D

Induktionsgesetz

Law of Induction

©2003 Franz Wegner Universität Heidelberg

12 Faradaysches Induktionsgesetz

Die Kraft auf Ladungsträger ist $q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}/c)$. Dabei ist es für die Ladungsträger einerlei, ob die Kraft vom elektrischen oder vom magnetischen Feld herrührt. Sie spüren also in einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld eine effektive Feldstärke

$$\mathbf{E}^{(\mathrm{ind})} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B} \tag{12.1}$$

mit $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}/c$. Die längs einer Leiterschleife induzierte Spannung beträgt daher

$$V^{(\mathrm{ind})} = \oint \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} + \oint(\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B})\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{12.2}$$

Das erste Integral ergibt einen Beitrag auf Grund der Magnetfeldveränderung. Für eine raumfeste Leiterschleife und veränderliches $\mathbf{B}$ folgt (da $\mathbf{v}\parallel\mathrm{d}\mathbf{r}$)

$$V^{(\mathrm{ind})} = \oint \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int \operatorname{rot}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{f} = -\frac{1}{c}\int\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{f} = -\frac{1}{c}\left.\frac{\mathrm{d}\Psi^{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{Schleife fest}\ \text{loop fixed}}. \tag{12.3}$$

Das zweite Integral in (12.2) bringt einen Beitrag auf Grund der Bewegung der Leiterschleife. Um eine Leiterschleife zu untersuchen, die sich bewegt (und verbiegt), verwenden wir eine Parameterdarstellung der Leiterschleife $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t,p)$ mit dem körperfesten Parameter p. Für festes t gilt dann $\mathrm{d}\mathbf{r} = (\partial\mathbf{r}/\partial p)\mathrm{d}p$ und

$$\mathbf{v} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} + \lambda(p,t)\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p} \tag{12.4}$$

mit einem $\lambda = \mathrm{d}p/\mathrm{d}t$, das von der Bewegung der Ladungen auf dem Leiter abhängt. Es folgt dann

$$\mathrm{d}t\oint\Big(\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\Big)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = -\frac{1}{c}\int\Big(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p}\Big)\cdot\mathbf{B}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{c}\int\mathrm{d}\mathbf{f}\cdot\mathbf{B}, \tag{12.5}$$

da $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}t$ gerade das Flächenelement ist, das in der Zeit $\mathrm{d}t$ vom Leiterelement $\mathrm{d}p$ überstrichen wird. Wir finden daher

12 Faraday's Law of Induction

The force acting on charges is $q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}/c)$. It does not matter for the charges, whether the force is exerted by the electric field or by the magnetic induction. Thus they experience in a time-dependent magnetic field an effective electric field

$$\mathbf{E}^{(\mathrm{ind})} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B} \tag{12.1}$$

with $\operatorname{curl}\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}/c$. Therefore the voltage along a loop of a conductor is given by

$$V^{(\mathrm{ind})} = \oint \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} + \oint(\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B})\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{12.2}$$

The first integral gives a contribution due to the variation of the magnetic induction. For a fixed loop and varying $\mathbf{B}$ one obtains (since $\mathbf{v}\parallel\mathrm{d}\mathbf{r}$)

$$V^{(\mathrm{ind})} = \oint \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int \operatorname{rot}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{f} = -\frac{1}{c}\int\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{f} = -\frac{1}{c}\left.\frac{\mathrm{d}\Psi^{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{Schleife fest}\ \text{loop fixed}}. \tag{12.3}$$

The second integral in (12.2) gives a contribution due to the motion of the loop. In order to investigate a loop which moves (and is distorted) we use a parameter representation of the loop $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t,p)$ with the body-fixed parameter p. For fixed t we have $\mathrm{d}\mathbf{r} = (\partial\mathbf{r}/\partial p)\mathrm{d}p$ and

$$\mathbf{v} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} + \lambda(p,t)\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p} \tag{12.4}$$

