mu\nu} \qquad (28.7)$$

mit dem elektromagnetischen Energie-Impuls-Tensor

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -u & -\frac{1}{\mathrm{c}}S_1 & -\frac{1}{\mathrm{c}}S_2 & -\frac{1}{\mathrm{c}}S_3 \\ -\mathrm{c}g_{\mathrm{s}1} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ -\mathrm{c}g_{\mathrm{s}2} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ -\mathrm{c}g_{\mathrm{s}3} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}. \qquad (28.8)$$

Man beobachtet, dass $T^{\mu\nu}$ symmetrisch ist, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, da $T_{\alpha\beta}$ symmetrisch ist und $\mathrm{c}\mathbf{g}_{\mathrm{s}} = \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ gilt. Man prüft leicht nach, dass

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\big(-F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^\kappa{}_\lambda F^\lambda{}_\kappa\big) \qquad (28.9)$$

gilt, entweder durch explizites Auswerten und Vergleich oder aus

$$k^\mu = \frac{1}{\mathrm{c}}j_\lambda F^{\mu\lambda} = \frac{1}{4\pi}(\partial^\nu F_{\nu\lambda})F^{\mu\lambda} = \frac{1}{4\pi}\partial^\nu(F_{\nu\lambda}F^{\mu\lambda}) - \frac{1}{4\pi}F_{\nu\lambda}\partial^\nu F^{\mu\lambda}. \qquad (28.10)$$

Nun folgt aus

$$F_{\nu\lambda}\big(\partial^\nu F^{\mu\lambda} + \partial^\mu F^{\lambda\nu} + \partial^\lambda F^{\nu\mu}\big) = 0 \qquad (28.11)$$

die Beziehung

$$\frac{1}{2}\partial^\mu\big(F_{\nu\lambda}F^{\lambda\nu}\big) + 2F_{\nu\lambda}\partial^\nu F^{\mu\lambda} = 0, \qquad (28.12)$$

so dass wir schließlich

$$
\begin{aligned}
k^\mu &= \frac{1}{4\pi}\partial^\nu\big(F_{\nu\lambda}F^{\mu\lambda}\big) + \frac{1}{16\pi}\partial^\mu\big(F_{\nu\lambda}F^{\lambda\nu}\big)\\
&= \frac{1}{4\pi}\partial_\nu\big(-F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^\kappa{}_\lambda F^\lambda{}_\kappa\big) && (28.13)
\end{aligned}
$$

erhalten. $T^{\mu\nu}$ ist ein Vierer-Tensor, das heißt er transformiert sich gemäß

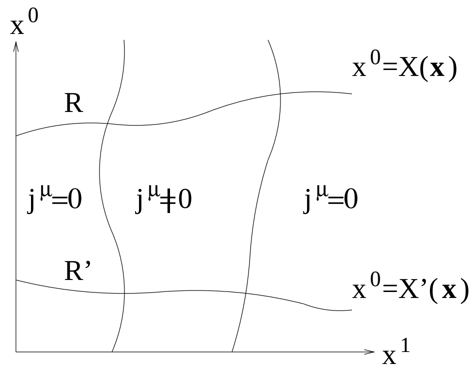
$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\kappa \Lambda^\nu{}_\lambda T^{\kappa\lambda}. \qquad (28.14)$$

28.b Erhaltungssätze

Wir gehen aus von einem Vierervektorfeld $(j^\mu(x))$. In jedem dreidimensionalen raumartigen Unterraum R des vierdimensionalen Raums sei (j^μ) nur in einem endlichen Bereich von Null verschieden. Mit raumartig bezeichnen wir einen Raum, wenn je zwei Punkte des Raumes einen raumartigen Abstand haben. Eine Weltlinie, das heißt eine Linie, die überall Unterlichtgeschwindigkeit hat, durchstößt einen raumartigen Unterraum in genau einem Punkt. Trägt man den Unterraum als $x^0(\mathbf{r})$ auf, so ist die Steigung stets kleiner 1. Für die Weltlinie ist die Steigung dagegen überall größer 1. Die Punkte konstanter Zeit eines Inertialsystems bilden zum Beispiel einen raumartigen Raum. Wir integrieren nun die Divergenz $\partial_\mu j^\mu$ über das vierdimensionale Volumen Ω, das von zwei raumartigen Räumen R und R' begrenzt wird und erhalten

$$\int_\Omega d^4x \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = \int_R d^3x \big(j^0 - \frac{\partial X}{\partial x^\alpha} j^\alpha\big) - \int_{R'} d^3x \big(j^0 - \frac{\partial X'}{\partial x^\alpha} j^\alpha\big). \tag{28.15}$$

