E MAXWELL-Gleichungen

14 Vollständige MAXWELL-Gleichungen

14.a Widerspruchsfreiheit der MAXWELL-Gleichungen

Im Abschnitt (1) haben wir die vier M -Gleichungen (1.13-1.16)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{c\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) && (14.1)\\
\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= 4\pi\rho(\mathbf{r},t) && (14.2)\\
\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{c\partial t} &= \mathbf{0} && (14.3)\\
\operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= 0 && (14.4)
\end{aligned}
$$

angegeben. Es sind dies acht Komponentengleichungen für die insgesamt sechs Komponenten B_α und E_α. Die Gleichungen können daher nicht unabhängig voneinander sein. In der Tat bilden wir die Divergenz der ersten Gleichung und vergleichen mit der zweiten Gleichung, so finden wir

$$
-\frac{1}{c}\operatorname{div}\dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\mathbf{j} = -\frac{4\pi}{c}\dot{\rho}, \tag{14.5}
$$

woraus wir sehen, dass in diesen beiden Gleichungen die Kontinuitätsgleichung (1.12) enthalten ist, und diese auch nur erfüllt werden können, wenn die Ladung erhalten ist. Zum anderen folgt daraus aber auch

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\mathbf{E} - 4\pi\rho) = 0. \tag{14.6}
$$

Wenn also zu einer Zeit die Gleichung (14.2) und zu allen Zeiten die Kontinuitäts-Gleichung erfüllt sind, so garantiert (14.1) dafür, dass (14.2) zu allen Zeiten erfüllt ist.
Ähnlich folgt aus der Divergenz von (14.3)

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\mathbf{B}) = 0. \tag{14.7}
$$

Wenn also (14.4) zu einer Zeit erfüllt ist, so ist sie auf Grund von (14.3) zu allen Zeiten erfüllt.
Die Gleichungen (14.1) und (14.3) erlauben die Berechnung von **B** und **E**, falls **j** zu allen Zeiten gegeben ist und **B** und **E** zu einer Zeit t_0 gegeben sind und zu dieser Zeit (14.2) und (14.4) erfüllt sind. ρ ergibt sich dann aus der Kontinuitätsgleichung.
Der einzige Beitrag, den wir bisher nicht betrachtet haben, ist der Beitrag proportional zu $\dot{\mathbf{E}}$ in (14.1). Er wurde von M gefunden. Er hat $\dot{\mathbf{E}}/(4\pi)$ als Verschiebungsstrom bezeichnet, da (14.1) in der Form

$$
\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi}\dot{\mathbf{E}}) \tag{14.8}
$$

geschrieben werden kann. Mit der Einführung dieses Terms wurde das Gleichungssystem (14.1-14.4) widerspruchsfrei. Gleichzeitig erlaubt dieses System dann die Beschreibung elektromagnetischer Wellen.

14.b Maxwell-Gleichungen für freibewegliche Ladungen und Ströme

Die Ladungsdichte und die Stromdichte werden zerlegt (vgl. Abschnitt 6.a und 11)

$$\rho = \rho_\mathrm{f} + \rho_\mathrm{P} \tag{14.9}$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_\mathrm{f} + \mathbf{j}_\mathrm{P} + \mathbf{j}_\mathrm{M}. \tag{14.10}$$

Dabei waren ρ_f und $\mathbf{j}_\mathrm{f}$ die freibeweglichen Anteile, während ρ_P und das hier eingeführte $\mathbf{j}_\mathrm{P}$ die Polarisations-Anteile sind. Wir hatten für das elektrische Dipolmoment im Volumen ΔV ausgedrückt durch die Dipolmomente $\mathbf{p}_i$, die wieder durch Ladungspaare $\pm q_i$ im Abstand $\mathbf{a}_i$ dargestellt werden

$$\mathbf{P}\Delta V = \sum \mathbf{p}_i = \sum q_i \mathbf{a}_i \tag{14.11}$$

$$\mathbf{j}_\mathrm{P}\Delta V = \sum \dot{\mathbf{p}}_i = \sum q_i \dot{\mathbf{a}}_i \tag{14.12}$$

mit $\mathbf{j}_\mathrm{P} = \dot{\mathbf{P}}$ (in ruhender Materie). Dazu kommt dann noch die in Abschnitt 11 eingeführte Magnetisierungsstromdichte

$$\mathbf{j}_\mathrm{M} = c \operatorname{rot} \mathbf{M}. \tag{14.13}$$

Für diese Ladungs- und Stromdichten gilt

$$\frac{\partial \rho_\mathrm{f}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_\mathrm{f} = 0 \tag{14.14}$$

$$\frac{\partial \rho_\mathrm{P}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_\mathrm{P} = 0 \tag{14.15}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_\mathrm{M} = 0. \tag{14.16}$$