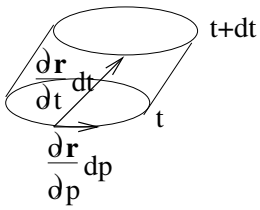
with a $\lambda = \mathrm{d}p/\mathrm{d}t$ which depends on the motion of the charges in the conductor. This yields

$$\mathrm{d}t\oint\Big(\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\Big)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = -\frac{1}{c}\int\Big(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p}\Big)\cdot\mathbf{B}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{c}\int\mathrm{d}\mathbf{f}\cdot\mathbf{B}, \tag{12.5}$$

since $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}t$ is the element of the area which in time $\mathrm{d}t$ is swept over by the conductor element $\mathrm{d}p$. Therefore we obtain

$$\oint (\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \left.\frac{\mathrm{d}\Psi^m}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathbf{B}_{\text{fest}}\ \text{fixed}} . \tag{12.6}$$

Die gesamte induzierte Spannung setzt sich aus der Änderung des Magnetflusses durch Änderung der magnetischen Induktion (12.3) und der Änderung der Leiterschleife (12.6) zusammen



The total induced voltage is composed by the change of the magnetic flux due to the change of the magnetic induction (12.3) and by the motion of the loop (12.6)

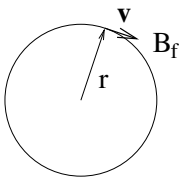
$$V^{(\text{ind})} = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\Psi^{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}, \tag{12.7}$$

ist also durch die totale Änderung des magnetischen Flusses durch die Leiterschleife gegeben.
Es ist für einen Generator gleichgültig, ob das erzeugende magnetische Feld rotiert oder die Spule, in der die Spannung induziert wird.

and is thus given by the total change of the magnetic flux through the loop.
Thus it does not matter for a generator whether the generating magnetic field rotates or whether the coil is rotating.

Das Betatron (nicht relativistisch)

Die Elektronen bewegen sich auf einer Kreisbahn und werden auf dieser durch die Lorentz-Kraft, die vom Führungsfeld B_f ausgeht, gehalten. Dann müssen sich Zentrifugal-Kraft und Lorentz-Kraft kompensieren



The betatron (non-relativistic)

The electrons move along circular orbits and are kept on these by the Lorentz force exerted by the guide field B_f. Thus the centrifugal force and the Lorentz force have to compensate each other

$$\frac{mv^2}{r} = e_0\frac{v}{c}B_\mathrm{f} \quad \rightarrow \quad mv = \frac{e_0}{c}B_\mathrm{f} r. \tag{12.8}$$

Beschleunigt werden die Elektronen durch die Induktion

The electrons are accelerated by the induction

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv) = -e_0 E = \frac{e_0}{2\pi r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{c}\int B\mathrm{d}f = \frac{e_0}{2\pi r c} r^2 \pi \frac{\mathrm{d}\bar{B}}{\mathrm{d}t}. \tag{12.9}$$

Dabei ist $\bar{B}$ die mittlere magnetische Induktion innerhalb des Kreises. Man hat also

Here $\bar{B}$ is the averaged magnetic induction inside the circle. Thus one has

$$mv = \frac{e_0}{2}\bar{B}\frac{r}{c} = \frac{e_0}{c}B_\mathrm{f} r, \tag{12.10}$$

woraus die Wideröesche Bedingung $B_\mathrm{f} = \bar{B}/2$ folgt.

from which the betatron condition $B_\mathrm{f} = \bar{B}/2$ follows.

13 Induktivitäten und Stromkreise

13.a Induktivitäten

Der magnetische Fluss durch eine Spule beziehungsweise den Stromkreis $\#j$ ist gegeben durch

$$\Psi_j^{\mathrm{m}} = \int \mathrm{d}\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_j) = \int \mathrm{d}\mathbf{f}_j \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}_j) = \oint \mathrm{d}\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_j). \tag{13.1}$$

Mehrere Stromkreise erzeugen das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_k \frac{I_k}{c} \oint \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|}. \tag{13.2}$$

Daher lässt sich der magnetische Fluss ausdrücken durch

$$\frac{1}{c}\Psi_j^{\mathrm{m}} = \sum_k L_{j,k} I_k \tag{13.3}$$

mit

$$L_{j,k} = \frac{1}{c^2} \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_j \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|}. \tag{13.4}$$

Es gilt daher $L_{j,k} = L_{k,j}$. Ist $j \neq k$, so spricht man von Gegeninduktivitäten, bei $j = k$ von Selbstinduktivitäten. Bei der Berechnung der Selbstinduktivitäten nach (13.4) tritt eine logarithmische Divergenz auf, wenn man die Stromverteilung über den Querschnitt nicht berücksichtigt. Bei einem Drahtradius r_0 muss man $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k| < r_0/(2\mathrm{e}^{1/4})$ ausschließen (vgl. Becker-Sauter), falls der Strom gleichmäßig über den kreisförmigen Querschnitt verteilt ist.

