F

Elektromagnetische Wellen

Electromagnetic Waves

16 Elektromagnetische Wellen im Vakuum und in homogenen isotropen Isolatoren

16.a Wellengleichung

Wir betrachten elektromagnetische Wellen in einem homogenen isotropen Isolator einschließlich dem Vakuum. Das heißt, wir verlangen, dass die Dielektrizitätskonstante ϵ und die Permeabilität μ orts- und zeitunabhängig sind. Wir verlangen weiterhin, dass keine freien Ströme und Ladungen auftreten $\rho_{\rm f} = 0$, $\mathbf{j}_{\rm f} = \mathbf{0}$. Das Material ist also ein Isolator. Damit lauten dann die vier MAXWELL-Gleichungen, ausgedrückt durch $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ mit Hilfe von $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ und $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$

16 Electromagnetic Waves in Vacuum and in Homogeneous Isotropic Insulators

16.a Wave Equation

We consider electromagnetic waves in a homogeneous isotropic insulator including the vacuum. More precisely we require that the dielectric constant ϵ and the permeability μ are independent of space and time. Further we require that there are no freely moving currents and charges $\rho_{\rm f} = 0$, $\mathbf{j}_{\rm f} = \mathbf{0}$. Thus the matter is an insulator. Then MAXWELL's equations read, expressed in terms of $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ by means of $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ and $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \tag{16.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c}\dot{\mathbf{E}}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\dot{\mathbf{H}}. \tag{16.2}$$

Daraus folgt

From these equations one obtains

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} = -\frac{\epsilon\mu}{c^2}\ddot{\mathbf{H}} \tag{16.3}$$

Mit

With

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{H}) = -\triangle\mathbf{H} + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{H}) \tag{16.4}$$

folgt unter Berücksichtigung von (16.1) für $\mathbf{H}$ und analog für $\mathbf{E}$

one obtains for $\mathbf{H}$ using (16.1) and similarly for $\mathbf{E}$

$$\triangle\mathbf{H} = \frac{1}{c'^2}\ddot{\mathbf{H}}, \tag{16.5}$$

$$\triangle\mathbf{E} = \frac{1}{c'^2}\ddot{\mathbf{E}}, \tag{16.6}$$

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \tag{16.7}$$

Die Gleichungen (16.5) und (16.6) heißen Wellengleichungen.

The equations (16.5) and (16.6) are called wave equations.

16.b Ebene Wellen

16.b Plane Waves

Wir suchen nun partikuläre Lösungen der Wellengleichungen und beginnen mit Lösungen, die nur von z und t abhängen, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(z,t)$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(z,t)$. Für die z-Komponenten folgt dann

Now we look for particular solutions of the wave equations and begin with solutions which depend only on z and t, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(z,t)$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(z,t)$. One obtains for the z-components

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{16.8}$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{H})_z = 0 = \frac{\epsilon}{c}\dot{E}_z \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0. \tag{16.9}$$

In der z-Richtung ist mit diesem Ansatz also nur ein statisches homogenes Feld, das heißt ein konstantes Feld E_z möglich. Entsprechendes gilt auch für H_z. Wir sehen hieraus bereits, dass elektromagnetische Wellen Transversal-Wellen sind.

Thus only a static homogeneous field is possible with this ansatz in z-direction, i.e. a constant field E_z. The same is true for H_z. We already see that electromagnetic waves are transversal waves.

Für die x- und die y-Komponenten folgt

For the x- and y-components one obtains

$$(\nabla\times\mathbf{H})_x = \frac{\epsilon}{c}\dot{E}_x \rightarrow -\nabla_z H_y = \frac{\epsilon}{c}\dot{E}_x \rightarrow -\nabla_z(\sqrt{\mu}H_y) = \frac{1}{c'}(\sqrt{\epsilon}E_x)^{\dot{}} \tag{16.10}$$

$$(\nabla\times\mathbf{E})_y = -\frac{\mu}{c}\dot{H}_y \rightarrow \nabla_z E_x = -\frac{\mu}{c}\dot{H}_y \rightarrow \nabla_z(\sqrt{\epsilon}E_x) = -\frac{1}{c'}(\sqrt{\mu}H_y)^{\dot{}}. \tag{16.11}$$

E_x ist mit H_y verknüpft, analog E_y mit $-H_x$. Wir können die beiden Gleichungen (16.10) und (16.11) zusammenfassen zu

E_x is connected with H_y, and in the same way E_y with $-H_x$. We may combine the equations (16.10) and (16.11)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\epsilon}E_x \pm \sqrt{\mu}H_y) = \mp c'\frac{\partial}{\partial z}(\sqrt{\epsilon}E_x \pm \sqrt{\mu}H_y). \tag{16.12}$$

Die Lösung dieser Gleichung und der entsprechenden für E_y mit $-H_x$ ist

The solution of this equation and the corresponding one for E_y with $-H_x$ is

$$\sqrt{\epsilon}E_x \pm \sqrt{\mu}H_y = 2f_\pm(z \mp c't), \tag{16.13}$$

$$\sqrt{\epsilon}E_y \mp \sqrt{\mu}H_x = 2g_\pm(z \mp c't), \tag{16.14}$$

mit beliebigen (differenzierbaren) Funktionen $f_\pm$ und $g_\pm$, woraus dann

with arbitrary (differentiable) functions $f_\pm$ and $g_\pm$, from which one obtains

$$\sqrt{\epsilon}E_x = f_+(z-c't) + f_-(z+c't) \tag{16.15}$$

$$\sqrt{\mu}H_y = f_+(z-c't) - f_-(z+c't) \tag{16.16}$$

$$\sqrt{\epsilon}E_y = g_+(z-c't) + g_-(z+c't) \tag{16.17}$$

$$\sqrt{\mu}H_x = -g_+(z-c't) + g_-(z+c't) \tag{16.18}$$

folgt. Es handelt sich also um die Überlagerung von Wellen beliebiger Form, die nach oben (f_+, g_+) und nach unten (f_-, g_-) mit der Geschwindigkeit c' laufen. $c' = c/\sqrt{\epsilon\mu}$ ist also die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen (des Lichtes) in dem jeweiligen Medium. Insbesondere finden wir, dass c die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit ist.

. This is the superposition of waves of arbitrary shapes, which propagate upward (f_+, g_+) and downward (f_-, g_-), resp, with velocity c'. Thus $c' = c/\sqrt{\epsilon\mu}$ is the velocity of propagation of the electromagnetic wave (light) in the corresponding medium. In particular we find that c is the light velocity in vacuum.