Durch Einsetzen dieser Ladungs- und Stromdichten in (14.1) ergibt sich

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}_\mathrm{f} + \dot{\mathbf{P}} + c \operatorname{rot} \mathbf{M}), \tag{14.17}$$

woraus

$$\operatorname{rot}(\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}) - \frac{\partial}{c\partial t}(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_\mathrm{f} \tag{14.18}$$

folgt. Führen wir wieder wie in (11.9) und (6.6) das magnetische Feld $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ und die dielektrische Verschiebung $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ ein, so wird (11.10) erweitert zu

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{D}} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_\mathrm{f}. \tag{14.19}$$

Entsprechend folgt aus (14.2) wie in (6.7)

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_\mathrm{f}. \tag{14.20}$$

Die M -Gleichungen (14.3) und (14.4) bleiben unverändert. Man bezeichnet die Gleichungen (14.19,14.20) auch als die M -Gleichungen in Materie.

15 Energie- und Impuls-Bilanz

15.a Energie

Wir betrachten ein Volumen eines Systems mit freibeweglichen Ladungen und festgehaltener Materie. Auf die freibeweglichen Ladungen wirkt die Kraftdichte $\mathbf{k} = \rho_\mathrm{f}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c)$. Bewegen wir die Ladungen mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$, so müssen wir dem System gegen diese Kraftdichte die Leistung $-\int \mathrm{d}^3r \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = -\int \mathrm{d}^3r \mathbf{j}_\mathrm{f} \cdot \mathbf{E}$ zuführen. Wir formen nun mittels (14.19), (B.30) und (14.3) um

$$\begin{aligned} -\mathbf{j}_\mathrm{f} \cdot \mathbf{E} &= -\frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{H} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{c}{4\pi}\mathbf{H} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} \\ &= \frac{c}{4\pi}\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} + \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}}). \end{aligned} \tag{15.1}$$

Diese Beiträge interpretiert man folgendermaßen: In ruhender Materie stellt der zweite Beitrag die zeitliche Änderung der Energiedichte $u(\rho_\mathrm{m}, \mathbf{D}, \mathbf{B})$ dar mit

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}}\mathrm{d}\rho_\mathrm{m} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{D} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{B}. \tag{15.2}$$

Wir gehen der Einfachheit halber davon aus, dass die Energie der Materie von ihrer Massendichte ρ_m, aber nicht vom vollständigen Verzerrungszustand abhängt. Wir hatten schon früher gesehen, dass $\partial u/\partial\mathbf{D} = \mathbf{E}/(4\pi)$ gilt. Ähnlich kann man aus dem Induktionsgesetz zeigen, dass $\partial u/\partial\mathbf{B} = \mathbf{H}/(4\pi)$ für starre Materie gilt. Hier die Herleitung in Kurzform

$$\begin{aligned} \delta U_\mathrm{em} &= -\sum_j V_j^{(\mathrm{ind})}\delta t I_j = \frac{1}{c}\sum_j I_j \delta\Psi_j^\mathrm{m} = \frac{1}{c}\sum_j I_j \int \mathrm{d}\mathbf{f}_j \cdot \delta\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\sum_j I_j \int \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r \mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r \operatorname{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{rot}\delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{B}(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{15.3}$$

Da die Materie festgehalten wird, trägt $\partial u/\partial\rho_\mathrm{m}\dot{\rho}_\mathrm{m}$ nichts bei. Wir setzen daher für die Energie des Volumens V

$$U(V) = \int_V \mathrm{d}^3r\, u(\rho_\mathrm{m}(\mathbf{r}), \mathbf{D}(\mathbf{r}), \mathbf{B}(\mathbf{r})) \tag{15.4}$$

und führen den P -Vektor

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{H} \tag{15.5}$$

ein. Es gilt dann

$$-\int_V \mathrm{d}^3r \mathbf{j}_\mathrm{f} \cdot \mathbf{E} = \dot{U}(V) + \int_V \mathrm{d}^3r \operatorname{div}\mathbf{S} = \dot{U}(V) + \int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}). \tag{15.6}$$