Die Dimension der Induktivitäten ergibt sich zu s^2/cm. Die Umrechnung in das SI-System ist gegeben durch $1\mathrm{s}^2/\mathrm{cm} \,\hat{=}\, 9 \cdot 10^{11}\mathrm{Vs/A} = 9 \cdot 10^{11}$ H (Henry).

Sind die Bereiche des wesentlichen magnetischen Flusses mit einem Material der Permeabilität μ ausgefüllt, so folgt aus $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}_{\mathrm{f}}/c$ der Zusammenhang $\operatorname{rot}(\mathbf{B}/\mu) = 4\pi\mathbf{j}_{\mathrm{f}}/c$, so dass

$$L_{j,k}^{\mathrm{Mat}} = \mu L_{j,k}^{\mathrm{Vak}}. \tag{13.5}$$

gilt. Man erhält also hohe Induktivitäten durch Kerne hoher Permeabilität $\mu \approx 10^3 ... 10^4$ im Joch.

13.a Inductances

The magnetic flux through a coil and a circuit $\#j$, resp. is given by

Several circuits generate the vector-potential

Therefore the magnetic flux can be expressed by

with

Therefore one has $L_{j,k} = L_{k,j}$. For $j \neq k$ they are called mutual inductances, for $j = k$ self-inductances. In calculating the self-inductances according to (13.4) logarithmic divergencies appear, when $\mathbf{r}_j$ approaches $\mathbf{r}_k$, if the current distribution across the cross-section is not taken into account. The contributions $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r} - k| < r_0/(2\mathrm{e}^{1/4})$ have to be excluded from the integral, where r_0 is the radius of the circular cross-section of the wire (compare Becker-Sauter).

The dimension of the inductances is given by s^2/cm. The conversion into the SI-system is given by $1\mathrm{s}^2/\mathrm{cm}$ $\hat{=} 9 \cdot 10^{11}\mathrm{Vs/A} = 9 \cdot 10^{11}$ H (Henry).

If the regions in which the magnetic flux is of appreciable strength is filled with a material of permeability μ, then from $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}_{\mathrm{f}}/c$ one obtains $\operatorname{rot}(\mathbf{B}/\mu) = 4\pi\mathbf{j}_{\mathrm{f}}/c$, so that

holds. Thus one obtains large inductances by cores of high permeability $\mu \approx 10^3 ... 10^4$ in the yoke.

Induktivität einer langen Spule
Ist ein geschlossenes magnetisches Joch der Länge l und des Querschnitts f mit N Drahtwindungen umwickelt, die ein Strom I durchfliesst, so folgt aus dem Ampereschen Gesetz $Hl = 4\pi IN/c$ und daraus die magnetische Induktion $B = 4\pi IN\mu/(cl)$. Der magnetische Fluss lässt sich dann $Bf = cL_0NI$ mit $L_0 = 4\pi\mu f/c^2 l$ schreiben. Für N Windungen ist der magnetische Fluss mit N zu multiplizieren, was auf die Selbstinduktion $L = L_0N^2$ führt. Für die Gegeninduktivität zwischen zwei Schleifen mit N_1 und N_2 Windungen ergibt sich dann $L_{1,2} = L_0N_1N_2$. Es gilt dann also generell

Inductance of a long coil
If a closed magnetic yoke of length l and cross-section f is surrounded by N windings of wire, through which a current I flows, then from Ampere's law $Hl = 4\pi IN/c$ one obtains the magnetic induction $B = 4\pi IN\mu/(cl)$. The magnetic flux can then be written $Bf = cL_0NI$ with $L_0 = 4\pi\mu f/c^2 l$. For N turns the magnetic flux is to be multiplied by N, which yields the self-induction $L = L_0N^2$. For mutual inductances between two circuits with N_1 and N_2 turns one obtains $L_{1,2} = L_0N_1N_2$. Thus we obtain in general

$$L_{i,j} = L_0N_iN_j, \quad L_0 = \frac{4\pi\mu f}{c^2 l}. \tag{13.6}$$

13.b Stromkreis-Elemente

Wir wollen nun Stromkreise betrachten, die folgende Elemente enthalten: Spannungsquellen, Ohmsche Widerstände, Induktivitäten und Kapazitäten. Während wir Induktivitäten und Kapazitäten bereits eingeführt haben, ist noch kurz etwas zu den beiden anderen Elementen zu sagen:

