C Magnetostatik

©2003 Franz Wegner Universität Heidelberg

In diesem Kapitel behandeln wir die Magnetostatik ausgehend von den Gleichungen, die für zeitunabhängige Ströme am Anfang des Abschnittes (3.a) hergeleitet wurden.

9 Magnetische Induktion und Vektorpotential

9.a Amperegesetz

Aus

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \tag{9.1}$$

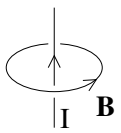
folgt

$$\int \mathrm{d}\mathbf{f}\cdot \operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c}\int \mathrm{d}\mathbf{f}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}), \tag{9.2}$$

was mit Hilfe des Stokesschen Satzes (B.56)

$$\oint \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c}I \tag{9.3}$$

geschrieben werden kann. Das Linienintegral der magnetischen Induktion **B** über eine geschlossene Kurve ergibt das $4\pi/c$ fache des Stromes I durch die Kurve. Dies ist das Amperesche Gesetz.Dabei gilt die Korkenzieher-Regel: Der Strom ist in die Richtung zu messen, in die sich der Korkenzieher bei Drehung in die Richtung des Linienintegrals bewegt.



9.b Magnetischer Fluss

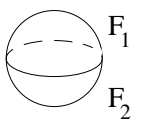
Als magnetischen Fluss Ψ^{m} durch eine gerichtete Fläche F bezeichnet man das Integral

$$\Psi^{\mathrm{m}} = \int_F \mathrm{d}\mathbf{f}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}). \tag{9.4}$$

Der magnetische Fluss hängt nur von der Berandung ∂F der Fläche ab. Zum Beweis bilden wir die Differenz des Flusses durch zwei Flächen F_1 und F_2 mit der gleichen Berandung und erhalten

$$\Psi_1^{\mathrm{m}} - \Psi_2^{\mathrm{m}} = \int_{F_1}\mathrm{d}\mathbf{f}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}) - \int_{F_2}\mathrm{d}\mathbf{f}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_F \mathrm{d}\mathbf{f}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_V \mathrm{d}^3 r\,\operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \tag{9.5}$$

mit Hilfe des Gaussschen Satzes (B.59) und $\operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$.Dabei seien F_1 und F_2 in die gleiche Richtung (zum Beispiel nach oben) orientiert. Die geschlossene Fläche F setzt sich aus F_1 und F_2 zusammen, wobei F_2 jetzt in der umgekehrten Richtung orientiert sei.Dann hat F eine bestimmte Orientierung (zum Beispiel nach außen) und schließt das Volumen V ein.



9.c Feld einer Stromverteilung

Aus $\text{rot}\,\text{rot}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (4\pi/c)\,\text{rot}\,\mathbf{j}(\mathbf{r})$ folgt wegen (B.26)

$$\text{rot}\,\text{rot}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{grad}\,\text{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) - \triangle\mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{9.6}$$

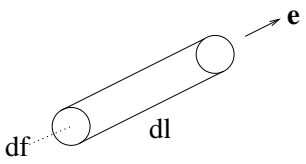
und $\text{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$

$$\triangle\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{c}\,\text{rot}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}) \tag{9.7}$$

mit der Lösung

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\text{rot}\,'\mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r'\Big(\nabla'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big)\times\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r'\frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\times\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \tag{9.8}$$

wobei wir beim zweiten Gleichheitszeichen (B.63) verwendet haben. Der letzte Ausdruck wird als das Gesetz von Biot und Savart bezeichnet.Ist die Ausdehnung eines Drahtes senkrecht zur Stromrichtung vernachlässigbar klein (Stromfaden), so kann man $\mathrm{d}^3r'\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathrm{d}f'\mathrm{d}l'\,j(\mathbf{r}')\mathbf{e} = I\mathrm{d}\mathbf{r}'$ approximieren und erhält



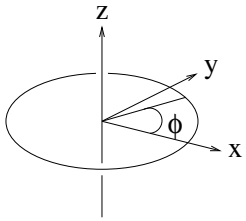
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{c}\int\frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\times\mathrm{d}\mathbf{r}' \tag{9.9}$$