Wir berechnen noch die Energiedichte

We calculate the density of energy

$$u = \frac{1}{8\pi}(\epsilon E^2 + \mu H^2) = \frac{1}{4\pi}(f_+^2 + g_+^2 + f_-^2 + g_-^2) \tag{16.19}$$

und die Energiestromdichte in Form des POYNTING-Vektors

and the density of the energy current by means of the POYNTING vector

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H} = \frac{c'\mathbf{e}_z}{4\pi}(f_+^2 + g_+^2 - f_-^2 - g_-^2), \tag{16.20}$$

wobei wir ein homogenes Feld in z-Richtung nicht berücksichtigt haben. Durch Vergleich der Ausdrücke für u und $\mathbf{S}$ jeweils nur für die nach oben oder unten laufenden Anteile sieht man, dass die Energie mit der Geschwindigkeit der Welle $\pm c'\mathbf{e}_z$ transportiert wird, da $\mathbf{S} = \pm c'\mathbf{e}_z u$. Wir bemerken noch, dass die Welle, für die $E_y = 0$ und $H_x = 0$, das heißt $g_\pm = 0$, linear polarisiert in x-Richtung heißt. Für die Angabe der Polarisationsrichtung ist immer die Richtung des Vektors $\mathbf{E}$ maßgeblich.

where a homogeneous field in z-direction is not considered. Comparing the expressions for u and $\mathbf{S}$ separately for the waves moving up and down, one observes that the energy of the wave is transported with velocity $\pm c'\mathbf{e}_z$, since $\mathbf{S} = \pm c'\mathbf{e}_z u$. We remark that the wave which obeys $E_y = 0$ and $H_x = 0$, that is $g_\pm = 0$, is called linearly polarized in x-direction. For the notation of the direction of polarization one always considers that of the vector $\mathbf{E}$.

16.c Überlagerung ebener periodischer Wellen

16.c Superposition of Plane Periodic Waves

Allgemein kann man die elektrische Feldstärke als FOURIER-Integral ansetzen

In general one may describe the electric field in terms of a FOURIER integral

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int d^3k d\omega \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \tag{16.21}$$

analog für $\mathbf{H}$. Damit drücken wir die Felder als Überlagerung ebener periodischer Wellen aus.

analogously for $\mathbf{H}$. Then the fields are expressed as a superposition of plane periodic waves.

16.c.α Einschub über FOURIER-Reihen und Integrale

16.c.α Insertion on FOURIER Series and Integrals

Die FOURIER-Reihe einer Funktion mit Periode L, $f(x + L) = f(x)$, lautet

The FOURIER series of a function with period L, $f(x + L) = f(x)$ reads

$$f(x) = \hat{c}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{2\pi i n x/L}. \tag{16.22}$$

f_n sind die FOURIER-Koeffizienten von f. Die Darstellung ist möglich für quadrat-integrable Funktionen, mit einer endlichen Anzahl von Unstetigkeits-Stellen. $\hat{c}$ ist eine geeignete Konstante. Die Rücktransformation, das heißt die Berechnung der FOURIER-Koeffizienten gewinnt man aus

f_n are the FOURIER coefficients of f. This representation is possible for square integrable functions with a finite number of points of discontinuity. $\hat{c}$ is an appropriate constant. The back-transformation, that is the calculation of the FOURIER coefficients is obtained from

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-2\pi i n x/L} f(x) = \hat{c} L f_n, \tag{16.23}$$

wie man durch Einsetzen in (16.22) und Vertauschen von Summation und Integration leicht sehen kann. Die FOURIER-Transformation für eine von $-\infty$ bis $+\infty$ definierte nicht notwendig periodische Funktion $f(x)$ gewinnt man, indem man den Grenzübergang $L \to \infty$ durchführt und

as can be seen easily by inserting in (16.22) and exchanging summation and integration. The FOURIER transform for a (normally not-periodic) function defined from $-\infty$ to $+\infty$ can be obtained by performing the limit $L \to \infty$ and introducing

$$k := \frac{2\pi n}{L}, \quad f_n = f_0(k), \quad \hat{c} = \Delta k = \frac{2\pi}{L} \tag{16.24}$$

definiert. Dann geht nämlich (16.22) in

. Then (16.22) transforms into

$$f(x) = \sum \Delta k f_0(k) e^{ikx} \to \int_{-\infty}^{\infty} dk f_0(k) e^{ikx} \tag{16.25}$$

über und die Rück-Transformation (16.23) in

and the back-transformation (16.23) into

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} = 2\pi f_0(k). \tag{16.26}$$

Damit können wir zum Beispiel die Rücktransformation von (16.21) zu

This allows us, e.g., to give the back-transformation from (16.21) to

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 r dt e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \tag{16.27}$$

angeben.

.

16.c.β Zurück zu den Maxwell-Gleichungen

16.c.β Back to Maxwell's Equations

Die Darstellung durch die Fourier-Transformierte hat den Vorteil, dass die Gleichungen einfacher werden. Durch Anwendung der Operationen ∇ und $\partial/\partial t$ auf die Exponentialfunktion

The representation by the Fourier transform has the advantage that the equations become simpler. Applying the operations ∇ and $\partial/\partial t$ on the exponential function

$$\nabla e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = i\mathbf{k} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad \frac{\partial}{\partial t} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = -i\omega e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{16.28}$$

in den Maxwell-Gleichungen folgt für die Fourier-Komponenten

in Maxwell's equations yields for the Fourier components

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \to \quad i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) = 0 \tag{16.29}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad \to \quad i\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0(\mathbf{k}, \omega) = 0 \tag{16.30}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c}\dot{\mathbf{E}} \quad \to \quad i\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0(\mathbf{k}, \omega) = -i\frac{\epsilon}{c}\omega \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) \tag{16.31}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\dot{\mathbf{H}} \quad \to \quad i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) = i\frac{\mu}{c}\omega \mathbf{H}_0(\mathbf{k}, \omega). \tag{16.32}$$

Der Vorteil dieser Darstellung besteht darin, daß immer nur Fourier-Komponenten mit gleichem $\mathbf{k}$ und ω miteinander verknüpft sind. Für $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ folgt $\omega = 0$, wobei $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ beliebig sein können. Dies sind die statischen homogenen Felder. Für $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ folgt aus (16.29) und (16.30), dass

The advantage of this representation is that only Fourier components with the same $\mathbf{k}$ and ω are connected to each other. For $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ one obtains $\omega = 0$, where $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ are arbitrary. These are the static homogeneous fields. For $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ one obtains from (16.29) and (16.30)

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) \perp \mathbf{k}, \quad \mathbf{H}_0(\mathbf{k}, \omega) \perp \mathbf{k}. \tag{16.33}$$

Aus den beiden anderen Gleichungen (16.31) und (16.32) folgt

From the two other equations (16.31) and (16.32) one obtains

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega)) = \frac{\mu}{c}\omega \mathbf{k} \times \mathbf{H}_0(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{\epsilon\mu}{c^2}\omega^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega). \tag{16.34}$$

Daraus folgt

From this one obtains

$$\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega)) - k^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{c'^2}\omega^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega), \tag{16.35}$$

analog für $\mathbf{H}_0$. Wegen (16.29) verschwindet der erste Term auf der linken Seite von (16.35). Es gibt also nicht verschwindende Lösungen, wenn die Beziehung $\omega = \pm c'k$ erfüllt ist. Dies ist die Dispersionsrelation für elektromagnetische Wellen, das heißt der Zusammenhang zwischen Frequenz und Wellenvektor für elektromagnetische Wellen. Unter Berücksichtigung dieser Bedingung können wir schreiben

analogously for $\mathbf{H}_0$. The first term on the left hand-side of (16.35) vanishes because of (16.29). Thus there are non-vanishing solutions, if the condition $\omega = \pm c'k$ is fulfilled. This is the dispersion relation for electromagnetic waves that is the relation between frequency and wave-vector for electromagnetic waves. Taking these conditions into account we may write

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{k},\omega) = \frac{1}{2}\delta(\omega - c'k)\mathbf{E}_1(\mathbf{k}) + \frac{1}{2}\delta(\omega + c'k)\mathbf{E}_2(\mathbf{k}). \tag{16.36}$$

und damit

and thus

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \int d^3k \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}_1(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_2(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+c'kt)}\right). \tag{16.37}$$