Spannungsquellen Eine Spannungsquelle habe eine Spannung oder elektromotorische Kraft $V^{(e)}(t)$. Sie führt dem System die Leistung $V^{(e)}I$ zu. Ein Beispiel stellt eine Batterie dar, die chemische Energie in elektromagnetische umwandelt. Auch die Spannungen $V^{(ind)}$ der Induktivitäten zählt man zu den elektromotorischen Kräften.

Ohmsche Widerstände Für viele Materialien ist bei nicht zu großen elektrischen Feldstärken die Stromdichte der Feldstärke proportional. Der Proportionalitätskoeffizient σ heißt Leitfähigkeit

13.b Elements of Circuits

We consider now circuits, which contain the following elements: voltage sources, ohmic resistors, inductances, and capacitors. Whereas we have already introduced inductances and capacitors, we have to say a few words on the two other elements.

Voltage sources A voltage source or electromotive force with voltage $V^{(e)}(t)$ feeds the power $V^{(e)}I$ into the system. An example is a battery which transforms chemical energy into electromagnetic one. The voltages $V^{(ind)}$ of the inductances are also called electromotive forces.

Ohmic resistors In many materials the current density and the electric field are proportional if the field is not too strong. The coefficient of proportionality σ is called conductivity

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}. \tag{13.7}$$

Für einen Draht der Länge l und des Querschnitts f folgt

For a wire of length l and cross-section f one obtains

$$I = jf = \sigma fE = \sigma\frac{f}{l}V^{(R)}. \tag{13.8}$$

Dabei ist $V^{(R)}$ der Ohmsche Spannungsabfall längs des Leiters. Man hat also das Gesetz

Here $V^{(R)}$ is the ohmic voltage drop along the conductor. Thus one has

$$V^{(R)} = RI, \quad R = \frac{l}{\sigma f} \tag{13.9}$$

mit dem Ohmschen Widerstand R. Im Gausssschen Maßsystem wird die Leitfähigkeit σ in 1/s und der Widerstand R in s/cm gemessen. Die Umrechnung in das SI-System erfolgt durch $c^{-1}\hat{=}30\Omega$. In einem Ohmschen Widerstand wird pro Zeiteinheit $V^{(R)}I$ an elektromagnetischer Energie in Wärme umgewandelt.

with the ohmic resistance R. In Gaussian units the conductivity σ is measured in 1/s and the resistance R in s/cm. The conversion into the SI-system is obtained by $c^{-1}\hat{=}30\Omega$. The electromagnetic energy is dissipated in an ohmic resistor into heat at the rate $V^{(R)}I$.

13.c Kirchhoffsche Regeln

1. Kirchhoffsche Regel (Knotenpunktsgesetz für die Ströme)

Das erste Kirchhoffsche Gesetz besagt, dass an jedem Knoten, an dem mehrere Leiter enden, die Summe der einlaufenden Ströme gleich der der auslaufenden ist

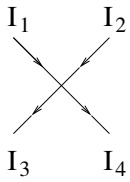
13.c Kirchhoff's Rules

Kirchhoff's first Law (Current Law)

Kirchhoff's first law states that at each electrical contact, where several wires are joined, the sum of the incoming currents equals the sum of the outgoing currents

$$\sum I_{\substack{\text{einlaufend}\\ \text{incoming}}} = \sum I_{\substack{\text{auslaufend}\\ \text{outgoing}}}. \tag{13.10}$$

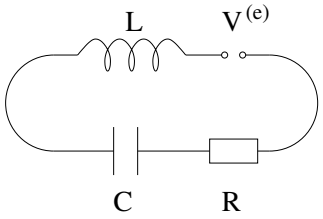
Diese Regel stellt also die makroskopische Form von $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ dar. Im nebenstehenden Fall beinhaltet sie $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$.



This rule is the macroscopic form of $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$. In the figure aside it implies $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$.