Als Beispiel betrachten wir die Induktion in der Mittelachse eines Kreisstromes

$$\mathbf{r} = z\mathbf{e}_z,\quad \mathbf{r}' = (R\cos\phi, R\sin\phi, z')\quad \mathrm{d}\mathbf{r}' = (-R\sin\phi, R\cos\phi, 0)\mathrm{d}\phi \tag{9.10}$$

$$(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\times\mathrm{d}\mathbf{r}' = (R(z-z')\cos\phi, R(z-z')\sin\phi, R^2)\mathrm{d}\phi \tag{9.11}$$

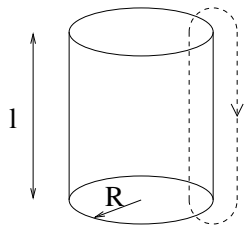
$$\mathbf{B}(0,0,z) = \frac{2\pi IR^2\mathbf{e}_z}{c(R^2+(z-z')^2)^{3/2}}. \tag{9.12}$$



Davon ausgehend berechnen wir das Feld in der Mittelachse einer Spule. Sie habe N Windungen und reiche von $z' = -l/2$ bis $z' = +l/2$. Wir erhalten dann

$$\mathbf{B}(0,0,z) = \int_{-l/2}^{+l/2}\frac{N\mathrm{d}z'}{l}\frac{2\pi IR^2\mathbf{e}_z}{c(R^2+(z-z')^2)^{3/2}} = \frac{2\pi IN}{cl}\mathbf{e}_z\left(\frac{\frac{l}{2}-z}{\sqrt{R^2+(\frac{l}{2}-z)^2}}+\frac{\frac{l}{2}+z}{\sqrt{R^2+(\frac{l}{2}+z)^2}}\right). \tag{9.13}$$

Ist die Spule lang, $R \ll l$, dann kann man für hinreichend große Entfernung vom Spulenende das R^2 im Nenner vernachlässigen und erhält für das Innere der Spule



$$\mathbf{B} = \frac{4\pi IN}{cl}\mathbf{e}_z. \tag{9.14}$$

An den Spulenenden ist das Feld auf die Hälfte des Wertes im Inneren abgefallen. Aus dem Ampereschen Gesetz folgt bei Integration längs des in der Figur angegebenen Weges

$$\oint\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}IN. \tag{9.15}$$

Daher gilt im Innern näherungsweise der in (9.14) bestimmte Wert, während außerhalb die magnetische Induktion klein dagegen ist.

9.d Vektorpotential

Wir formen den Ausdruck für die magnetische Induktion um

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r'\Big(\nabla'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big)\times\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r'\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\times\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \text{rot}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}) \tag{9.16}$$

mit

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3 r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{9.17}$$

Man bezeichnet $\mathbf{A}$ als das Vektorpotential. Man betrachte den analogen Zusammenhang zwischen Ladungsdichte ρ und dem elektrischen Potential Φ in der Elektrostatik (3.14). Wir zeigen noch, dass $\mathbf{A}$ divergenzfrei ist

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3 r' \left(\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3 r' \left(\nabla'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla'\mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0.\end{aligned} \tag{9.18}$$

Bei dem dritten Gleichheitszeichen haben wir partiell integriert (B.62). Am Schluss haben wir $\operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$ verwendet.

9.e Kraft zwischen zwei Stromkreisen

Wir betrachten noch die Kraft zwischen zwei Stromkreisen. Die Kraft, die der Stromkreis (1) auf den Stromkreis (2) ausübt, ist