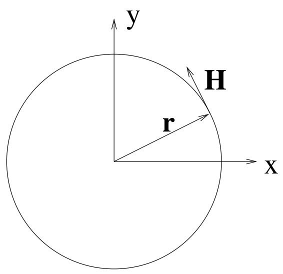
Die dem Volumen V zugeführte Energie wird zum Teil im Volumen gespeichert ($\dot{U}$), zum anderen Teil aber durch die Oberfläche des Systems transportiert. Dieser Energietransport ist durch die Energiestromdichte $\mathbf{S}$ gegeben. Ähnlich wie durch eine Fläche pro Zeiteinheit die Ladung $\int \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{j}_\mathrm{f}$ transportiert wird, wird (in ruhender Materie) die Energie $\int \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{S}$ transportiert. Der P -Vektor gibt daher die elektromagnetische Energiestromdichte an.
Wir bemerken, dass für $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ die Energiedichte

$$u = u^0(\rho_\mathrm{m}) + \frac{1}{8\pi}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \tag{15.7}$$

folgt.

Beispiel: Stromdurchflossener gerader Leiter

Wir betrachten einen vom Strom I durchflossenen geraden Draht in Richtung der z-Achse. Auf Grund des A schen Gesetzes gilt bei Integration auf einem konzentrischen Kreis mit Radius r um den Leiter



$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} I, \quad \mathbf{H} = \frac{2I}{cr}\mathbf{e}_\phi. \tag{15.8}$$

Längs des Leiters bestehe auf Grund des schen Widerstandes ein Spannungsabfall $V^{(R)}$, verknüpft mit einem elektrischen Feld parallel zum Draht, $\mathbf{E} = E_0\mathbf{e}_z$. Daraus folgt der P -Vektor

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H} = -\frac{IE_0\mathbf{e}_\mathrm{r}}{2\pi r} \tag{15.9}$$

mit einem Energiefluss

$$\int \mathbf{S}\cdot d\mathbf{f} = -IE_0 l = -IV^{(R)} \tag{15.10}$$

durch den Zylindermantel des Drahtes über die Länge l nach außen. Mit anderen Worten, es fließt in den Draht die sche Leistung $IV^{(R)}$. Diese wird im Draht in Wärme umgewandelt.

15.b Impuls-Bilanz

Wir führen die Impuls-Bilanz nur für das Vakuum mit Ladungsdichten ρ und Stromdichten $\mathbf{j}$ durch. Wir wollen das System in Ruhe halten. Dann müssen wir gegen die Kraftdichte $\mathbf{k} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B}/c$ eine Gegenkraftdichte $-\mathbf{k}$ wirken lassen, so dass einem Volumen V pro Zeiteinheit der Impuls $-\int_V d^3r\,\mathbf{k}$ zugeführt wird. Wir formen nun wieder mit (14.1) und (14.3) um

$$-\mathbf{k} = -\rho\mathbf{E} - \frac{1}{c}\mathbf{j}\times\mathbf{B} = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\times\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B} + \frac{1}{4\pi c}\dot{\mathbf{E}}\times\mathbf{B}. \tag{15.11}$$

Mit (14.3) und (14.4)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}\times\mathbf{B} &= (\mathbf{E}\times\mathbf{B})^{\cdot} - \mathbf{E}\times\dot{\mathbf{B}} = (\mathbf{E}\times\mathbf{B})^{\cdot} + c\mathbf{E}\times\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} &(15.12)\\ \mathbf{B}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B} &= 0 &(15.13)\end{aligned}$$

folgt

$$-\mathbf{k} = \frac{1}{4\pi c}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})^{\cdot} + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{E}\times\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} - \mathbf{E}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} + \mathbf{B}\times\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B} - \mathbf{B}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B}). \tag{15.14}$$

Nun ist

$$\mathbf{E}_\mathrm{c}\times(\nabla\times\mathbf{E}) - \mathbf{E}_\mathrm{c}(\nabla\mathbf{E}) = \nabla(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}_\mathrm{c}) - \mathbf{E}(\nabla\mathbf{E}_\mathrm{c}) - \mathbf{E}_\mathrm{c}(\nabla\cdot\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\nabla E^2 - (\nabla\mathbf{E})\mathbf{E}. \tag{15.15}$$