2. Kirchhoffsche Regel (Maschengesetz für die Spannungen)

Diese Regel besagt, dass längs eines Maschenumlaufs die Summe der elektromotorischen Kräfte gleich der übrigen Spannungsabfälle ist



Kirchhoff's second Law (Voltage Law)

The second law says that along a closed path the sum of electromotive forces equals the sum of the other voltage drops

$$\sum \left(V^{(\mathrm{e})} + V^{(\mathrm{ind})}\right) = \sum \left(V^{(\mathrm{R})} + V^{(\mathrm{C})}\right), \tag{13.11}$$

wobei

where

$$V^{(\mathrm{ind})} = -\mathrm{d}(LI)/\mathrm{d}t, \quad V^{(\mathrm{C})} = q/C, \quad \mathrm{d}V^{(\mathrm{C})}/\mathrm{d}t = I/C. \tag{13.12}$$

Diese Regel ist also das Faradaysche Induktionsgesetz in makroskopischer Form.

This rule is Faraday's induction law in macroscopic form.

13.d Energie von Induktivitäten

Um die Energie von Induktivitäten zu bestimmen, betrachten wir Stromkreise mit eingeprägten Spannungen, ohmschen Widerständen und induktiven Kopplungen

13.d Energy of Inductances

In order to determine the energies of inductances we consider circuits with electromotive forces, ohmic resistors and inductive couplings

$$V_j^{(\mathrm{e})} + V_j^{(\mathrm{ind})} = R_j I_j. \tag{13.13}$$

Die zeitliche Änderung der elektromagnetischen Energie des Systems ergibt sich dann zu

The variation of the electromagnetic energy as a function of time is then given by

$$\dot{U}_{\mathrm{em}} = \sum_j I_j V_j^{(\mathrm{e})} - \sum_j R_j I_j^2 + L_{\mathrm{mech}} = -\sum_j I_j V_j^{(\mathrm{ind})} + L_{\mathrm{mech}} \tag{13.14}$$

mit

$$V_j^{(\mathrm{ind})} = -\frac{1}{c}\dot{\Psi}_j^{\mathrm{m}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sum_k L_{j,k}I_k). \tag{13.15}$$

Dabei ist L_{mech} die an dem System verrichtete mechanische Leistung.

Wir betrachten nun mehrere Fälle:

with

Here L_{mech} is the mechanical power fed into the system.

Now we consider various cases:

13.d.α Konstante Induktivitäten

Wir halten die Stromkreise fest, dann gilt $L_{j,k} = \mathrm{const}$, $L_{\mathrm{mech}} = 0$. Dann folgt

$$\dot{U}_{\mathrm{em}} = \sum_{j,k} I_j L_{j,k} \dot{I}_k, \tag{13.16}$$

woraus sich die Energie der Induktivitäten zu

$$U_{\mathrm{em}} = \frac{1}{2}\sum_{j,k} I_j L_{j,k} I_k \tag{13.17}$$

ergibt.

13.d.α Constant Inductances

We keep the circuits fixed, then $L_{j,k} = \mathrm{const}$, $L_{\mathrm{mech}} = 0$ holds. From this it follows that

from which we obtain the energies of the inductances

.

13.d.β Gegeneinander bewegte Stromkreise

Wir bewegen nun die Stromkreise gegeneinander. Dann folgt

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{mech}} &= \dot{U}_{\mathrm{em}} + \sum_j I_j V_j^{(\mathrm{ind})} = \sum_{j,k}(I_j L_{j,k}\dot{I}_k + \frac{1}{2} I_j \dot{L}_{j,k} I_k) - \sum_{j,k}(I_j \dot{L}_{j,k} I_k + I_j L_{j,k}\dot{I}_k) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{j,k} I_j \dot{L}_{j,k} I_k = -\left.\frac{\partial U_{\mathrm{em}}}{\partial t}\right|_I . \end{aligned} \tag{13.18}$$

Die mechanische Arbeit, die zu verrichten ist, wird also nicht durch die Veränderung der elektromagnetischen Energie U_{em} bei konstanten Strömen I gegeben, sondern durch ihr Negatives.

13.d.β Moving Loops of Currents

Now we move the circuits against each other. This yields

Thus the mechanical work to be done is not given by the change of the electromagnetic energy U_{em} at constant currents I, but by its negative.