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_2 &= \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3 r \mathbf{j}_2(\mathbf{r})\times\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{c^2}\int \mathrm{d}^3 r \mathrm{d}^3 r' \mathbf{j}_2(\mathbf{r})\times\left(\left(\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\times\mathbf{j}_1(\mathbf{r}')\right) \\ &= \frac{1}{c^2}\int \mathrm{d}^3 r \mathrm{d}^3 r' \Big(\mathbf{j}_1(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r})\Big)\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{c^2}\int \mathrm{d}^3 r \mathrm{d}^3 r' \left(\left(\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r})\right)\mathbf{j}_1(\mathbf{r}')\end{aligned} \tag{9.19}$$

unter Verwendung von (B.14). Da wegen (B.62)

$$\int \mathrm{d}^3 r\Big(\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big)\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) = -\int \mathrm{d}^3 r \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) \tag{9.20}$$

und $\operatorname{div}\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) = 0$, folgt schließlich für die Kraft

$$\mathbf{K}_2 = \frac{1}{c^2}\int \mathrm{d}^3 r \mathrm{d}^3 r' \Big(\mathbf{j}_1(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r})\Big)\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{9.21}$$

Die auf den ersten Stromkreis wirkende Kraft erhält man durch Austauschen von 1 und 2. Gleichzeitig kann man $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ austauschen. Man sieht dann, dass

$$\mathbf{K}_1 = -\mathbf{K}_2 \tag{9.22}$$

gilt.

Aufgabe Berechne die Kraft zwischen zwei von Strömen I_1 und I_2 durchlaufenen Drähten, die über die Länge l parallel im Abstand r ($r \ll l$) laufen. Hieraus bestimmten Kohlrausch und Weber die Lichtgeschwindigkeit.

10 Ringströme als magnetische Dipole

10.a Lokalisierte Stromverteilung und magnetischer Dipol

Wir betrachten eine Stromverteilung, die außerhalb einer Kugel vom Radius R verschwindet ($\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathbf{0}$ für $r' > R$) und fragen nach der magnetischen Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ für $r > R$. Wir können dann das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (9.17) ähnlich wie das elektrische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ in Abschnitt (4) entwickeln

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{cr}\int \mathrm{d}^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \frac{x_\alpha}{cr^3}\int \mathrm{d}^3r' x'_\alpha \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \ldots \tag{10.1}$$

Da durch die Kugeloberfläche kein Strom fließt, folgt

$$0 = \int \mathrm{d}\mathbf{f}\cdot g(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}^3r \,\mathrm{div}\,(g(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r})) = \int \mathrm{d}^3r \,\mathrm{grad}\, g(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}) + \int \mathrm{d}^3r g(\mathbf{r})\,\mathrm{div}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}), \tag{10.2}$$

wobei die Integrale über die Oberfläche beziehungsweise das Volumen der Kugel erstreckt werden. Aus der Kontinuitätsgleichung (1.12,3.1) folgt also

$$\int \mathrm{d}^3r \,\mathrm{grad}\, g(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0. \tag{10.3}$$

Dies verwenden wir, um die Integrale in der Entwicklung (10.1) zu vereinfachen. Mit $g(\mathbf{r}) = x_\alpha$ folgt

$$\int \mathrm{d}^3r j_\alpha(\mathbf{r}) = 0. \tag{10.4}$$

Damit fällt der erste Term der Entwicklung weg. Es gibt keinen mit $1/r$ abfallenden Beitrag im Vektorpotential für die Magnetostatik, das heißt keinen magnetischen Monopol. Mit $g(\mathbf{r}) = x_\alpha x_\beta$ folgt

$$\int \mathrm{d}^3r\Big(x_\alpha j_\beta(\mathbf{r}) + x_\beta j_\alpha(\mathbf{r})\Big) = 0. \tag{10.5}$$

Damit können wir umformen

$$\int \mathrm{d}^3r x_\alpha j_\beta = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r(x_\alpha j_\beta - x_\beta j_\alpha) + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r(x_\alpha j_\beta + x_\beta j_\alpha). \tag{10.6}$$