Den Beitrag $\partial_\mu j^\mu$ integriert man einfach in x^μ-Richtung bis zur Begrenzung R beziehungsweise R' oder bis j^μ verschwindet. Für die 0-Komponente ergibt das unmittelbar den angegebenen Beitrag. Für die 1-Komponente bleibt zunächst das Integral $\pm \int dx^0 dx^2 dx^3 j^1$ an der Berandung.Die dx^0-Integration lässt sich aber in eine $dx^1 \frac{\partial X}{\partial x^1}$-Integration umformen. Wächst (fällt) $X = x^0$ auf der Berandung mit x^1, so handelt es sich um die untere (obere) Grenze der Integration. Daher das Minus-Zeichen vor $\frac{\partial X}{\partial x^1}$. Entsprechendes gilt für die anderen Raumkomponenten.Wir können uns auch noch davon überzeugen, dass



$$\int_R d^3x \big(j^0 - \frac{\partial X}{\partial x^\alpha} j^\alpha\big) = \int_R dV_\mu j^\mu \tag{28.16}$$

mit $(dV_\mu) = (1, -\nabla X)d^3x$ ein Viererskalar ist. Führen wir nämlich einen Vierervektor $(\bar{j}^\mu)$ so ein, dass

$$\bar{j}^\mu = \begin{cases} j^\mu & \text{in } R \\ 0 & \text{in } R' \end{cases}, \tag{28.17}$$

so folgt

$$\int_R dV_\mu j^\mu = \int_R dV_\mu \bar{j}^\mu = \int_\Omega d^4x \frac{\partial \bar{j}^\mu}{\partial x^\mu}, \tag{28.18}$$

wobei letzteres Integral offensichtlich ein Viererskalar ist, da sowohl d^4x wie auch die Vierer-Divergenz von $\bar{j}$ ein Viererskalar ist. Da aber das Feld (j^μ) beliebig ist, gilt für jedes infinitesimale (dV_μ) aus R, dass $dV_\mu j^\mu$ ein Viererskalar ist. Da (j^μ) Vierervektor ist, muss auch (dV^μ) Vierervektor sein. Damit können wir (28.16) schreiben als

$$\int_\Omega d^4x \partial_\mu j^\mu = \int_R dV_\mu j^\mu - \int_{R'} dV_\mu j^\mu. \tag{28.19}$$

Dies ist der Gaußsche Satz in vier Dimensionen.
Wir ziehen nun Folgerungen daraus:

28.b.α Ladung

(j^μ) sei der Viererstrom der Ladungsdichte. Aus der Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ folgt für jedes raumartige R der gleiche Wert

$$q = \int_R dV_\mu j^\mu \tag{28.20}$$

für die Ladung, da das Integral der Divergenz über Ω in (28.19) verschwindet (da der Integrand verschwindet), und da man immer das gleiche R' wählen kann. Die Ladung ist daher eine Erhaltungsgröße, genauer gesagt haben wir konsistentes Verhalten gefunden, denn wir haben bereits in Unterabschnitt 24.c angenommen, dass die Ladung erhalten ist. Neu ist, dass ihre Bestimmung in einem beliebigen dreidimensionalen Unterraum möglich ist.

28.b.β Energie und Impuls

Aus

$$k^\mu = \partial_\nu T^{\mu\nu} \tag{28.21}$$

folgt

$$\int_\Omega d^4x k^\mu = \int_R dV_\nu T^{\mu\nu} - \int_{R'} dV_\nu T^{\mu\nu}. \tag{28.22}$$

In einem ladungsfreien Raum ($k^\mu = 0$), das heißt für freie elektromagnetische Wellen gilt dann, dass die Komponenten des Strahlungs-Impulses

$$G_{\rm s}^\mu = -\frac{1}{\rm c}\int_R dV_\nu T^{\mu\nu} \tag{28.23}$$

unabhängig von R sind. Sie sind also erhalten. Es sei nun (b_μ) ein beliebiger konstanter Vierervektor. Dann ist $b_\mu T^{\mu\nu}$ ein Vierervektor und $\partial_\nu(b_\mu T^{\mu\nu}) = 0$. Damit wird dann $b_\mu G_{\rm s}^\mu$ zum Viererskalar und $G_{\rm s}^\mu$ ist ein Vierervektor.
Sind nun im Vierervolumen Ω Ladungen, so gilt

$$G_{\rm s}^\mu(R) = -\frac{1}{\rm c}\int_\Omega d^4x k^\mu + G_{\rm s}^\mu(R'). \tag{28.24}$$

