D Induktionsgesetz

12 Faradaysches Induktionsgesetz

Die Kraft auf Ladungsträger ist $q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c)$. Dabei ist es für die Ladungsträger einerlei, ob die Kraft vom elektrischen oder vom magnetischen Feld herrührt. Sie spüren also in einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld eine effektive Feldstärke

$$\mathbf{E}^{(\mathrm{ind})} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \tag{12.1}$$

mit $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}/c$. Die längs einer Leiterschleife induzierte Spannung beträgt daher

$$V^{(\mathrm{ind})} = \oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \oint (\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{12.2}$$

Das erste Integral ergibt einen Beitrag auf Grund der Magnetfeldveränderung. Für eine raumfeste Leiterschleife und veränderliches $\mathbf{B}$ folgt (da $\mathbf{v} \parallel \mathrm{d}\mathbf{r}$)

$$V^{(\mathrm{ind})} = \oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int \mathrm{rot}\,\mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f} = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f} = -\frac{1}{c} \left.\frac{\mathrm{d}\Psi^{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{Schleife\ \ fest}}. \tag{12.3}$$

Das zweite Integral in (12.2) bringt einen Beitrag auf Grund der Bewegung der Leiterschleife. Um eine Leiterschleife zu untersuchen, die sich bewegt (und verbiegt), verwenden wir eine Parameterdarstellung der Leiterschleife $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, p)$ mit dem körperfesten Parameter p. Für festes t gilt dann $\mathrm{d}\mathbf{r} = (\partial \mathbf{r}/\partial p)\mathrm{d}p$ und

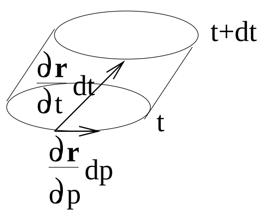
$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \lambda(p, t) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p} \tag{12.4}$$

mit einem $\lambda = \mathrm{d}p/\mathrm{d}t$, das von der Bewegung der Ladungen auf dem Leiter abhängt. Es folgt dann

$$\mathrm{d}t \oint \Big(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\Big) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \int \Big(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\Big) \cdot \mathbf{B}\, \mathrm{d}p\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{c} \int \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}, \tag{12.5}$$

da $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\, \mathrm{d}p\, \mathrm{d}t$ gerade das Flächenelement ist, das in der Zeit $\mathrm{d}t$ vom Leiterelement $\mathrm{d}p$ überstrichen wird. Wir finden daher

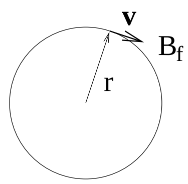
$$\oint (\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \left.\frac{\mathrm{d}\Psi^m}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathbf{B}_{\mathrm{fest}}}. \tag{12.6}$$



Die gesamte induzierte Spannung setzt sich aus der Änderung des Magnetflusses durch Änderung der magnetischen Induktion (12.3) und der Änderung der Leiterschleife (12.6) zusammen

$$V^{(\mathrm{ind})} = -\frac{1}{c} \frac{\mathrm{d}\Psi^{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}, \tag{12.7}$$

ist also durch die totale Änderung des magnetischen Flusses durch die Leiterschleife gegeben. Es ist für einen Generator gleichgültig, ob das erzeugende magnetische Feld rotiert oder die Spule, in der die Spannung induziert wird.



Das Betatron (nicht relativistisch) Die Elektronen bewegen sich auf einer Kreisbahn und werden auf dieser durch die LORENTZ-Kraft, die vom Führungsfeld B_f ausgeht, gehalten. Dann müssen sich Zentrifugal-Kraft und LORENTZ-Kraft kompensieren

$$\frac{mv^2}{r} = e_0 \frac{v}{c} B_\mathrm{f} \quad \rightarrow \quad mv = \frac{e_0}{c} B_\mathrm{f} r. \tag{12.8}$$

Beschleunigt werden die Elektronen durch die Induktion

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv) = -e_0 E = \frac{e_0}{2\pi r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{c} \int B \mathrm{d} f = \frac{e_0}{2\pi r c} r^2 \pi \frac{\mathrm{d}\bar{B}}{\mathrm{d}t}. \tag{12.9}$$

Dabei ist $\bar{B}$ die mittlere magnetische Induktion innerhalb des Kreises. Man hat also

$$mv = \frac{e_0}{2} \bar{B} \frac{r}{c} = \frac{e_0}{c} B_\mathrm{f} r, \tag{12.10}$$

woraus die WIDERÖEsche Bedingung $B_\mathrm{f} = \bar{B}/2$ folgt.