Wir haben hier Größen, auf die der ∇-Operator nicht wirkt, mit einem Index $_\mathrm{c}$ gekennzeichnet. Im letzten Term des obigen Ausdrucks wirkt der ∇-Operator tatsächlich auf beide Faktoren $\mathbf{E}$. Damit können wir schreiben

$$-\mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}_\mathrm{s} - \nabla_\beta T_{\alpha,\beta}\mathbf{e}_\alpha, \tag{15.16}$$

mit

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_\mathrm{s} &= \frac{1}{4\pi c}\mathbf{E}\times\mathbf{B}, &(15.17)\\ T_{\alpha,\beta} &= \frac{1}{4\pi}(E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta) - \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{8\pi}(E^2 + B^2). &(15.18)\end{aligned}$$

Dabei wird $\mathbf{g}_\mathrm{s}$ als die Strahlungsimpulsdichte bezeichnet, und $T_{\alpha,\beta}$ sind die Komponenten des Spannungstensors, dessen elektrostatischen Anteil wir bereits in der Elektrostatik (8.38) kennengelernt haben. Mit diesen Größen gilt dann

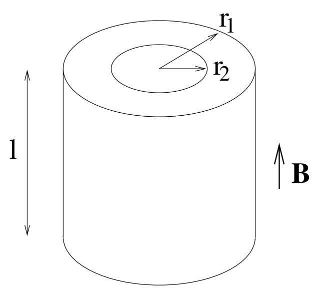
$$\frac{d}{dt}\int_V d^3r\,\mathbf{g}_\mathrm{s}(\mathbf{r}) = -\int_V d^3r\,\mathbf{k} + \int_{\partial V}\mathbf{e}_\alpha T_{\alpha,\beta}df_\beta. \tag{15.19}$$

Dies ist die Impuls-Bilanz für das Volumen V. Die linke Seite stellt die zeitliche Änderung des Impulses im Volumen V dar, die rechte Seite den zugeführten Impuls. Er besteht aus zwei Anteilen: Der erste ist der Impuls, den wir hinzufügen, indem wir gegen die elektromagnetische Kraftdichte $\mathbf{k}$ eine Gegenkraft wirken lassen. Der zweite Anteil wirkt in Form von Spannungen an der Oberfläche. Man kann ihn auch als Fluss des Impulses betrachten. Der Spannungstensor stellt bis auf das Vorzeichen eine Impulsflussdichte dar. Er trägt zwei Indices. Einer (α) bezieht sich auf die Komponente des Impulses, der andere (β) auf die Richtung des Flusses.
Wir haben hier nur den elektromagnetischen Impuls im Vakuum behandelt, während wir die elektromagnetische Energie auch in Materie untersucht haben. Warum ist es schwieriger, den Impuls in Materie zu behandeln? In beiden Fällen haben wir das System in Ruhe untersucht. Hält man die Materie fest, so tragen die dabei aufgewendeten Kräfte nicht zur Energie-Bilanz bei. Schließlich ist die Leistung als Kraft mal Geschwindigkeit gegeben. Da die Geschwindigkeit der Materie gleich Null ist, trägt die auf die Materie wirkende Kraft nicht zur Energie-Bilanz bei. Anders ist es bei der Impuls-Bilanz. Da tragen alle Kräfte bei. Man könnte daran denken, von einem kräftefreien Zustand auszugehen. Dann tritt allerdings das Problem auf, dass bei Verschiebung der freibeweglichen Ladungen überall in der Materie Kräfte auftreten können, die wir erst kennen müssten. Daher können wir hier die Energie-Bilanz in Materie behandeln, hätten aber mit der Impuls-Bilanz Probleme.
In der Literatur gibt es widersprüchliche Aussagen: M hat 1908 für den elektromagnetischen Impuls in Materie $\mathbf{D} \times \mathbf{B}/(4\pi c)$ angegeben. Man findet dies auch im Lehrbuch von S (allerdings mit Einschränkungen). Andererseits gibt A 1910 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}/(4\pi c)$ an. Man findet dies auch im Lehrbuch von L und L .
Tatsächlich sind zwei Dinge zu beachten, die häufig nicht berücksichtigt werden:
1) Die Wechselwirkung zwischen elektromagnetischem Feld und Materie muss berücksichtigt werden. Die Materie kann nicht als starr angenommen werden.
2) Man muss genau definieren, was man unter dem elektromagnetischen Impuls versteht, da man sonst alles in den unbekannten Rest mechanischen Impuls schieben kann, also keine Aussage gemacht hat. Ohne Herleitung sei nur angegeben, dass man ein System modellieren kann, dem man entnimmt: Im lokalen Ruhesystem der Materie ist die Impulsdichte $\mathbf{E} \times \mathbf{H}/(4\pi c) = \mathbf{S}/c^2$. Allerdings kann man zeigen, dass es in homogener Materie eine weitere Erhaltungsgröße auf Grund dieser Homogenität gibt, die im lokalen Ruhesystem den Wert $\mathbf{D} \times \mathbf{B}/(4\pi c)$ annimmt. Vollzieht man S s Argument nach, so stellt man in der Tat fest, daß es sich nur für eine ortsunabhängige Dielektrizitätskonstante ϵ durchführen lässt.