Für Punktladungen q_i hat man (26.7, 26.30)

$$\frac{1}{\rm c}\int d^4x k^\mu = \sum_i \int dt K_i^\mu = \sum_i \int dt \dot{G}_i^\mu = G_i^\mu(R) - G_i^\mu(R'). \tag{28.25}$$

Dabei ist $G_i^\mu(R) = m_i u_i^\mu(R)$ der Vierer-Impuls der Ladung $\#i$ an der Stelle, an der die Weltlinie der Ladung den Unterraum R durchstößt. Damit ist

$$G^\mu = G_{\rm s}^\mu(R) + \sum_i G_i^\mu(R) \tag{28.26}$$

der erhaltene Vierer-Impuls.

28.b.γ Drehimpuls und Schwerpunktsbewegung

Aus (28.7) folgt

$$\partial_\nu\big(x^\lambda T^{\mu\nu} - x^\mu T^{\lambda\nu}\big) = x^\lambda k^\mu - x^\mu k^\lambda + T^{\mu\lambda} - T^{\lambda\mu}. \tag{28.27}$$

Da der Tensor T symmetrisch ist, kürzen sich die beiden letzten Terme weg. Wir führen den Tensor

$$M_{\rm s}^{\lambda\mu}(R) = -\frac{1}{\rm c}\int_R dV_\nu (x^\lambda T^{\mu\nu} - x^\mu T^{\lambda\nu}) \tag{28.28}$$

ein. Er ist antisymmetrisch $M_{\rm s}^{\lambda\mu} = -M_{\rm s}^{\mu\lambda}$. Auf Grund von (28.19) gilt

$$M_{\rm s}^{\lambda\mu}(R) = -\frac{1}{\rm c}\int_\Omega d^4x\big(x^\lambda k^\mu - x^\mu k^\lambda\big) + M_{\rm s}^{\lambda\mu}(R'). \tag{28.29}$$

Für Punktladungen erhält man

$$\frac{1}{\rm c}\int_\Omega d^4x\big(x^\lambda k^\mu - x^\mu k^\lambda\big) = \sum_i \int dt\big(x_i^\lambda K_i^\mu - x_i^\mu K_i^\lambda\big) = \sum_i \int dt \frac{d}{dt}\big(x_i^\lambda G_i^\mu - x_i^\mu G_i^\lambda\big), \tag{28.30}$$

da $\dot{x}^\lambda G^\mu = \dot{x}^\mu G^\lambda$. Daher ist

$$M^{\lambda\mu}(R) = M_\mathrm{s}^{\lambda\mu}(R) + M_\mathrm{m}^{\lambda\mu}(R) \tag{28.31}$$

mit dem mechanischen Anteil

$$M_\mathrm{m}^{\lambda\mu}(R) = \sum_i \left(x_i^\lambda G_i^\mu - x_i^\mu G_i^\lambda\right)\big|_R \tag{28.32}$$

eine Erhaltungsgröße, das heißt $M^{\lambda\mu}(R)$ ist unabhängig von der Wahl von R. Zugleich ist $(M^{\lambda\mu})$ ein Vierertensor.
Es bleibt noch die Bedeutung von M zu bestimmen. Hierzu betrachten wir M in dem dreidimensionalen Raum R, der durch die konstante Zeit t im Inertialsystem S gegeben ist. Wir haben dann

$$M^{\lambda\mu} = -\frac{1}{\mathrm{c}}\int d^3x\left(x^\lambda T^{\mu 0} - x^\mu T^{\lambda 0}\right) + \sum_i \left(x_i^\lambda G_i^\mu - x_i^\mu G_i^\lambda\right) \tag{28.33}$$

Wir betrachten zunächst die raumartigen Komponenten

$$M^{\alpha\beta} = \int d^3x\left(x^\alpha g_\mathrm{s}^\beta - x^\beta g_\mathrm{s}^\alpha\right) + \sum_i \left(x_i^\alpha G_i^\beta - x_i^\beta G_i^\alpha\right). \tag{28.34}$$