Das zweite Integral verschwindet, wie wir gerade gesehen haben. Das erste ändert sein Vorzeichen bei Austausch der Indices α und β. Man führt ein

$$\int \mathrm{d}^3r x_\alpha j_\beta = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r(x_\alpha j_\beta - x_\beta j_\alpha) = c\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}m_\gamma \tag{10.7}$$

und bezeichnet den sich daraus ergebenden Vektor

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\int \mathrm{d}^3r'(\mathbf{r}'\times\mathbf{j}(\mathbf{r}')) \tag{10.8}$$

als das magnetische Dipolmoment. Damit folgt dann

$$A_\beta(\mathbf{r}) = \frac{x_\alpha}{cr^3}c\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}m_\gamma + \ldots \tag{10.9}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3} + \ldots \tag{10.10}$$

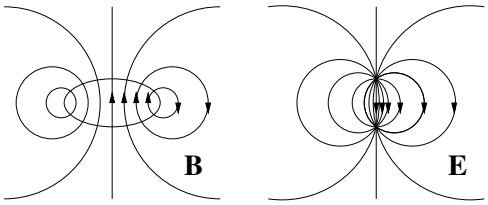
Mit $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}(\mathbf{r})$ folgt

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{m}r^2}{r^5} + \ldots \tag{10.11}$$

Dies ist das Feld eines magnetischen Dipols. Es hat die gleiche Form wie das elektrische Feld des elektrischen Dipols (4.12)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad}\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\right) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{p}r^2}{r^5}, \tag{10.12}$$

aber es besteht ein Unterschied am Ort des Dipols. Anschaulich entnimmt man das der nebenstehenden Figur. Man berechne den $\delta^3(\mathbf{r})$-Beitrag zu den beiden Dipolmomenten. Vergleiche (B.71).



10.b Magnetisches Dipolmoment eines Ringstroms

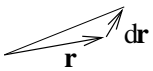
Für das Dipolmoment eines Stromes auf einer geschlossenen Kurve erhält man

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2c}\int \mathbf{r}\times \mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{I}{c}\mathbf{f}, \tag{10.13}$$

zum Beispiel

$$m_z = \frac{I}{2c}\int (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) = \frac{I}{c}f_z. \tag{10.14}$$

Dabei ist f_α die Projektion der vom Leiter eingeschlossenen Fläche auf die von den beiden anderen Achsen aufgespannte Ebene



$$\mathrm{d}\mathbf{f} = \frac{1}{2}\mathbf{r}\times\mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{10.15}$$

Falls $\mathbf{j} = \sum_i q_i\mathbf{v}_i\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)$, dann folgt für das magnetische Moment aus (10.8)

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\sum_i q_i\mathbf{r}_i\times\mathbf{v}_i = \sum_i \frac{q_i}{2m_i c}\mathbf{l}_i, \tag{10.16}$$

wobei m_i für die Masse und $\mathbf{l}_i$ für den Drehimpuls steht. Haben wir es mit einer Sorte Ladungsträger zu tun, dann gilt

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2mc}\mathbf{l}. \tag{10.17}$$

Dies gilt für Orbitalströme. Für Spins hat man dagegen

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2mc}g\mathbf{s}, \tag{10.18}$$

wobei $\mathbf{s}$ der Drehimpuls des Spins ist. Für Elektronen ist der gyromagnetische Faktor $g = 2.0023$ und die Komponenten des Spins $\mathbf{s}$ nehmen die Werte $\pm\hbar/2$ an. Da der Bahndrehimpuls quantenmechanisch ganzzahlige Vielfache von $\hbar$ annimmt, führt man als Einheit des magnetischen Moments des Elektrons das Bohrsche Magneton ein, $\mu_B = \frac{e_0\hbar}{2m_0c} = 0.927\cdot 10^{-20}\ \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^2$.