Da die elektrische Feldstärke reell sein muss, muss sie mit ihrem Konjugiert-komplexen übereinstimmen

Since the electric field has to be real, it must coincide with its conjugate complex.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^*(\mathbf{r},t) &= \int d^3k \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}_1^*(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_2^*(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+c'kt)}\right) \\ &= \int d^3k \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}_1^*(-\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+c'kt)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_2^*(-\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)}\right). \end{aligned} \tag{16.38}$$

Durch Koeffizienten-Vergleich folgt

From comparison of the coefficients one obtains

$$\mathbf{E}_2^*(\mathbf{k}) = \mathbf{E}_1(-\mathbf{k}). \tag{16.39}$$

Damit haben wir dann

Thus we obtain

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \int d^3k \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}_1(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_1^*(-\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+c'kt)}\right) \\ &= \int d^3k \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}_1(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_1^*(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)}\right) \\ &= \Re\Big(\int d^3k \mathbf{E}_1(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)}\Big). \end{aligned} \tag{16.40}$$

Für $\mathbf{H}_0$ folgt dann aus (16.32)

Eq. (16.32) yields for $\mathbf{H}_0$

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{k},\omega) = \frac{c}{\mu\omega}\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0(\mathbf{k},\omega) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\left(\delta(\omega - c'k)\frac{\mathbf{k}}{2k}\times\mathbf{E}_1(\mathbf{k}) - \delta(\omega + c'k)\frac{\mathbf{k}}{2k}\times\mathbf{E}_2(\mathbf{k})\right) \tag{16.41}$$

und damit für $\mathbf{H}$

and thus for $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \Re\Big(\int d^3k \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\frac{\mathbf{k}}{k}\times\mathbf{E}_1(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)}\Big). \tag{16.42}$$

Trägt nur eine Fourier-Komponente bei, $\mathbf{E}_1(\mathbf{k}) = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\mathbf{E}_{1,0}$ (Idealisierung), so spricht man von einer monochromatischen Welle,

If only one Fourier component $\mathbf{E}_1(\mathbf{k}) = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\mathbf{E}_{1,0}$ (idealization) contributes then one has a monochromatic wave

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \Re(\mathbf{E}_{1,0}e^{i(\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}-c'k_0t)}) \tag{16.43}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\Re\Big(\frac{\mathbf{k}_0}{k_0}\times\mathbf{E}_{1,0}e^{i(\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}-c'k_0t)}\Big). \tag{16.44}$$

Von linear polarisierten Wellen (Licht) spricht man, wenn $\mathbf{E}_{1,0} = \mathbf{e}_1 E_{1,0}$ mit einem reellen Einheitsvektor $\mathbf{e}_1$, von zirkular polarisierten, wenn $\mathbf{E}_{1,0} = (\mathbf{e}_1 \mp \mathrm{i}\mathbf{e}_2)E_{1,0}/\sqrt{2}$ mit reellen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$, wobei $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{k}_0$ eine orthogonale Rechtsbasis bilden. Für das obere Vorzeichen ist die Welle rechts-, für das untere links-polarisiert.

The wave (light) is called linearly polarized, if $\mathbf{E}_{1,0} = \mathbf{e}_1 E_{1,0}$ with a real unit-vector $\mathbf{e}_1$, it is called circularly polarized if $\mathbf{E}_{1,0} = (\mathbf{e}_1 \mp \mathrm{i}\mathbf{e}_2)E_{1,0}/\sqrt{2}$ with real unit vectors $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$, where $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ and $\mathbf{k}_0$ form an orthogonal right-handed basis. The upper sign applies for a right-, the lower for a left-polarized wave.

16.c.γ Zeitmittelwerte und Zeitintegrale

16.c.γ Time averages and time integrals

Die Energiedichte und der Poynting-Vektor sind Größen, die bilinear in den Feldern sind. Hat man etwa monochromatische Wellen, wie in (16.43) und (16.44), so oszillieren diese Größen. Man ist aber oft am Mittelwert dieser Größen interessiert. Haben wir also zwei Größen

Energy-density and Poynting vector are quantities bilinear in the fields. In case of a monochromatic wave as in (16.43) and (16.44) these quantities oscillate. One is often interested in the averages of these quantities. Thus if we have two quantities

$$a = \Re\left(a_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right), \quad b = \Re\left(b_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right), \tag{16.45}$$

so ist

then one has

$$ab = \frac{1}{4}a_0 b_0 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t} + \frac{1}{4}(a_0 b_0^* + a_0^* b_0) + \frac{1}{4}a_0^* b_0^* \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}. \tag{16.46}$$

Der erste und der letzte Term oszillieren (wir nehmen $\omega \neq 0$ an). Sie heben sich im Zeitmittel weg, so dass im Zeitmittel bleibt

The first and the last term oscillate (we assume $\omega \neq 0$). They cancel in the time average. Thus one obtains in the time average

$$\overline{ab} = \frac{1}{4}(a_0 b_0^* + a_0^* b_0) = \frac{1}{2}\Re(a_0^* b_0). \tag{16.47}$$

Man beachte, dass a_0 und b_0 im allgemeinen komplex sind, und das Zeitmittel wesentlich von der relativen Phase beider Größen und nicht nur von den Beträgen $|a_0|$ und $|b_0|$ abhängt.

Please note that a_0 and b_0 are in general complex and that the time average depends essentially on the relative phase between both quantities and not only on the moduli $|a_0|$ and $|b_0|$.

Sind a und b durch Fourier-Integrale gegeben,

If a and b are given by Fourier integrals

$$a(t) = \Re\left(\int \mathrm{d}\omega a_0(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right) \tag{16.48}$$

und analog für $b(t)$, so werden häufig die Zeitintegrale über diese Größen und deren Produkte endlich sein. Hierzu müssen wir das Zeitintegral $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ bestimmen. Dieses Integral ist nicht wohl definiert. Tatsächlich soll es aber mit einer in ω stetigen Funktion multipliziert werden, so dass es auch genügt, herauszubekommen, wie sich das Zeit-Integral über dieses Frequenz-Integral verhält. Hierzu gehen wir auf die Notation unseres Einschubs mit x und k zurück und stellen fest, dass

and analogously for $b(t)$, then often the time integrals of these quantities and their products over all times will be finite. For this purpose the time integral $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ has to be determined. This integral is not well defined. In practice it has often to be multiplied with a function continuous in ω. Thus it is sufficient to find out how the time-integral of this frequency-integral behaves. For this purpose we go back to the insertion on Fourier series with x und k and find that

$$\int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}nx/L} = L\delta_{0,n}, \tag{16.49}$$

also

thus

$$\sum_{n=n_-}^{n_+} \int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}nx/L} = L, \tag{16.50}$$

falls $n_- \leq 0$ und $n_+ \geq 0$ sind, sonst verschwindet die Summe. Jetzt führen wir wieder den Limes $L \to \infty$ durch und erhalten

if $n_- \leq 0$ and $n_+ \geq 0$. Otherwise the sum vanishes. Now we perform again the limit $L \to \infty$ and obtain

$$\sum_{k_-}^{k_+} \Delta k \int_{-L/2}^{L/2} dx \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} = \Delta k L \to \int_{k_-}^{k_+} \mathrm{d}k \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} = 2\pi, \tag{16.51}$$

falls k_- negativ und k_+ positiv sind, sonst ist es Null. Daraus folgt

if k_- is negative and k_+ positive, otherwise it vanishes. Thus we obtain

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} = 2\pi\delta(k). \tag{16.52}$$