Dies ist für $\alpha \neq \beta$ eine Komponente des Drehimpulses $\mathbf{L}$, nämlich $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}L_\gamma$. Wir haben damit die Erhaltung des Drehimpulses gefunden.
Ist eine Komponente zeitartig, so erhält man

$$M^{0\alpha} = \mathrm{c}t\Big(\int d^3x g_s^\alpha + \sum_i G_i^\alpha\Big) - \frac{1}{\mathrm{c}}\Big(\int d^3x x^\alpha u + \sum_i x_i^\alpha E_i\Big). \tag{28.35}$$

Der erste Beitrag stellt $\mathrm{c}t$ multipliziert mit dem Gesamtimpuls dar. Der zweite Beitrag ist die Summe aller Energien dividiert durch c multipliziert mit der Ortskoordinate x^α. Man kann diesen zweiten Beitrag als den Energie-Schwerpunkt (tatsächlich die α-Komponente davon) multipliziert mit der Gesamtenergie dividiert durch c auffassen. Da Gesamtimpuls und Energie konstant sind, heißt das, dass sich der Energie-Schwerpunkt mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathrm{c}^2\frac{\text{Gesamtimpuls}}{\text{Gesamtenergie}}$ bewegt. Für nichtrelativistische Geschwindigkeiten reduziert sich der mechanische Anteil auf

$$M_\mathrm{m}^{0\alpha} = \mathrm{c}\left(t\sum_i G_i^\alpha - \sum_i m_i x_i^\alpha\right). \tag{28.36}$$

Die Erhaltung dieser Größe beinhaltet die gleichförmige Bewegung des Massenschwerpunkts mit der Geschwindigkeit Gesamtimpuls durch Gesamtmasse. Relativistisch geht das in die gleichförmige Bewegung des Energieschwerpunktes über. Die Lorentz-Invarianz verknüpft diese Erhaltung mit der Erhaltung des Drehimpulses zur Erhaltung des antisymmetrischen Tensors M.

29 Feld einer beliebig bewegten Punktladung

29.a Liénard-Wiechert-Potential

Wir bestimmen zunächst das Potential am Punkt (x^μ) einer Punktladung q, die sich auf einer Weltlinie $\mathbf{r}_\mathrm{q}(t)$ bewegt. Ihre Viererstromdichte ist

$$j^\mu(x') = qv^\mu \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{r}_\mathrm{q}(t)), \quad v^\mu = (\mathrm{c}, \dot{\mathbf{r}}_\mathrm{q}(t)). \tag{29.1}$$

Das Viererpotential ergibt sich dann nach (24.29) zu

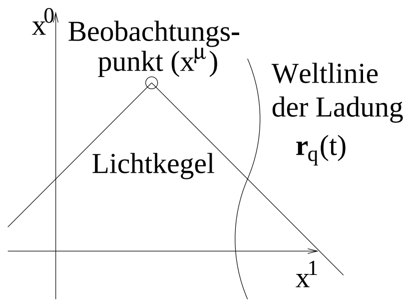
$$A^\mu(x) = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^4x' j^\mu(x') \delta(\frac{1}{2}s^2)\theta(t-t') = q \int dt' v^\mu(t') \delta(\frac{1}{2}s^2)\theta(t-t') \tag{29.2}$$

mit

$$s^2 = a^\nu a_\nu, \quad a^\nu = x^\nu - x^\nu_\mathrm{q}(t'). \tag{29.3}$$

(a^ν) ist eine Funktion von (x^ν) und t'. Das Differential von $\frac{1}{2}s^2$ ergibt sich zu

$$d(\frac{1}{2}s^2) = a_\nu da^\nu = a_\nu dx^\nu - a_\nu v^\nu dt'. \tag{29.4}$$



Damit erhält man das retardierte Liénard-Wiechert-Potential

$$A^\mu(x) = qv^\mu(t') \frac{1}{|\frac{\partial \frac{1}{2}s^2}{\partial t'}|} = \left.\frac{qv^\mu}{a_\nu v^\nu}\right|_\mathrm{r} = \left.\frac{qu^\mu}{a_\nu u^\nu}\right|_\mathrm{r}. \tag{29.5}$$

Dabei sind die beiden Ausdrücke mit dem Index $_\mathrm{r}$ zu der Zeit t' auszuwerten, zu der $s^2 = 0$ und $t > t'$. Wir beachten, dass $a_\nu v^\nu = a\mathrm{c} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} > 0$, da $a = \mathrm{c}(t - t') = |\mathbf{a}|$. Im momentanen Ruhesystem der Ladung ist $a_\nu u^\nu/\mathrm{c}$ der Abstand zwischen Beobachtungspunkt und Ladung.