13.d.γ Konstante magnetische Flüsse

Falls wir keine eingeprägten Spannungen $V_j^{(\mathrm{e})} = 0$ haben und keine Widerstände $R_j = 0$, dann gilt nach (13.13) $V^{(\mathrm{ind})} = 0$, woraus folgt, dass die magnetischen Flüsse Ψ_j^{m} unverändert bleiben. Die Induktion ist also bestrebt, die Magnetflüsse aufrecht zu erhalten (Beispiel supraleitende Ringströme). Drücken wir U_{em} durch die Flüsse aus,

$$U_{\mathrm{em}} = \frac{1}{2c^2}\sum_{j,k} \Psi_j^{\mathrm{m}} (L^{-1})_{j,k} \Psi_k^{\mathrm{m}}, \tag{13.19}$$

so folgt mit der Matrix-Identität $\dot{L}^{-1} = -L^{-1}\dot{L}L^{-1}$ (die Identität erhält man durch Ableiten von $LL^{-1} = 1$ und Auflösen nach $\dot{L}^{-1}$)

$$\left.\frac{\partial U_{\mathrm{em}}}{\partial t}\right|_{\Psi^{\mathrm{m}}} = -\frac{1}{2}\sum_{j,k} I_j \dot{L}_{j,k} I_k = L_{\mathrm{mech}}. \tag{13.20}$$

13.d.γ Constant Magnetic Fluxes

In case there are no electromotive forces $V_j^{(\mathrm{e})} = 0$ and no resistors $R_j = 0$ in the loops, then according to (13.13) we have $V^{(\mathrm{ind})} = 0$, from which we conclude that the magnetic fluxes Ψ_j^{m} remain unchanged. Thus the induction tries to keep the magnetic fluxes unaltered (example superconducting loop-currents). If we express the energy U_{em} in terms of the fluxes

and use the matrix identity $\dot{L}^{-1} = -L^{-1}\dot{L}L^{-1}$ then we obtain (the identity can be obtained by differentiating $LL^{-1} = 1$ and solving for $\dot{L}^{-1}$)

Die mechanische Leistung ist daher die zeitliche Ableitung der elektromagnetischen Energie bei konstanten magnetischen Flüssen.

The mechanical power is thus the rate by which the electromagnetic energy changes at constant magnetic fluxes.

13.d.δ Kraft zwischen zwei Stromkreisen

Nach diesen Betrachtungen kommen wir auf die Kraft zwischen zwei Stromkreisen zurück. Wir hatten im Abschnitt (9.e) die Kraft des Stromkreises 1 auf den Stromkreis 2 zu (9.21)

13.d.δ Force between two Electric Circuits

After these considerations we return to the force between two electric circuits. In section (9.e) we calculated the force from circuit 1 on circuit 2 as (9.21)

$$\mathbf{K}_2 = \frac{1}{c^2}\int \mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3r'(\mathbf{j}_1(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r}))\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{13.21}$$

berechnet. Gehen wir nun zu zwei Stromfäden über

. Now if we consider two filamentary wires

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a} \qquad \mathbf{r}' = \mathbf{r}_1 \tag{13.22}$$

$$\mathrm{d}^3r'\mathbf{j}_1(\mathbf{r}') \to \mathrm{d}\mathbf{r}_1 I_1, \qquad \mathrm{d}^3r\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) \to \mathrm{d}\mathbf{r}_2 I_2, \tag{13.23}$$

so folgt

we obtain

$$\mathbf{K}_2 = \frac{I_1 I_2}{c^2}\int(\mathrm{d}\mathbf{r}_1\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}_2)\nabla_2\frac{1}{|\mathbf{r}_2+\mathbf{a}-\mathbf{r}_1|} = I_1 I_2\nabla_a L_{1,2}(\mathbf{a}). \tag{13.24}$$

Daher ist

Thus

$$L_{\mathrm{mech}} = -\mathbf{K}_2\cdot\dot{\mathbf{a}} = -I_1 I_2\dot{L}_{1,2} \tag{13.25}$$

in Übereinstimmung mit (13.18).

is in agreement with (13.18).