13 Induktivitäten und Stromkreise

13.a Induktivitäten

Der magnetische Fluss durch eine Spule beziehungsweise den Stromkreis $\#j$ ist gegeben durch

$$\Psi_j^{\mathrm{m}} = \int \mathrm{d}\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_j) = \int \mathrm{d}\mathbf{f}_j \cdot \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}_j) = \oint \mathrm{d}\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_j). \tag{13.1}$$

Mehrere Stromkreise erzeugen das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_k \frac{I_k}{c} \oint \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k|}. \tag{13.2}$$

Daher lässt sich der magnetische Fluss ausdrücken durch

$$\frac{1}{c}\Psi_j^{\mathrm{m}} = \sum_k L_{j,k} I_k \tag{13.3}$$

mit

$$L_{j,k} = \frac{1}{c^2} \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_j \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|}. \tag{13.4}$$

Es gilt daher $L_{j,k} = L_{k,j}$. Ist $j \neq k$, so spricht man von Gegeninduktivitäten, bei $j = k$ von Selbstinduktivitäten. Bei der Berechnung der Selbstinduktivitäten nach (13.4) tritt eine logarithmische Divergenz auf, wenn man die Stromverteilung über den Querschnitt nicht berücksichtigt. Bei einem Drahtradius r_0 muss man $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k| < r_0/(2e^{1/4})$ ausschließen (vgl. Becker-Sauter), falls der Strom gleichmäßig über den kreisförmigen Querschnitt verteilt ist.
Die Dimension der Induktivitäten ergibt sich zu s^2/cm. Die Umrechnung in das SI-System ist gegeben durch $1\mathrm{s}^2/\mathrm{cm} \,\hat{=}\, 9\cdot 10^{11}\mathrm{Vs/A} = 9\cdot 10^{11}$ H (Henry).
Sind die Bereiche des wesentlichen magnetischen Flusses mit einem Material der Permeabilität μ ausgefüllt, so folgt aus $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}_f/c$ der Zusammenhang $\operatorname{rot}(\mathbf{B}/\mu) = 4\pi\mathbf{j}_f/c$, so dass

$$L_{j,k}^{\mathrm{Mat}} = \mu L_{j,k}^{\mathrm{Vak}}. \tag{13.5}$$

gilt. Man erhält also hohe Induktivitäten durch Kerne hoher Permeabilität $\mu \approx 10^3...10^4$ im Joch.
Induktivität einer langen Spule Ist ein geschlossenes magnetisches Joch der Länge l und des Querschnitts f mit N Drahtwindungen umwickelt, die ein Strom I durchfliesst, so folgt aus dem Ampereschen Gesetz $Hl = 4\pi IN/c$ und daraus die magnetische Induktion $B = 4\pi IN\mu/(cl)$. Der magnetische Fluss lässt sich dann $Bf = cL_0 NI$ mit $L_0 = 4\pi\mu f/c^2 l$ schreiben. Für N Windungen ist der magnetische Fluss mit N zu multiplizieren, was auf die Selbstinduktion $L = L_0 N^2$ führt. Für die Gegeninduktivität zwischen zwei Schleifen mit N_1 und N_2 Windungen ergibt sich dann $L_{1,2} = L_0 N_1 N_2$. Es gilt dann also generell

$$L_{i,j} = L_0 N_i N_j, \quad L_0 = \frac{4\pi\mu f}{c^2 l}. \tag{13.6}$$

13.b Stromkreis-Elemente

Wir wollen nun Stromkreise betrachten, die folgende Elemente enthalten: Spannungsquellen, Ohmsche Widerstände, Induktivitäten und Kapazitäten. Während wir Induktivitäten und Kapazitäten bereits eingeführt haben, ist noch kurz etwas zu den beiden anderen Elementen zu sagen:
Spannungsquellen Eine Spannungsquelle habe eine Spannung oder elektromotorische Kraft $V^{(e)}(t)$. Sie führt dem System die Leistung $V^{(e)}I$ zu. Ein Beispiel stellt eine Batterie dar, die chemische Energie in elektromagnetische umwandelt. Auch die Spannungen $V^{(\mathrm{ind})}$ der Induktivitäten zählt man zu den elektromotorischen Kräften.