10.c Kraft und Drehmoment auf einen Dipol im äußeren magnetischen Feld

10.c.α Kraft

Eine äußere magnetische Induktion $\mathbf{B}_\mathrm{a}$ übt auf einen Ringstrom die Lorentz-Kraft

$$\mathbf{K} = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r\mathbf{j}(\mathbf{r})\times\mathbf{B}_\mathrm{a}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c}\mathbf{B}_\mathrm{a}(0)\times\int \mathrm{d}^3r\mathbf{j}(\mathbf{r}) - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha}\times\int \mathrm{d}^3r x_\alpha j_\beta(\mathbf{r})\mathbf{e}_\beta - \ldots = -\frac{\partial\mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha}\times\mathbf{e}_\beta\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}m_\gamma \tag{10.19}$$

aus. Wir formen $m_\gamma \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \mathbf{e}_\beta = m_\gamma \mathbf{e}_\gamma \times \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{m} \times \mathbf{e}_\alpha$ um und finden

$$\mathbf{K} = -\frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{e}_\alpha) = (\mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha})\mathbf{e}_\alpha - (\mathbf{e}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha})\mathbf{m}. \tag{10.20}$$

Der letzte Term verschwindet wegen $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Für den ersten Term der rechten Seite erhalten wir $(\mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha})\mathbf{e}_\alpha = m_\gamma \frac{\partial B_{\mathrm{a},\gamma}}{\partial x_\alpha} \mathbf{e}_\alpha = m_\gamma \frac{\partial B_{\mathrm{a},\alpha}}{\partial x_\gamma} \mathbf{e}_\alpha = (\mathbf{m}\nabla)\mathbf{B}_\mathrm{a}$, wobei wir $\operatorname{rot} \mathbf{B}_\mathrm{a} = \mathbf{0}$ in der Gegend des Dipols verwendet haben. Daher bleibt

$$\mathbf{K} = (\mathbf{m} \operatorname{grad})\mathbf{B}_\mathrm{a} \tag{10.21}$$

als Kraft auf den magnetischen Dipol ausgedrückt durch den Vektorgradienten (B.18). Dies ist in Analogie zu (4.35), wo wir als Kraft auf den elektrischen Dipol $(\mathbf{p} \operatorname{grad})\mathbf{E}_\mathrm{a}$ erhielten.

10.c.β Drehmoment

Das mechanische Drehmoment auf den magnetischen Dipol ergibt sich zu

$$\mathbf{M}_\mathrm{mech} = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}_\mathrm{a}) = -\frac{1}{c} \mathbf{B}_\mathrm{a} \int \mathrm{d}^3 r (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) + \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r (\mathbf{B}_\mathrm{a} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{j}. \tag{10.22}$$

Das erste Integral verschwindet, was man mit (10.3) und $g = r^2/2$ leicht sieht. Das zweite Integral ergibt

$$\mathbf{M}_\mathrm{mech} = \frac{1}{c} \mathbf{e}_\beta B_{\mathrm{a},\alpha} \int \mathrm{d}^3 r x_\alpha j_\beta = B_{\mathrm{a},\alpha} \mathbf{e}_\beta \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} m_\gamma = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_\mathrm{a} \tag{10.23}$$

Analog war das Drehmoment auf einen elektrischen Dipol $\mathbf{p} \times \mathbf{E}_\mathrm{a}$, (4.36).
Aus dem Kraftgesetz schließt man auf die Energie eines magnetischen Dipols im äußeren Feldes zu

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_\mathrm{a}. \tag{10.24}$$

Das ist korrekt für permanente magnetische Dipole. Aber das genaue Zustandekommen dieses Ausdrucks wird erst bei Behandlung des Induktionsgesetzes klar (Abschnitt 13).

11 Magnetismus in Materie. Feld einer Spule

11.a Magnetismus in Materie

Ähnlich wie wir die Polarisationsladungen in der Elektrostatik von den freibeweglichen Ladungen separiert haben, zerlegen wir die Stromdichte in eine freibewegliche Ladungsstromdichte $\mathbf{j}_\mathrm{f}$ und in die Magnetisierungsstromdichte $\mathbf{j}_\mathrm{M}$, die etwa von Orbitalströmen der Elektronen herrührt

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_\mathrm{M}(\mathbf{r}). \tag{11.1}$$

Wir führen dazu die Magnetisierung als magnetische Dipoldichte ein

$$\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{m}_i}{\Delta V} \tag{11.2}$$

und führen wieder den Grenzübergang zum Kontinuum durch

$$\sum_i \mathbf{m}_i f(\mathbf{r}_i) \to \int \mathrm{d}^3 r' \mathbf{M}(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}'). \tag{11.3}$$