13.d.ϵ Energie eines magnetischen Dipols im äußeren Magnetfeld

Wir können andererseits die Wechselwirkungsenergie eines magnetischen Dipols erzeugt durch eine Stromdichte $\mathbf{j}$ in einem äußeren Feld $\mathbf{B}_\mathrm{a}$ erzeugt durch eine Stromverteilung $\mathbf{j}_\mathrm{a}$ jetzt schreiben als

13.d.ϵ Energy of a Magnetic Dipole in an External Magnetic Induction

On the other hand we may now write the interaction energy between a magnetic dipole generated by a density of current $\mathbf{j}$ in an external magnetic field $\mathbf{B}_\mathrm{a}$ generated by a density of current $\mathbf{j}_\mathrm{a}$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{c^2}\int \mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3r'(\mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}_\mathrm{a}(\mathbf{r}'))\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{c^2}\int \mathrm{d}^3r\mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot\int \mathrm{d}^3r'\frac{\mathbf{j}_\mathrm{a}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r\mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{A}_\mathrm{a}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r\mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot(\mathbf{A}_\mathrm{a}(0)+x_\alpha\nabla_\alpha\mathbf{A}_\mathrm{a}|_{r=0}+\ldots) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r x_\alpha j_\beta\nabla_\alpha A_{\mathrm{a},\beta} \\ &= \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}m_\gamma\nabla_\alpha A_{\mathrm{a},\beta} = \mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_\mathrm{a}. \end{aligned} \tag{13.26}$$

Dies ist jetzt der korrekte Ausdruck für die Wechselwirkungsenergie eines magnetischen Dipols $\mathbf{m}$ in einer äußeren magnetischen Induktion $\mathbf{B}_\mathrm{a}$.

This is the correct expression for the interaction energy of a magnetic dipole $\mathbf{m}$ in an external magnetic induction $\mathbf{B}_\mathrm{a}$.

13.d.ζ Permanente magnetische Momente

Permanente magnetische Momente kann man als Stromkreise mit sehr großer Selbstinduktivität $L_{j,j}$ und konstantem Fluss Ψ^m_j auffassen. Zur weiteren Berechnung lösen wir (13.3) nach I_j auf

13.d.ζ Permanent Magnetic Moments

Permanent magnetic moments may be considered as loop currents with large self inductance $L_{j,j}$ and constant flux Ψ^m_j. For further calculation we first solve (13.3) for I_j

$$I_j = \frac{\Psi^\mathrm{m}_j}{cL_{j,j}} - \sum_{k\neq j}\frac{L_{j,k}I_k}{L_{j,j}}. \tag{13.27}$$

Bei Verschiebung der magnetischen Momente verändern sich die Gegeninduktivitäten und man erhält

$$\dot{I}_j = -\frac{1}{L_{j,j}}\Big(\sum_{k\neq j} \dot{L}_{j,k} I_k + \sum_{k\neq j} L_{j,k}\dot{I}_k\Big). \tag{13.28}$$

Falls die Selbstinduktivitäten $L_{j,j}$ sehr groß gegen die Gegeninduktivitäten sind, ändern sich die Ströme nur wenig und die zweite Summe ist vernachlässigbar. Dann erhält man für den Selbst-Induktions-Beitrag aus der Energie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L_{j,j}I_j^2\right) = L_{j,j}I_j\dot{I}_j = -I_j\sum_{k\neq j}\dot{L}_{j,k}I_k. \tag{13.29}$$

Daher erhält man durch eine Änderung von $L_{j,k}$ den Beitrag $\dot{L}_{j,k}I_jI_k$ direkt aus der Wechselwirkung zwischen den Strömen I_j und I_k, die einen Beitrag der Form (13.26) zu U_{em} liefern, und zwei Beiträge mit dem umgekehrten Vorzeichen aus $\frac{1}{2}L_{j,j}I_j^2$ und $\frac{1}{2}L_{k,k}I_k^2$. Dies erklärt den Unterschied zwischen (10.24) und (13.26).

Upon moving the magnetic moments the mutual inductances change, and one obtains

If the self-inductances $L_{j,j}$ are very large in comparison to the mutual inductances, the currents vary only a little bit, and the second sum is negligible. Then one obtains from the self-inductance contribution of the energy

Thus one obtains from a change of $L_{j,k}$ a contribution $\dot{L}_{j,k}I_jI_k$ directly from the interaction between the currents I_j and I_k, which yields a contribution of the form (13.26) to U_{em} and two contributions with the opposite sign from $\frac{1}{2}L_{j,j}I_j^2$ and $\frac{1}{2}L_{k,k}I_k^2$. This explains the difference between (10.24) and (13.26).