29.b Die Felder

Aus den Potentialen berechnen wir nun die Felder

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{29.6}$$

Hierzu müssen wir die Ableitungen von v, a und t' bilden

$$\begin{aligned}
\partial^\mu v^\nu &= \frac{\partial v^\nu}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x_\mu} && (29.7)\\
\partial^\mu a^\nu &= \partial^\mu (x^\nu - x^\nu_\mathrm{q}(t')) = g^{\mu\nu} - v^\nu \frac{\partial t'}{\partial x_\mu} && (29.8)\\
\frac{\partial t'}{\partial x_\mu} &= \frac{a^\mu}{(a \cdot v)}, && (29.9)
\end{aligned}$$

wobei der letzte Ausdruck wegen $s^2 = 0$ aus (29.4) gewonnen wurde. Hier und im Folgenden verwenden wir

$$\begin{aligned}
(a \cdot v) &= a^\nu v_\nu = a\mathrm{c} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \mathrm{c}(a - \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta}) && (29.10)\\
(v \cdot v) &= v^\nu v_\nu = \mathrm{c}^2 - v^2 = \mathrm{c}^2(1 - \beta^2) && (29.11)\\
(a \cdot \dot{v}) &= a^\nu \dot{v}_\nu = -\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{v}}. && (29.12)
\end{aligned}$$

Damit wertet man aus

$$\begin{aligned} \partial^\mu v^\nu &= \frac{\dot v^\nu a^\mu}{(a\cdot v)} && (29.13)\\ \partial^\mu a^\nu &= g^{\mu\nu} - \frac{v^\nu a^\mu}{(a\cdot v)} && (29.14)\\ \partial^\mu (a\cdot v) &= (\partial^\mu a^\kappa)v_\kappa + a_\kappa(\partial^\mu v^\kappa)\\ &= g^{\mu\kappa}v_\kappa - \frac{v^\kappa a^\mu}{(a\cdot v)}v_\kappa + a_\kappa\frac{\dot v^\kappa a^\mu}{(a\cdot v)}\\ &= v^\mu - a^\mu\frac{(v\cdot v)}{(a\cdot v)} + a^\mu\frac{(a\cdot\dot v)}{(a\cdot v)}. && (29.15) \end{aligned}$$

Es folgt dann

$$\begin{aligned} \partial^\mu A^\nu &= \partial^\mu\left(q\frac{v^\nu}{(a\cdot v)}\right) = q\frac{\partial^\mu v^\nu}{(a\cdot v)} - q\frac{v^\nu\partial^\mu(a\cdot v)}{(a\cdot v)^2}\\ &= a^\mu b^\nu - q\frac{v^\mu v^\nu}{(a\cdot v)^2}, && (29.16)\\ b^\nu &= q\frac{v^\nu(v\cdot v) - v^\nu(a\cdot\dot v) + \dot v^\nu(a\cdot v)}{(a\cdot v)^3}. && (29.17) \end{aligned}$$

Damit ist

$$(b^\nu) = \frac{q}{(a-\mathbf{a}\cdot\boldsymbol\beta)^3}\left(1-\beta^2+\frac{\mathbf{a}\cdot\dot{\boldsymbol\beta}}{\mathrm{c}}, \boldsymbol\beta(1-\beta^2)+\frac{1}{\mathrm{c}}\boldsymbol\beta(\mathbf{a}\cdot\dot{\boldsymbol\beta})+\frac{1}{\mathrm{c}}(a-\mathbf{a}\cdot\boldsymbol\beta)\dot{\boldsymbol\beta}\right) \tag{29.18}$$

und die Felder stellen sich dar

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= a^\mu b^\nu - a^\nu b^\mu && (29.19)\\ \mathbf{E} = \mathbf{a}b^0 - a\mathbf{b} &= \frac{q(1-\beta^2)(\mathbf{a}-\boldsymbol\beta a)}{(a-\mathbf{a}\cdot\boldsymbol\beta)^3} + \frac{q\mathbf{a}\times((\mathbf{a}-\boldsymbol\beta a)\times\dot{\boldsymbol\beta})}{\mathrm{c}(a-\mathbf{a}\cdot\boldsymbol\beta)^3} && (29.20)\\ \mathbf{B} &= -\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{E}}{a} && (29.21) \end{aligned}$$