Dann erhalten wir für das Vektorpotential unter Verwendung von (10.10)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \tag{11.4}$$

Das zweite Integral lässt sich umformen in

$$\int \mathrm{d}^3 r' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}'), \tag{11.5}$$

so dass man

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (\mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}') + c \operatorname{rot}' \mathbf{M}(\mathbf{r}')) \tag{11.6}$$

erhält. Es liegt nahe,

$$\mathbf{j}_\mathrm{M}(\mathbf{r}') = c \operatorname{rot}' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \tag{11.7}$$

als Magnetisierungsstromdichte zu interpretieren. Damit folgt dann für die magnetische Induktion

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r}). \tag{11.8}$$

Man führt nun die magnetische Feldstärke

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) := \mathbf{B}(\mathbf{r}) - 4\pi \mathbf{M}(\mathbf{r}) \tag{11.9}$$

ein, für die dann die Maxwellgleichung

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) \tag{11.10}$$

gilt. An der anderen Maxwellgleichung $\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$ ändert sich dadurch nichts.
Für para- und diamagnetische Substanzen ist für nicht zu große Feldstärken

$$\mathbf{M} = \chi_\mathrm{m} \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mu = 1 + 4\pi\chi_\mathrm{m}, \tag{11.11}$$

wobei χ_m als magnetische Suszeptibilität und μ als relative Permeabilität bezeichnet werden. Im Supraleiter erster Art ist $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ (vollständiger Diamagnetismus). Die magnetische Induktion wird dort durch Oberflächenströme vollständig aus dem Material verdrängt.
Als Randbedingungen folgt analog zur Argumentation für die dielektrische Verschiebung und die elektrische Feldstärke die Stetigkeit der Normalkomponente B_n und bei Abwesenheit von Leitungsströmen die Stetigkeit der Tangentialkomponenten $\mathbf{H}_\mathrm{t}$.
Im Gausssschen Maßsystem werden $\mathbf{M}$ und $\mathbf{H}$ genau so wie $\mathbf{B}$ in $\mathrm{dyn}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{-1}$ gemessen, während im SI-System $\mathbf{B}$ in $\mathrm{Vs/m}^2$, $\mathbf{H}$ und $\mathbf{M}$ in A/m gemessen werden. Dabei bestehen für $\mathbf{H}$ und $\mathbf{M}$ Umrechnungsfaktoren, die sich durch einen Faktor 4π unterscheiden. Genaueres siehe Anhang A.

11.b Feld einer Spule

Das Feld einer Spule längs ihrer Achse haben wir in (9.13) bestimmt. Wir wollen nun generell das Feld einer zylindrischen Spule bestimmen. Dabei wollen wir zunächst ein elektrisches Analogon einführen. Das Feld zweier Ladungen q und $-q$ an den Orten $\mathbf{r}_2$ und $\mathbf{r}_1$ ist äquivalent zum Feld einer Linie elektrischer Dipole $\mathrm{d}\mathbf{p} = q\mathrm{d}\mathbf{r}'$ von $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_1$ bis $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_2$. In der Tat finden wir für das Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot \mathrm{d}\mathbf{p}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{q(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = -\frac{q}{2}\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{\mathrm{d}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|} - \frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} \tag{11.12}$$

und damit das Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = q\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^3} - \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3}\right). \tag{11.13}$$

Das magnetische Analogon besteht nun darin, sich eine lange dünne Spule aus magnetischen Dipolen

$$\mathrm{d}\mathbf{m} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}l}\frac{f}{c}\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{NIf}{lc}\mathrm{d}\mathbf{r} \tag{11.14}$$

zusammengesetzt zu denken. Berücksichtigen wir, dass das Feld des elektrischen und des magnetischen Dipols die gleiche Form haben (10.11, 10.12) ausser am Ort des Dipols, so folgt, in dem wir q durch $q_\mathrm{m} = NIf/(lc)$ ersetzen, die magnetische Induktion