Ohmsche Widerstände Für viele Materialien ist bei nicht zu großen elektrischen Feldstärken die Stromdichte der Feldstärke proportional. Der Proportionalitätskoeffizient σ heißt Leitfähigkeit

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \tag{13.7}$$

Für einen Draht der Länge l und des Querschnitts f folgt

$$I = jf = \sigma f E = \sigma \frac{f}{l} V^{(\mathrm{R})}. \tag{13.8}$$

Dabei ist $V^{(\mathrm{R})}$ der Ohmsche Spannungsabfall längs des Leiters. Man hat also das Gesetz

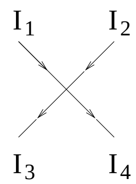
$$V^{(\mathrm{R})} = RI, \quad R = \frac{l}{\sigma f} \tag{13.9}$$

mit dem Ohmschen Widerstand R. Im Gaussschen Maßsystem wird die Leitfähigkeit σ in 1/s und der Widerstand R in s/cm gemessen. Die Umrechnung in das SI-System erfolgt durch $\mathrm{c}^{-1} \widehat{=} 30\Omega$. In einem Ohmschen Widerstand wird pro Zeiteinheit $V^{(\mathrm{R})}I$ an elektromagnetischer Energie in Wärme umgewandelt.

13.c Kirchhoffsche Regeln

1. Kirchhoffsche Regel (Knotenpunktsgesetz für die Ströme)

Das erste Kirchhoffsche Gesetz besagt, dass an jedem Knoten, an dem mehrere Leiter enden, die Summe der einlaufenden Ströme gleich der der auslaufenden ist

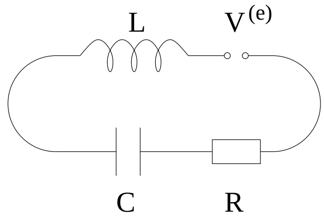


$$\sum I_{\mathrm{einlaufend}} = \sum I_{\mathrm{auslaufend}}. \tag{13.10}$$

Diese Regel stellt also die makroskopische Form von $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ dar. Im nebenstehenden Fall beinhaltet sie $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$.

2. Kirchhoffsche Regel (Maschengesetz für die Spannungen)

Diese Regel besagt, dass längs eines Maschenumlaufs die Summe der elektromotorischen Kräfte gleich der übrigen Spannungsabfälle ist



$$\sum \left(V^{(\mathrm{e})} + V^{(\mathrm{ind})}\right) = \sum \left(V^{(\mathrm{R})} + V^{(\mathrm{C})}\right), \tag{13.11}$$

wobei

$$V^{(\mathrm{ind})} = -\mathrm{d}(LI)/\mathrm{d}t, \quad V^{(\mathrm{C})} = q/C, \quad \mathrm{d}V^{(\mathrm{C})}/\mathrm{d}t = I/C. \tag{13.12}$$

Diese Regel ist also das Faradaysche Induktionsgesetz in makroskopischer Form.

13.d Energie von Induktivitäten

Um die Energie von Induktivitäten zu bestimmen, betrachten wir Stromkreise mit eingeprägten Spannungen, ohmschen Widerständen und induktiven Kopplungen

$$V_j^{(\mathrm{e})} + V_j^{(\mathrm{ind})} = R_j I_j. \tag{13.13}$$

Die zeitliche Änderung der elektromagnetischen Energie des Systems ergibt sich dann zu

$$\dot{U}_{\mathrm{em}} = \sum_j I_j V_j^{(\mathrm{e})} - \sum_j R_j I_j^2 + L_{\mathrm{mech}} = -\sum_j I_j V_j^{(\mathrm{ind})} + L_{\mathrm{mech}} \tag{13.14}$$

mit

$$V_j^{(\mathrm{ind})} = -\frac{1}{c}\dot{\Psi}_j^{\mathrm{m}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sum_k L_{j,k} I_k). \tag{13.15}$$