Der Beitrag proportional zur Beschleunigung $\dot{\boldsymbol\beta}$ fällt ab wie $1/a$, für diesen Beitrag bilden $\mathbf{a}$, $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ ein Orthogonal-System. Der von $\dot{\boldsymbol\beta}$ unabhängige Beitrag fällt wie $1/a^2$ ab.

29.c Gleichförmige Bewegung

(vergleiche Abschnitt 25.d). Der Skalar $\gamma a^\lambda v_\lambda/\mathrm{c}$ ist gerade der Abstand zwischen Beobachtungspunkt und Ort der Ladung im Ruhesystem der Ladung. Daher gilt

$$a - \mathbf{a}\cdot\boldsymbol\beta = \frac{1}{\gamma}|\mathbf{r}'|, \quad (a-\mathbf{a}\cdot\boldsymbol\beta)^3 = N/\gamma^3. \tag{29.22}$$

Berücksichtigt man $\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t'$, $a = c(t-t')$, so folgt

$$\mathbf{a} - \boldsymbol\beta a = \mathbf{r} - \mathbf{v}t' - \mathbf{v}t + \mathbf{v}t' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t \tag{29.23}$$

und damit

$$\mathbf{E} = \frac{q\gamma(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)}{N}, \quad \mathbf{B} = \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{v}t')\times(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)q\gamma}{c(t-t')N} = \frac{q\gamma\mathbf{v}\times\mathbf{r}}{\mathrm{c}N} \tag{29.24}$$

in Übereinstimmung mit (25.30) und (25.31).

29.d Beschleunigte Ladung momentan in Ruhe

Für $\beta = 0$ vereinfachen sich die Gleichungen (29.20) und (29.21) zu

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{q\mathbf{a}}{a^3} + \frac{q}{ca^3}\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) && (29.25) \\ \mathbf{B} &= -\frac{q}{ca^2}(\mathbf{a} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}), && (29.26) \end{aligned}$$

woraus mit der Energiestromdichte $\mathbf{S} = \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ die in den Raumwinkel $d\Omega$ abgestrahlte Leistung

$$\frac{d\dot{U}_{\mathrm{s}}}{d\Omega} = a^2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \frac{\mathrm{c}a}{4\pi}[\mathbf{a}, \mathbf{E}, \mathbf{B}] = \frac{q^2}{4\pi \mathrm{c} a^2}(\mathbf{a} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 = \frac{q^2}{4\pi \mathrm{c}^3}(\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{v}})^2 \tag{29.27}$$

und die gesamte abgestrahlte Leistung

$$\dot{U}_{\mathrm{s}} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{\mathrm{c}^3}\dot{\mathbf{v}}^2 \tag{29.28}$$

(Larmor-Formel) folgt.
Für eine harmonische Bewegung $\mathbf{r}_{\mathrm{q}} = \mathbf{r}_{0\mathrm{q}} \cos(\omega t)$ und $\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{r}_{0\mathrm{q}}\omega^2 \cos(\omega t)$ folgt

$$\dot{U}_{\mathrm{s}} = \frac{2}{3}\frac{q^2 \mathbf{r}_{0\mathrm{q}}^2}{\mathrm{c}^3}\omega^4 (\cos(\omega t))^2, \quad \overline{\dot{U}_{\mathrm{s}}} = \frac{1}{3}\frac{p_0^2}{\mathrm{c}^3}\omega^4 \tag{29.29}$$

in Übereinstimmung mit Abschnitt 22.b. Dies gilt für $\beta \ll 1$. Sonst hat man in 22.b auch Quadrupol- und höhere Multipolanteile zu berücksichtigen und hier, dass β nicht mehr vernachlässigt werden kann, was auf zusätzliche Beiträge der Ordnung ω^6 und höher führt.