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = q_\mathrm{m}\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^3} - \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3}\right). \tag{11.15}$$

Das Feld hat also eine Form, die man durch zwei magnetische Monopole der Polstärke q_m und $-q_\mathrm{m}$ beschreiben kann. Allerdings ist am Ort der Dipole das Feld im magnetischen Fall ein anderes. Dort, das heißt im Inneren der Spule, muss nämlich wegen der Divergenzfreiheit des Feldes bzw. um das Amperesche Gesetz zu erfüllen ein zusätzliches Feld $B = 4\pi NI/(lc)$ zurückfließen.
Etwas genauer bekommt man das mit folgender Überlegung: Wir stellen die Stromdichte in Analogie zu (11.7) als Rotationen einer fiktiven Magnetisierung $\mathbf{j}_\mathrm{f} = c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M}_\mathrm{f}(\mathbf{r})$ dar. Für ein zylindrische Spule (der Querschnitt muss nicht kreisförmig zu sein) parallel zur z-Achse setzt man einfach $\mathbf{M}_\mathrm{f} = NI\mathbf{e}_z/(cl)$ im Inneren der Spule, außerhalb $\mathbf{M}_\mathrm{f} = \mathbf{0}$. Dann folgt aus

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) = 4\pi\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M}_\mathrm{f} \tag{11.16}$$

die Induktion $\mathbf{B}$ in der Form

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 4\pi\mathbf{M}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) - \mathrm{grad}\,\Psi(\mathbf{r}). \tag{11.17}$$

Die Funktion Ψ bestimmt sich aus

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 4\pi\,\mathrm{div}\,\mathbf{M}_\mathrm{f} - \triangle\Psi = 0 \tag{11.18}$$

zu

$$\Psi(\mathbf{r}) = -\int \mathrm{d}^3r'\frac{\mathrm{div}\,'\mathbf{M}_\mathrm{f}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{11.19}$$

Im vorliegenden Fall einer zylindrischen Spule ergibt die Divergenz einen Beitrag $\delta(z-z_1)NI/(cl)$ an der Grundfläche und einen Beitrag $-\delta(z-z_2)NI/(cl)$ an der Deckfläche der Spule, da die Normalkomponente von $\mathbf{B}$ auf diesen Flächen um $NI/(cl)$ springt, so dass

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{NI}{cl}\left(\int_{F_2}\frac{\mathrm{d}^2r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \int_{F_1}\frac{\mathrm{d}^2r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \tag{11.20}$$

bleibt, wobei F_2 die Deckfläche und F_1 die Grundfläche ist. Man erhält also daraus eine magnetische Induktion, als ob auf der Deckfläche und der Grundfläche der Spule eine magnetische Ladung der Flächenladungsdichte $\pm NI/(cl)$ vorhanden wäre. Dieser Beitrag führt zu einem Sprung in der Induktion an Deck- und Grundfläche, die aber durch den zusätzlichen Beitrag $4\pi\mathbf{M}_\mathrm{f}$ in der Spule kompensiert wird. Die gesamte Polstärke ergibt sich als Deck- (Grund-)fläche mal Flächenladungsdichte zu $\pm q_\mathrm{m}$. Man bezeichnet $\Psi(\mathbf{r})$ als magnetisches Potential. Wegen des zusätzlichen Beitrags $4\pi\mathbf{M}_\mathrm{f}(\mathbf{r})$ in (11.17) ist es im Gegensatz zu den Potentialen $\Phi(\mathbf{r})$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ nur von bedingtem Nutzen. Wir werden es im Weiteren nicht verwenden.

Aufgabe Man berechne Magnetfeld und magnetische Induktion für den Fall, dass die Spule mit einem Kern der Permeabilität μ gefüllt ist.
Aufgabe Man zeige, dass die z-Komponente der magnetischen Induktion proportional zur Differenz des Raumwinkels ist, unter dem vom jeweiligen Ort die (durchsichtig gedachte) Windungsfläche von außen und von innen erscheint.