Dabei ist L_{mech} die an dem System verrichtete mechanische Leistung.
Wir betrachten nun mehrere Fälle:

13.d.α Konstante Induktivitäten

Wir halten die Stromkreise fest, dann gilt $L_{j,k} = \text{const}$, $L_{\text{mech}} = 0$. Dann folgt

$$\dot{U}_{\text{em}} = \sum_{j,k} I_j L_{j,k} \dot{I}_k, \tag{13.16}$$

woraus sich die Energie der Induktivitäten zu

$$U_{\text{em}} = \frac{1}{2} \sum_{j,k} I_j L_{j,k} I_k \tag{13.17}$$

ergibt.

13.d.β Gegeneinander bewegte Stromkreise

Wir bewegen nun die Stromkreise gegeneinander. Dann folgt

$$\begin{aligned} L_{\text{mech}} &= \dot{U}_{\text{em}} + \sum_j I_j V_j^{(\text{ind})} = \sum_{j,k} (I_j L_{j,k} \dot{I}_k + \frac{1}{2} I_j \dot{L}_{j,k} I_k) - \sum_{j,k} (I_j \dot{L}_{j,k} I_k + I_j L_{j,k} \dot{I}_k) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j,k} I_j \dot{L}_{j,k} I_k = -\left.\frac{\partial U_{\text{em}}}{\partial t}\right|_I . \end{aligned} \tag{13.18}$$

Die mechanische Arbeit, die zu verrichten ist, wird also nicht durch die Veränderung der elektromagnetischen Energie U_{em} bei konstanten Strömen I gegeben, sondern durch ihr Negatives.

13.d.γ Konstante magnetische Flüsse

Falls wir keine eingeprägten Spannungen $V_j^{(\text{e})} = 0$ haben und keine Widerstände $R_j = 0$, dann gilt nach (13.13) $V^{(\text{ind})} = 0$, woraus folgt, dass die magne tischen Flüsse Ψ_j^{m} unverändert bleiben. Die Induktion ist also bestrebt, die Magnetflüsse aufrecht zu erhalten (Beispiel supraleitende Ringströme). Drücken wir U_{em} durch die Flüsse aus,

$$U_{\text{em}} = \frac{1}{2c^2} \sum_{j,k} \Psi_j^{\text{m}} (L^{-1})_{j,k} \Psi_k^{\text{m}}, \tag{13.19}$$

so folgt mit der Matrix-Identität $\dot{L}^{-1} = -L^{-1} \dot{L} L^{-1}$ (die Identität erhält man durch Ableiten von $LL^{-1} = 1$ und Auflösen nach $\dot{L}^{-1}$)

$$\left.\frac{\partial U_{\text{em}}}{\partial t}\right|_{\Psi^{\text{m}}} = -\frac{1}{2} \sum_{j,k} I_j \dot{L}_{j,k} I_k = L_{\text{mech}}. \tag{13.20}$$

Die mechanische Leistung ist daher die zeitliche Ableitung der elektromagnetischen Energie bei konstanten magnetischen Flüssen.

13.d.δ Kraft zwischen zwei Stromkreisen

Nach diesen Betrachtungen kommen wir auf die Kraft zwischen zwei Stromkreisen zurück. Wir hatten im Abschnitt (9.e) die Kraft des Stromkreises 1 auf den Stromkreis 2 zu (9.21)

$$\mathbf{K}_2 = \frac{1}{c^2} \int \mathrm{d}^3 r \mathrm{d}^3 r' (\mathbf{j}_1(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{j}_2(\mathbf{r})) \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{13.21}$$

berechnet. Gehen wir nun zu zwei Stromfäden über

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a} \qquad \mathbf{r}' = \mathbf{r}_1 \tag{13.22}$$

$$\mathrm{d}^3 r' \mathbf{j}_1(\mathbf{r}') \to \mathrm{d}\mathbf{r}_1 I_1, \qquad \mathrm{d}^3 r \mathbf{j}_2(\mathbf{r}) \to \mathrm{d}\mathbf{r}_2 I_2, \tag{13.23}$$

so folgt

$$\mathbf{K}_2 = \frac{I_1 I_2}{c^2} \int (\mathrm{d}\mathbf{r}_1 \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_2) \nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 + \mathbf{a} - \mathbf{r}_1|} = I_1 I_2 \nabla_a L_{1,2}(\mathbf{a}). \tag{13.24}$$