Beispiel: Zylinderkondensator im Magnetfeld

Wir betrachten einen Zylinderkondensator der Länge l mit Außenradius r_1 und Innenradius r_2 mit einer Ladung q außen und $-q$ innen. Zwischen den beiden Zylindern sei Vakuum. Parallel zur Achse sei ein Magnetfeld B_0. Dann haben wir in Zylinderkoordinaten

$$\mathbf{E} = -\frac{2q}{lr}\mathbf{e}_{\mathrm{r}}, \quad \mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{g}_{\mathrm{s}} = \frac{1}{4\pi c}\frac{2qB_0}{lr}\mathbf{e}_\phi. \tag{15.20}$$



Daraus errechnet sich ein Drehimpuls $\mathbf{L}$ in z-Richtung

$$L_z = \int \mathrm{d}z\mathrm{d}^2r(\mathbf{r} \times \mathbf{g}_{\mathrm{s}})_z = \int \mathrm{d}z\mathrm{d}^2r r\frac{2qB_0}{4\pi clr} = \frac{qB_0}{2c}(r_1^2 - r_2^2). \tag{15.21}$$

Wenn wir den Kondensator nun entladen, dann muss der Entladungsstrom durch das Magnetfeld fließen. Dabei wirkt die L -Kraft, die dem System ein mechanisches Drehmoment $\mathbf{M}_{\mathrm{mech}}$ gibt

$$\mathbf{M}_{\mathrm{mech}} = \int \mathrm{d}^3r\, \mathbf{r} \times (\frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = \frac{I}{c}\int \mathbf{r} \times (\mathrm{d}\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = \frac{I}{c}\int ((\mathbf{r}\cdot\mathbf{B})\mathrm{d}\mathbf{r} - (\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r})\mathbf{B}), \tag{15.22}$$

woraus sich

$$M_{\mathrm{mech},z} = -\frac{IB_0}{c}\int_{r_1}^{r_2} r dr = \frac{IB_0}{2c}(r_1^2 - r_2^2) \tag{15.23}$$

und damit der mechanische Drehimpuls

$$L_z = \frac{qB_0}{2c}(r_1^2 - r_2^2) \tag{15.24}$$

errechnet. Durch die Entladung wurde also der elektromagnetische Drehimpuls (15.21) in mechanischen (15.24) umgewandelt. Anstatt den Kondensator zu entladen, kann man auch das Magnetfeld abschalten. Dabei wird eine elektrische Feldstärke

$$\oint \mathbf{E}^{(\mathrm{ind})} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \int \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f} = -\frac{1}{c} \pi r^2 \dot{B}_0, \quad \mathbf{E}^{(\mathrm{ind})} = -\frac{1}{2c} r \dot{B}_0 \mathbf{e}_\phi \tag{15.25}$$

induziert, die auf die Ladungen ein Drehmoment

$$\mathbf{M}_{\mathrm{mech}} = q\mathbf{r}_1 \times \mathbf{E}^{(\mathrm{ind})}(\mathbf{r}_1) - q\mathbf{r}_2 \times \mathbf{E}^{(\mathrm{ind})}(\mathbf{r}_2) \tag{15.26}$$

$$M_{\mathrm{mech},z} = qr_1(-\frac{1}{2c} r_1 \dot{B}_0) - qr_2(-\frac{1}{2c} r_2 \dot{B}_0) \tag{15.27}$$

ausübt, so dass der Kondensator die mechanische Drehimpulskomponente

$$L_z = \frac{qB_0}{2c}(r_1^2 - r_2^2) \tag{15.28}$$

erhält. In beiden Fällen wird also der elektromagnetische Drehimpuls in den gleichen mechanischen Drehimpuls umgewandelt.