Mit diesem Ergebnis finden wir

With this result we obtain

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t a(t) b(t) = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \Big(a_0(\omega) + a_0^*(-\omega))(b_0(-\omega) + b_0^*(\omega)\Big). \tag{16.53}$$

Treten nur positive Frequenzen ω unter dem Integral auf, so erhält man

If there are only positive frequencies ω under the integral then one obtains

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t a(t) b(t) = \frac{\pi}{2} \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}\omega \Big(a_0(\omega) b_0^*(\omega) + a_0^*(\omega) b_0(\omega)\Big) = \pi \Re\Big(\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}\omega a_0^*(\omega) b_0(\omega)\Big). \tag{16.54}$$

17 Elektromagnetische Wellen in homogenen Leitern

17 Electromagnetic Waves in Homogeneous Conductors

17.a Transversal-Schwingungen bei niedrigen Frequenzen

17.a Transverse Oscillations at Low Frequencies

Wir untersuchen Transversal-Schwingungen in einem homogenen Leiter. Dabei setzen wir $\mu = 1$. Aus

We investigate the transverse oscillations in a homogeneous conductor. We put $\mu = 1$. From

$$\mathbf{j}_\mathrm{f} = \sigma \mathbf{E} \tag{17.1}$$

folgt

one obtains

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} - \frac{1}{c}\epsilon\dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}. \tag{17.2}$$

Bei periodischen Feldern der Kreisfrequenz ω,

For periodic fields of frequency ω,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{17.3}$$

entsprechend auch für ρ_f und $\mathbf{j}_\mathrm{f}$, folgt dann

and similarly for ρ_f and $\mathbf{j}_\mathrm{f}$, one obtains

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}_0 + (\frac{\mathrm{i}\omega}{c}\epsilon - \frac{4\pi}{c}\sigma)\mathbf{E}_0 = \mathbf{0}. \tag{17.4}$$

Dies können wir auch schreiben

This can be written

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}_0 + \frac{\mathrm{i}\omega}{c}\epsilon(\omega)\mathbf{E}_0 = \mathbf{0}, \quad \epsilon(\omega) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma}{\mathrm{i}\omega}. \tag{17.5}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung

From the equation of continuity

$$\dot{\rho}_\mathrm{f} + \operatorname{div}\mathbf{j}_\mathrm{f} = 0 \tag{17.6}$$

folgt

one obtains

$$-\mathrm{i}\omega\rho_{\mathrm{f},0} + \operatorname{div}\mathbf{j}_{\mathrm{f},0} = 0 \tag{17.7}$$

und damit

and thus

$$\operatorname{div}\mathbf{D}_0 = 4\pi\rho_{\mathrm{f},0} = \frac{4\pi}{\mathrm{i}\omega}\operatorname{div}\mathbf{j}_{\mathrm{f},0} = \frac{4\pi\sigma}{\mathrm{i}\omega}\operatorname{div}\mathbf{E}_0. \tag{17.8}$$

Damit gilt

Thus we have

$$\epsilon(\omega)\operatorname{div}\mathbf{E}_0 = 0 \tag{17.9}$$

wegen $\operatorname{div}\mathbf{D}_0 = \epsilon\operatorname{div}\mathbf{E}_0$. Wir können daher unsere bisherigen Ergebnisse von Isolatoren auf Leiter übertragen, indem wir ϵ durch $\epsilon(\omega)$ ersetzen. So finden wir

because of $\operatorname{div}\mathbf{D}_0 = \epsilon\operatorname{div}\mathbf{E}_0$. We may thus transfer our results from insulators to conductors, if we replace ϵ by $\epsilon(\omega)$. Thus we obtain

$$k^2 = \epsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}. \tag{17.10}$$

Da $\epsilon(\omega)$ komplex ist, ist für reelles ω der Wellenvektor $\mathbf{k}$ komplex. Wir setzen

Since $\epsilon(\omega)$ is complex, one obtains for real ω a complex wave-vector $\mathbf{k}$. We put

$$\sqrt{\epsilon(\omega)} = n + \mathrm{i}\kappa, \quad k = \frac{\omega}{c}(n + \mathrm{i}\kappa) \tag{17.11}$$

und erhalten mit

and obtain a damped wave with

$$e^{ikz} = e^{i\omega nz/c - \omega\kappa z/c} \tag{17.12}$$

eine gedämpfte Welle. Für die Felder ergibt sich dann

. For the fields we obtain

$$\mathbf{E} = \Re(\mathbf{E}_0 e^{i\omega(nz/c-t)})e^{-\omega\kappa z/c}, \tag{17.13}$$

$$\mathbf{B} = \Re(\sqrt{\epsilon(\omega)}\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_0 e^{i\omega(nz/c-t)})e^{-\omega\kappa z/c}. \tag{17.14}$$

Die Amplitude fällt auf der Strecke $d = \frac{c}{\omega\kappa}$ auf 1/e ab (Eindringtiefe). Für kleine Frequenzen kann man approximieren

The amplitude decays in a distance $d = \frac{c}{\omega\kappa}$ by a factor 1/e. This distance is called penetration depth or skin depth. For small frequencies one can approximate

$$\sqrt{\epsilon(\omega)} \approx \sqrt{-\frac{4\pi\sigma}{i\omega}} = (1+i)\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}, \quad n = \kappa = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}, \quad d = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}. \tag{17.15}$$

Für Kupfer hat man $\sigma = 5.8 \cdot 10^{17}$ s^{-1}, für $\omega = 2\pi \cdot 50$ s^{-1} folgt $d = 9$ mm. Man spricht vom Skin-Effekt. Der Wechselstrom fällt im Leiter nach innen exponentiell ab, wobei der Abfall für höhere Frequenzen rapider ist.

For copper one has $\sigma = 5.8 \cdot 10^{17}$ s^{-1}, for $\omega = 2\pi \cdot 50$ s^{-1} one obtains $d = 9$ mm. This effect is called the skin-effect. The alternating current decays exponentially inside the conductor. For larger frequencies the decay is more rapidly.