29.e Abstrahlung, $\beta \neq 0$

Wir hatten gesehen, dass die Ladung im momentanen Ruhesystem die Leistung $\dot{U}_{\mathrm{s}} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{\mathrm{c}^3}\dot{\mathbf{v}}^2$ abstrahlt. Der abgestrahlte Impuls ist Null wegen der Symmetrie der Strahlung (ohne Berücksichtigung des statischen Anteils von $\mathbf{E}$, der aber so rasch abnimmt, dass er für hinreichend großes a nichts mehr beiträgt)

$$\mathbf{E}(-\mathbf{a}) = \mathbf{E}(\mathbf{a}), \quad \mathbf{B}(-\mathbf{a}) = -\mathbf{B}(\mathbf{a}), \quad T_{\alpha\beta}(-\mathbf{a}) = T_{\alpha\beta}(\mathbf{a}). \tag{29.30}$$

Wir können daher den pro Eigenzeit abgestrahlten Impuls-Energie-Vektor schreiben als

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\mathrm{c}}U_{\mathrm{s}}, \mathbf{G}_{\mathrm{s}}\right) = \frac{u^\mu}{\mathrm{c}}\frac{2q^2}{3\mathrm{c}^3}\left(-\frac{du^\lambda}{d\tau}\frac{du_\lambda}{d\tau}\right), \tag{29.31}$$

da $\dot{u}^0 = \mathrm{c}\dot{\gamma} \propto \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = 0$. Da die Formel lorentz-invariant geschrieben ist, gilt sie in jedem Inertialsystem, das heißt

$$\begin{aligned} \frac{dU_{\mathrm{s}}}{dt} &= \frac{d\tau}{dt}\frac{u^0}{\mathrm{c}}\frac{2q^2}{3\mathrm{c}^3}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \left(-\frac{d(\gamma v^\lambda)}{dt}\frac{d(\gamma v_\lambda)}{dt}\right) \\ &= \frac{2q^2}{3\mathrm{c}^3}\gamma^2 \left((\gamma\mathbf{v})^{\cdot}(\gamma\mathbf{v})^{\cdot} - \mathrm{c}^2\dot{\gamma}^2\right) \\ &= \frac{2q^2}{3\mathrm{c}^3}\gamma^2 \left(\gamma^2\dot{\mathbf{v}}^2 + 2\gamma\dot{\gamma}(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) + \dot{\gamma}^2(\mathbf{v}^2 - \mathrm{c}^2)\right). \end{aligned} \tag{29.32}$$

Mit $d\tau/dt \cdot u^0/\mathrm{c} = 1$ und

$$\dot{\gamma} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}^2}}}\right) = \gamma^3 \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{\mathrm{c}^2} \tag{29.33}$$

folgt schließlich

$$\dot{U}_{\mathrm{s}} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{\mathrm{c}^3}\left(\gamma^4\dot{\mathbf{v}}^2 + \gamma^6\frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{\mathrm{c}^2}\right). \tag{29.34}$$

Beim Umlaufen in einem Synchrotron vom Radius r ist die Beschleunigung $\dot{v} = v^2/r$ senkrecht zur Bewegungsrichtung. Daraus folgt

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{2}{3} q^2 \mathrm{c} \beta^4 \gamma^4 / r^2 = \frac{2}{3} q^2 \mathrm{c} (\gamma^2 - 1)^2 / r^2. \tag{29.35}$$

Pro Umlauf ist die abgestrahlte Energie

$$\Delta U_\mathrm{s} = \frac{2\pi r}{v} \dot{U}_\mathrm{s} = \frac{4\pi}{3} q^2 \beta^3 \gamma^4 / r. \tag{29.36}$$

Bei Desy ergibt sich für ein umlaufendes Elektron der Energie E =7.5 GeV und $m_\mathrm{e}\mathrm{c}^2$ =0.5 MeV ein Wert $\gamma = E/(m_\mathrm{e}\mathrm{c}^2) = 15000$. Für $r = 32$ m folgt dann $\Delta U = 9.5$ MeV. Bei Petra hat man mit $E = 19$GeV ein $\gamma = 38000$ und mit $r = 367$m eine Energieabstrahlung von $\Delta U = 34$MeV pro Umlauf.
Aufgabe Hera bei Desy hat $r = 1008$m und arbeitet mit Elektronen von $E_\mathrm{e} = 30$GeV und Protonen von $E\mathrm{p} = 820$GeV. Man berechne deren Energieabstrahlung pro Umlauf.