Daher ist

$$L_{\mathrm{mech}} = -\mathbf{K}_2 \cdot \dot{\mathbf{a}} = -I_1 I_2 \dot{L}_{1,2} \tag{13.25}$$

in Übereinstimmung mit (13.18).

13.d.ϵ Energie eines magnetischen Dipols im äußeren Magnetfeld

Wir können andererseits die Wechselwirkungsenergie eines magnetischen Dipols erzeugt durch eine Stromdichte $\mathbf{j}$ in einem äußeren Feld $\mathbf{B}_{\mathrm{a}}$ erzeugt durch eine Stromverteilung $\mathbf{j}_{\mathrm{a}}$ jetzt schreiben als

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{c^2} \int \mathrm{d}^3 r \mathrm{d}^3 r' (\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}_{\mathrm{a}}(\mathbf{r}')) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{c^2} \int \mathrm{d}^3 r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\mathbf{j}_{\mathrm{a}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_{\mathrm{a}}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{A}_{\mathrm{a}}(0) + x_\alpha \nabla_\alpha \mathbf{A}_{\mathrm{a}}|_{r=0} + \ldots) = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r x_\alpha j_\beta \nabla_\alpha A_{\mathrm{a},\beta} \\ &= \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} m_\gamma \nabla_\alpha A_{\mathrm{a},\beta} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_{\mathrm{a}}. \end{aligned} \tag{13.26}$$

Dies ist jetzt der korrekte Ausdruck für die Wechselwirkungsenergie eines magnetischen Dipols $\mathbf{m}$ in einer äußeren magnetischen Induktion $\mathbf{B}_{\mathrm{a}}$.

13.d.ζ Permanente magnetische Momente

Permanente magnetische Momente kann man als Stromkreise mit sehr großer Selbstinduktivität $L_{j,j}$ und konstantem Fluss Ψ_j^{m} auffassen. Zur weiteren Berechnung lösen wir (13.3) nach I_j auf

$$I_j = \frac{\Psi_j^{\mathrm{m}}}{c L_{j,j}} - \sum_{k \neq j} \frac{L_{j,k} I_k}{L_{j,j}}. \tag{13.27}$$

Bei Verschiebung der magnetischen Momente verändern sich die Gegeninduktivitäten und man erhält

$$\dot{I}_j = -\frac{1}{L_{j,j}} \Big(\sum_{k \neq j} \dot{L}_{j,k} I_k + \sum_{k \neq j} L_{j,k} \dot{I}_k \Big). \tag{13.28}$$

Falls die Selbstinduktivitäten $L_{j,j}$ sehr groß gegen die Gegeninduktivitäten sind, ändern sich die Ströme nur wenig und die zweite Summe ist vernachlässigbar. Dann erhält man für den Selbst-Induktions-Beitrag aus der Energie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{2} L_{j,j} I_j^2 \right) = L_{j,j} I_j \dot{I}_j = -I_j \sum_{k \neq j} \dot{L}_{j,k} I_k. \tag{13.29}$$

Daher erhält man durch eine Änderung von $L_{j,k}$ den Beitrag $\dot{L}_{j,k} I_j I_k$ direkt aus der Wechselwirkung zwischen den Strömen I_j und I_k, die einen Beitrag der Form (13.26) zu U_{em} liefern, und zwei Beiträge mit dem umgekehrten Vorzeichen aus $\frac{1}{2} L_{j,j} I_j^2$ und $\frac{1}{2} L_{k,k} I_k^2$. Dies erklärt den Unterschied zwischen (10.24) und (13.26).