17.b Transversal-Schwingungen bei hohen Frequenzen

17.b Transverse Oscillations at High Frequencies

Tatsächlich hängen ϵ und σ von ω ab. Wir wollen das Frequenz-Verhalten der Leitfähigkeit modellmäßig betrachten und gehen von der Bewegungsgleichung eines Ladungsträgers (zum Beispiel eines Elektrons im Metall) aus,

In reality ϵ and σ depend on ω. We will now consider the frequency dependence of the conductivity within a simple model and start out from the equation of motion of a charge (for example an electron in a metal)

$$m_0\ddot{\mathbf{r}} = e_0\mathbf{E} - \frac{m_0}{\tau}\dot{\mathbf{r}}, \tag{17.16}$$

wobei m_0 und e_0 Masse und Ladung des Ladungsträgers seien. Der letzte Term ist ein Reibungsterm, der die Stöße mit anderen Teilchen pauschal beschreibt. Dabei ist τ die Relaxationszeit, die angibt, wie rasch die Bewegung ohne elektrisches Feld abklingt. Mit $\mathbf{j}_f = \rho_f\dot{\mathbf{r}} = n_0e_0\dot{\mathbf{r}}$, wobei n_0 die Dichte der freibeweglichen Ladungsträger ist, folgt dann

where m_0 and e_0 are mass and charge of the carrier. The last term is a friction term which takes the collisions with other particles in a rough way into account. There τ is the relaxation time, which describes how fast the velocity decays in the absense of an electric field. One obtains with $\mathbf{j}_f = \rho_f\dot{\mathbf{r}} = n_0e_0\dot{\mathbf{r}}$, where n_0 is the density of the freely moving carriers

$$\frac{m_0}{n_0e_0}\frac{\partial\mathbf{j}_f}{\partial t} = e_0\mathbf{E} - \frac{m_0}{n_0\tau e_0}\mathbf{j}_f. \tag{17.17}$$

Im stationären Fall $\partial\mathbf{j}_f/\partial t = \mathbf{0}$ folgt die statische Leitfähigkeit $\sigma_0 = \frac{n_0\tau e_0^2}{m_0}$, so dass wir

In the stationary case $\partial\mathbf{j}_f/\partial t = \mathbf{0}$ one obtains the static conductivity $\sigma_0 = \frac{n_0\tau e_0^2}{m_0}$. Thus we can write

$$\tau\frac{\partial\mathbf{j}_f}{\partial t} = \sigma_0\mathbf{E} - \mathbf{j}_f \tag{17.18}$$

schreiben können. Mit der Zeitabhängigkeit $\propto e^{-i\omega\tau}$ folgt dann

. With the time dependence $\propto e^{-i\omega\tau}$ one obtains

$$(1 - i\omega\tau)\mathbf{j}_{f,0} = \sigma_0\mathbf{E}_0, \tag{17.19}$$

was aufgelöst wird zu

which can be rewritten

$$\mathbf{j}_{f,0} = \sigma(\omega)\mathbf{E}_0 \tag{17.20}$$

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1-\mathrm{i}\omega\tau} \tag{17.21}$$
$$\epsilon(\omega) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma_0}{\mathrm{i}\omega(1-\mathrm{i}\omega\tau)}. \tag{17.22}$$

Für hohe Frequenzen, $\omega\tau \gg 1$ folgt daraus

For large frequencies, $\omega\tau \gg 1$ one obtains

$$\epsilon(\omega) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma_0}{\tau\omega^2} = \epsilon - \frac{4\pi n_0 e_0^2}{m_0\omega^2} = \epsilon\Big(1 - \frac{\omega_\mathrm{P}^2}{\omega^2}\Big) \tag{17.23}$$

mit der Plasmafrequenz

with the plasma frequency

$$\omega_\mathrm{P} = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e_0^2}{\epsilon m_0}}. \tag{17.24}$$

Für $\omega < \omega_\mathrm{P}$ erhält man ein negatives $\epsilon(\omega)$, das heißt

For $\omega < \omega_\mathrm{P}$ one obtains a negative $\epsilon(\omega)$, that is

$$n = 0, \quad \kappa = \sqrt{\epsilon\Big(\frac{\omega_\mathrm{P}^2}{\omega^2} - 1\Big)} \tag{17.25}$$

mit einem exponentiellen Abfall der Welle. Für $\omega > \omega_\mathrm{P}$ dagegen wird ϵ positiv,

with an exponential decay of the wave. However, for $\omega > \omega_\mathrm{P}$ one obtains a positive ϵ

$$n = \sqrt{\epsilon\Big(1 - \frac{\omega_\mathrm{P}^2}{\omega^2}\Big)}, \quad \kappa = 0. \tag{17.26}$$

Für diese hohen Frequenzen ist der Leiter durchsichtig. Für Kupfer hat man $1/\tau = 3.7 \cdot 10^{13}$ s^{-1}, $\sigma_0 = 5.8 \cdot 10^{17}$ s^{-1} und $\omega_\mathrm{P} = 1.6 \cdot 10^{16}$ s^{-1}. Für sichtbares Licht hat man den Frequenz-Bereich $\omega = 2.4...5.2 \cdot 10^{15}$ s^{-1}, so dass Kupfer im sichtbaren Bereich undurchsichtig ist. In Elektrolyten ist jedoch die Ladungsträgerdichte niedriger, die Masse der Ladungsträger höher, so dass die Plasmafrequenz niedriger ist. Daher sind Elektrolyte in der Regel durchsichtig.

For such large frequencies the conductor becomes transparent. For copper one has $1/\tau = 3.7 \cdot 10^{13}$ s^{-1}, $\sigma_0 = 5.8 \cdot 10^{17}$ s^{-1} and $\omega_\mathrm{P} = 1.6 \cdot 10^{16}$ s^{-1}. For visible light one has the frequency-region $\omega = 2.4...5.2 \cdot 10^{15}$ s^{-1}, so that copper is non-transparent in the visible range. In electrolytes, however, the carrier density is less, the mass is bigger, so that the plasma-frequency is smaller. Thus electrolytes are normally transparent.

17.c Longitudinale = Plasma-Schwingungen

17.c Longitudinal = Plasma Oscilations

Für $\omega = \omega_\mathrm{P}$ ist $\epsilon(\omega) = 0$. Dann erlaubt (17.9) longitudinale elektrische Wellen

One has $\epsilon(\omega) = 0$ for $\omega = \omega_\mathrm{P}$. Then (17.9) allows for longitudinal electric waves

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_z \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega_\mathrm{P} t)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}. \tag{17.27}$$

Diese gehen mit longitudinalen Schwingungen der Ladungsträger einher, die man erhält, wenn man den Reibungsterm in (17.17) vernachlässigt.

These go along with longitudinal oscillations of the charge carriers, which are obtained by neglecting the friction term in (17.17).

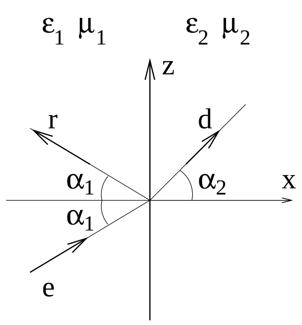
18 Reflexion und Brechung an einer ebenen Grenzfläche

18 Reflection and Refraction at a Planar Surface

18.a Problemstellung und Ausbreitungsrichtung

18.a Problem and Direction of Propagation

Wir betrachten eine einlaufende ebene Welle $\propto e^{i(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ für $x < 0$, $\mathbf{k}_e = (k', 0, k_z)$, die auf die Grenzfläche $x = 0$ auftrifft. Für $x < 0$ habe man die Dielektrizitätskonstante ϵ_1 und die Permeabilität μ_1, für $x > 0$ habe man ϵ_2 und μ_2. An der Grenzfläche $x = 0$ variiert die Welle wie $\propto e^{i(k_z z - \omega t)}$. Für die reflektierte und die gebrochene Welle hat man das gleiche Verhalten an der Grenzfläche, das heißt sie stimmen alle in k_z, k_y und ω überein und unterscheiden sich nur in k_x. Aus



We consider an incident plane wave $\propto e^{i(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ for $x < 0$, $\mathbf{k}_e = (k', 0, k_z)$, which hits the plane boundary $x = 0$. For $x < 0$ the dielectric constant and the permeability be ϵ_1 and μ_1, resp., for $x > 0$ these constants are ϵ_2 and μ_2. At the boundary $x = 0$ the wave oscillates $\propto e^{i(k_z z - \omega t)}$. The reflected and the refracted wave show the same behaviour at the boundary, i.e. all three waves have k_z, k_y and ω in common and differ only in k_x. From

$$\mathbf{k}_i^2 = \frac{\epsilon_i \mu_i \omega^2}{c^2} = \frac{n_i^2 \omega^2}{c^2}, \quad n_i = \sqrt{\epsilon_i \mu_i} \tag{18.1}$$

folgt

one obtains

$$k_1^2 = k_z^2 + k'^2 = \frac{n_1^2 \omega^2}{c^2} \qquad \mathbf{k}_r = (-k', 0, k_z) \tag{18.2}$$

$$k_2^2 = k_z^2 + k''^2 = \frac{n_2^2 \omega^2}{c^2} \qquad \mathbf{k}_d = (k'', 0, k_z). \tag{18.3}$$

Dabei sind $n_{1,2}$ die Brechzahlen der beiden Medien. Die x-Komponente des Wellenvektors der reflektierten Welle $\mathbf{k}_r$ ist gerade das Negative der einlaufenden Welle. Daher stimmt der Einfallswinkel α_1 mit dem Reflexionswinkel überein. Falls k'' reell ist, muss man $k'' > 0$ wählen, damit die Welle ausläuft und nicht einläuft. Falls k'' imaginär ist, muss man $\Im k'' > 0$ wählen, damit die Welle im Material 2 exponentiell abklingt und nicht anwächst. Für reelles k'' hat man

Here $n_{1,2}$ are the indices of refraction of both media. The x-component of the wave-vector of the reflected wave $\mathbf{k}_r$ is the negative of that of the incident wave. Thus the angle of the incident wave α_1 and of the reflected wave are equal. If k'' is real then $k'' > 0$ has to be chosen so that the wave is outgoing and not incoming. If k'' is imaginary then $\Im k'' > 0$ has to be chosen, so that the wave decays exponentially in the medium 2 and does grow exponentially. For real k'' one has

$$k_z = k_1 \sin\alpha_1 = k_2 \sin\alpha_2. \tag{18.4}$$

Daraus folgt mit (18.1) das Snelliussche Brechungsgesetz

Thus Snell's law follows from (18.1)

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2. \tag{18.5}$$

Falls sich $\sin\alpha_2 > 1$ ergibt, entspricht das einem imaginären k''. Wir bemerken schließlich noch

If $\sin\alpha_2 > 1$ results, then this corresponds to an imaginary k''. We finally remark

$$\frac{k'}{k''} = \frac{k_1\cos\alpha_1}{k_2\cos\alpha_2} = \frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1}. \tag{18.6}$$

18.b Grenzbedingungen, Amplituden

18.b Boundary Conditions, Amplitudes

Wir müssen nun zwei Polarisationen unterscheiden. Diese werden auf die Einfallsebene bezogen. Diese ist die von der Richtung des einfallenden Strahls und von der Normalen auf die Grenzfläche aufgespannte Ebene (in unseren Koordinaten die x-z-Ebene). Die Polarisation 1 liegt senkrecht zur Einfallsebene, das heißt $\mathbf{E}$ ist in y-Richtung polarisiert. Die Polarisation 2 liegt in der Einfallsebene, $\mathbf{H}$ liegt in y-Richtung. Man erhält dann folgende Polarisationen und Stetigkeitsbedingungen

In the following we have to distinguish two polarizations. They are referred to the plane of incidence. The plane of incidence is spaned by the direction of the incident wave and by the normal to the boundary (in our coordinates the x-z-plane). The polarization 1 is perpendicular to the plane of incidence, i.e. $\mathbf{E}$ is polarized in y-direction. The polarization 2 lies in the plane of incidence, $\mathbf{H}$ points in y-direction. One obtains the following conditions on polarization and continuity

	Polarisation 1 polarization 1	Polarisation 2 polarization 2	
$\mathbf{E}$	$\perp$ Einfallsebene plane of inc.	in Einfallsebene in plane of inc.	
$\mathbf{H}$	in Einfallsebene in plane of inc.	$\perp$ Einfallsebene plane of inc.	
$\mathbf{E}_\mathrm{t}$	$E_{1,y} = E_{2,y}$	$E_{1,z} = E_{2,z}$	(18.7)
$D_\mathrm{n} = \epsilon E_\mathrm{n}$		$\epsilon_1 E_{1,x} = \epsilon_2 E_{2,x}$	(18.8)
$\mathbf{H}_\mathrm{t}$	$H_{1,z} = H_{2,z}$	$H_{1,y} = H_{2,y}$	(18.9)
$B_\mathrm{n} = \mu H_\mathrm{n}$	$\mu_1 H_{1,x} = \mu_2 H_{2,x}$		(18.10)

Für die Polarisation 1 hat man daher für die elektrische Feldstärke

Thus the ansatz for the electric field of polarization 1 is

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}\mathbf{e}_y \cdot \begin{cases} (E_\mathrm{e}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x} + E_\mathrm{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x}) & x<0 \\ E_\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k''x} & x>0 \end{cases} \tag{18.11}$$

anzusetzen. Aus den MAXWELL-Gleichungen erhält man daraus die magnetische Feldstärke

. From MAXWELL's equations one obtains for the magnetic field

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c}\dot{\mathbf{H}} = \frac{\mathrm{i}\omega\mu}{c}\mathbf{H}, && (18.12)\\ \mu H_x &= \frac{c}{\mathrm{i}\omega}(\operatorname{rot}\mathbf{E})_x = -\frac{c}{\mathrm{i}\omega}\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{ck_z}{\omega}E_y && (18.13)\\ H_z &= \frac{c}{\mathrm{i}\mu\omega}\frac{\partial E_y}{\partial x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}\frac{c}{\omega}\cdot\begin{cases} \frac{k'}{\mu_1}(E_\mathrm{e}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x} - E_\mathrm{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x}) & x<0 \\ \frac{k''}{\mu_2}E_\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k''x} & x>0. \end{cases} && (18.14) \end{aligned}$$

Die Randbedingungen ergeben sich aus der Stetigkeit von E_y, die mit der Stetigkeit von μH_x identisch ist, und aus der Stetigkeit von H_z,

The boundary conditions come from the continuity of E_y, which is identical to the continuity of μH_x, and from the continuity of H_z,

$$E_\mathrm{e} + E_\mathrm{r} = E_\mathrm{d}, \quad \frac{k'}{\mu_1}(E_\mathrm{e} - E_\mathrm{r}) = \frac{k''}{\mu_2}E_\mathrm{d}, \tag{18.15}$$

woraus die Amplituden

from which one obtains the amplitudes

$$E_\mathrm{r} = \frac{\mu_2 k' - \mu_1 k''}{\mu_2 k' + \mu_1 k''}E_\mathrm{e}, \quad E_\mathrm{d} = \frac{2\mu_2 k'}{\mu_2 k' + \mu_1 k''}E_\mathrm{e} \tag{18.16}$$

folgen.

.

Von der Polarisation 1 gelangt man zur Polarisation 2 durch die Transformation

One comes from polarization 1 to polarization 2 by the transformation

$$\mathbf{E} \to \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \to -\mathbf{E}, \quad \epsilon \leftrightarrow \mu. \tag{18.17}$$

Daher erhält man für die Amplituden

Thus one obtains for the amplitudes

$$H_\mathrm{r} = \frac{\epsilon_2 k' - \epsilon_1 k''}{\epsilon_2 k' + \epsilon_1 k''} H_\mathrm{e}, \quad H_\mathrm{d} = \frac{2\epsilon_2 k'}{\epsilon_2 k' + \epsilon_1 k''} H_\mathrm{e}. \tag{18.18}$$

18.c Diskussion für $\mu_1 = \mu_2$

18.c Discussion for $\mu_1 = \mu_2$

Wir diskutieren nun die Ergebnisse für $\mu_1 = \mu_2$, da für viele Materialien die Permeabilität praktisch gleich 1 ist.

Now we discuss the results for $\mu = 1 = \mu_2$, since for many media the permeability is practically equal to 1.

18.c.α Isolator, $|\sin\alpha_2| < 1$: Brechung

18.c.α Insulator, $|\sin\alpha_2| < 1$: Refraction

Wir bestimmen nun die Amplitude der reflektierten Welle aus der der einfallenden Welle. Der Reflexionskoeffizient R, das heißt der Anteil der Strahlungsleistung, die reflektiert wird, ergibt sich zu

Now we determine the amplitude of the reflected wave from that of the incident wave. The reflection coefficient R, i.e. the percentage of the incident power which is reflected is given by

$$R = \left(\frac{E_\mathrm{r}}{E_\mathrm{e}}\right)^2 = \left(\frac{H_\mathrm{r}}{H_\mathrm{e}}\right)^2, \tag{18.19}$$

da der zeitgemittelte Poynting-Vektor $\mathbf{S} = c\mathbf{E} \times \mathbf{H}/(4\pi)$ für Vektoren $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$, die orthogonal auf einander stehen, sich betragsmäßig zu

since the modulus of the time averaged Poynting vector $\mathbf{S} = c\mathbf{E} \times \mathbf{H}/(4\pi)$ for vectors $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ which are orthogonal to each other yields

$$\overline{|\mathbf{S}|} = \frac{c}{8\pi}|\mathbf{E}| \cdot |\mathbf{H}| = \frac{c'}{8\pi}\epsilon E^2 = \frac{c'}{8\pi}\mu H^2 \tag{18.20}$$

ergibt. Für die Polarisation 1 ergibt sich mit (18.6)

. For the polarisation 1 one obtains with (18.6)

$$E_\mathrm{r} = \frac{k' - k''}{k' + k''} E_\mathrm{e} = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{\tan\alpha_2 + \tan\alpha_1} E_\mathrm{e} = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_2 + \alpha_1)} E_\mathrm{e}. \tag{18.21}$$

Für die Polarisation 2 folgt

For polarization 2 one has

$$H_\mathrm{r} = \frac{n_2^2 k' - n_1^2 k''}{n_2^2 k' + n_1^2 k''} H_\mathrm{e} = \frac{\sin^2\alpha_1 \tan\alpha_2 - \sin^2\alpha_2 \tan\alpha_1}{\sin^2\alpha_1 \tan\alpha_2 + \sin^2\alpha_2 \tan\alpha_1} H_\mathrm{e} = \frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_2)} H_\mathrm{e}. \tag{18.22}$$

Man erkennt, dass bei der Polarisation 2 die Reflexion verschwindet, wenn $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^0$, woraus dann wegen $\sin\alpha_2 = \cos\alpha_1$ und (18.5) $\tan\alpha_1 = n_2/n_1$ folgt. Dies ist der Brewstersche Winkel. Bei Einfall von Licht unter diesem Winkel wird nur Licht der Polarisation 1 reflektiert. Dies kann zur Erzeugung linear polarisierten Lichtes verwendet werden. Im Limes α gegen Null, das heißt bei senkrechtem Auffall des Lichtes ergibt sich für beide Polarisationen (die in diesem Limes nicht mehr zu unterscheiden sind)

One finds that the reflection vanishes for polarization 2 for $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^0$, from which one obtains $\tan\alpha_1 = n_2/n_1$ because of $\sin\alpha_2 = \cos\alpha_1$ and (18.5). This angle is called Brewster's angle. By incidence of light under this angle only light of polarization 1 is reflected. This can be used to generate linearly polarized light. In the limit α approaching zero, i.e. by incidence of the light perpendicular to the surface one obtains for both polarizations (which can no longer be distinguished)

$$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2, \quad \alpha = 0 \tag{18.23}$$

18.c.β Isolator, $|\sin\alpha_2| > 1$: Totalreflexion

In diesem Fall ist k'' imaginär. Die Welle dringt nur noch exponentiell abklingend in das zweite Material ein. Jeweils den ersten Ausdrücken in (18.21) und (18.22) entnimmt man, da der Zähler des Bruchs das konjugiert Komplexe des Nenners ist, dass

18.c.β Insulator, $|sin\alpha_2| > 1$: Total Reflection

In this case k'' is imaginary. The wave penetrates only exponentially decaying into the second medium. From the first expressions of (18.21) and (18.22) one finds since the numerator of the fraction is the conjugate complex of the denominator that

$$|E_r| = |E_e|, \quad |H_r| = |H_e|. \quad R = 1, \tag{18.24}$$

Man hat also Totalreflexion.

Thus one has total reflection.

18.c.γ Metallische Reflexion, $\alpha = 0$

Im Falle der metallischen Reflexion setzen wir $n_1 = 1$ (Vakuum oder Luft) und $n_2 = n + i\kappa$ (17.11). Dann folgt für den Reflexionskoeffizient für $\alpha = 0$ aus (18.23)

18.c.γ Metallic Reflection, $\alpha = 0$

In the case of metallic reflection we set $n_1 = 1$ (vacuum or air) and $n_2 = n + i\kappa$ (17.11). Then one obtains from (18.23) for $\alpha = 0$ the reflection coefficient

$$R = \left|\frac{n + i\kappa - 1}{n + i\kappa + 1}\right|^2 = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2} = 1 - \frac{4n}{(n+1)^2 + \kappa^2}. \tag{18.25}$$

Für $\omega\epsilon \ll 2\pi\sigma$ folgt dann aus (17.5) und (17.15)

For $\omega\epsilon \ll 2\pi\sigma$ one obtains from (17.5) and (17.15)

$$n \approx \kappa \approx \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}, \quad R \approx 1 - \frac{2}{n} \approx 1 - \sqrt{\frac{2\omega}{\pi\sigma}}, \tag{18.26}$$

ein Ergebnis, das nach Hagen und Rubens benannt ist.

a result named after Hagen and Rubens.

18.c.δ Oberflächenwellen am Leiter

Wir wollen nun noch Wellen betrachten, die sich an der Grenzfläche von Leiter und Vakuum entlang bewegen. Wir setzen also $\epsilon_1 = 1$ und $\epsilon_2 = \epsilon(\omega)$ aus (17.5). Wir benötigen dann auf jeder Seite der Grenzfläche genau eine Welle. Das erreichen wir, wenn wir die Lösung aufsuchen, bei der keine Welle reflektiert wird. Das heißt, wir nehmen formal die Welle mit Polarisation 2, bei der H_r in (18.18) verschwindet, also

18.c.δ Surface Waves along a Conductor

Finally we consider waves, which run along the boundary of a conductor with the vacuum. Thus we set $\epsilon_1 = 1$ and $\epsilon_2 = \epsilon(\omega)$ from (17.5). Then we need one wave on each side of the boundary. We obtain this by looking for a solution, where no wave is reflected. Formally this means that we choose a wave of polarization 2 for which H_r in (18.18) vanishes, thus

$$\epsilon(\omega)k' = k'' \tag{18.27}$$

gilt. Zusammen mit (18.2) und (18.3)

has to hold. With (18.2) and (18.3)

$$k_z^2 + k'^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad k_z^2 + k''^2 = \frac{\epsilon(\omega)\omega^2}{c^2} \tag{18.28}$$

findet man die Lösung

one obtains the solution

$$k_z = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{1+\epsilon(\omega)}}, \quad k' = \frac{k_z}{\sqrt{\epsilon(\omega)}}, \quad k'' = \sqrt{\epsilon(\omega)}k_z. \tag{18.29}$$

Mit der Näherung (17.15) erhält man für nicht zu große Frequenzen

Using approximation (17.15) one obtains for frequencies which are not too large

$$k_z = \frac{\omega}{c}\left(1 + \frac{i\omega}{8\pi\sigma}\right) \tag{18.30}$$

$$k' = \frac{(1-\mathrm{i})\omega^{3/2}}{2c\sqrt{2\pi\sigma}} \tag{18.31}$$

$$k'' = \frac{(1+\mathrm{i})\omega^{1/2}\sqrt{2\pi\sigma}}{c}. \tag{18.32}$$

Für kleine Frequenzen, $\omega < \sigma$, ist daher der exponentielle Abfall in Ausbreitungsrichtung (k_z) am langsamsten, in das Vakuum hinein etwas schneller (k') und im Metall am schnellsten (k'').

Thus for small frequencies, $\omega < \sigma$, the exponential decay in direction of propagation (k_z) is smallest, into the vacuum it is faster (k') and into the metal it is fastest (k'').

19 Hohlleiter

Es gibt verschiedene Arten von Wellenleitern. Diese können zum Beispiel aus zwei Leitern bestehen, die entweder nebeneinander herlaufen (zwei Drähte) oder koaxiale Leiter sind. Man kann aber auch elektromagnetische Wellen in einem dielektrischen Wellenleiter (Lichtleiter) oder in einem Hohlleiter führen.

In allen Fällen wollen wir davon ausgehen, dass Translationsinvarianz in z-Richtung besteht, so dass die Materialgrößen ϵ, μ und σ nur Funktionen von x und y sind. Dann kann man die elektromagnetischen Felder ansetzen zu

19 Wave Guides

There are various kinds of wave guides. They may consist for example of two conductors, which run in parallel (two wires) or which are coaxial conductors. But one may also guide an electro-magnetic wave in a dielectric wave guide (for light e.g.) or in a hollow metallic cylinder.

In all cases we assume translational invariance in z-direction, so that material properties ϵ, μ, and σ are only functions of x and y. Then the electromagnetic fields can be written

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}. \tag{19.1}$$

Es bleiben nun die Funktionen $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ und $\omega(k_z)$ zu bestimmen.

Then the functions $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ and $\omega(k_z)$ have to be determined.

19.a Hohlleiter

Wir wollen das Programm für einen Hohlleiter durchführen, das heißt für einen Metallzylinder (nicht notwendig mit kreisförmigem Querschnitt). Wir beginnen mit den Randbedingungen, wobei wir die metallische Oberfläche als idealen Leiter annehmen, $\sigma = \infty$. Dann gilt an der Oberfläche

19.a Wave Guides

We will carry through this program for a wave guide which is a hollow metallic cylinder (not necessarily with circular cross-section). We start out from the boundary conditions, where we assume that the cylinder surface is an ideal metal $\sigma = \infty$. Then one has at the surface

$$\mathbf{E}_\mathrm{t} = \mathbf{0}, \tag{19.2}$$

da eine tangentiale Komponente eine unendlich große Stromdichte an der Oberfläche bewirken würde. Weiter folgt aus $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}/c$

since a tangential component would yield an infinite current density at the surface. Further from $\operatorname{curl}\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}/c$ it follows that

$$\mathrm{i}kB_\mathrm{n} = (\operatorname{rot}\mathbf{E})_\mathrm{n} = (\operatorname{rot}\mathbf{E}_\mathrm{t})\cdot\mathbf{e}_\mathrm{n} \quad k = \omega/c, \tag{19.3}$$

woraus

from which one obtains

$$B_\mathrm{n} = 0 \tag{19.4}$$

folgt.

.

Im Inneren des Hohlleiters gilt

Inside the wave guide one has

$$(\operatorname{rot}\mathbf{E})_y = -\frac{1}{c}\dot{B}_y \quad \to \quad \mathrm{i}k_z E_{0,x} - \nabla_x E_{0,z} = \mathrm{i}kB_{0,y} \tag{19.5}$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{B})_x = \frac{1}{c}\dot{E}_x \quad \to \quad \nabla_y B_{0,z} - \mathrm{i}k_z B_{0,y} = -\mathrm{i}kE_{0,x}. \tag{19.6}$$

Unter Verwendung von

By use of

$$k_\perp^2 = k^2 - k_z^2 \tag{19.7}$$

lassen sich die Transversalkomponenten durch die Longitudinalkomponenten ausdrücken

one can express the transverse components by the longitudinal components

$$k_\perp^2 E_{0,x} = \mathrm{i}k_z\nabla_x E_{0,z} + \mathrm{i}k\nabla_y B_{0,z} \tag{19.8}$$
$$k_\perp^2 B_{0,y} = \mathrm{i}k\nabla_x E_{0,z} + \mathrm{i}k_z\nabla_y B_{0,z}. \tag{19.9}$$

Ähnliche Gleichungen gelten für $E_{0,y}$ und $B_{0,x}$. Zur Bestimmung der Longitudinalkomponenten verwenden wir die Wellengleichung

Similar equations hold for $E_{0,y}$ and $B_{0,x}$. In order to determine the longitudinal components we use the wave equation

$$(\triangle - \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2})(E_{0,z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}) = 0, \tag{19.10}$$

woraus

from which one obtains

$$(\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + k_\perp^2)E_{0,z}(x,y) = 0 \tag{19.11}$$

und analog

and similarly

$$(\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + k_\perp^2)B_{0,z}(x,y) = 0 \tag{19.12}$$

folgt. Man kann zeigen, dass damit für $k_\perp \neq 0$ auch die übrigen MAXWELL-Gleichungen erfüllt sind. Es gilt nämlich

. One can show that the other equations of MAXWELL are fulfilled for $k_\perp \neq 0$, since

$$\left.\begin{array}{r} k_\perp^2 \operatorname{div}\mathbf{E} = \mathrm{i}k_z \\ k_\perp^2(\operatorname{rot}\mathbf{B} - \dot{\mathbf{E}}/c)_z = \mathrm{i}k \end{array}\right\} \cdot (\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + k_\perp^2)E_{0,z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)} \tag{19.13}$$
$$\left.\begin{array}{r} k_\perp^2 \operatorname{div}\mathbf{B} = \mathrm{i}k_z \\ k_\perp^2(\operatorname{rot}\mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}}/c)_z = -\mathrm{i}k \end{array}\right\} \cdot (\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + k_\perp^2)B_{0,z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}. \tag{19.14}$$

Es genügt daher, die Wellengleichungen zu erfüllen. Wir bemerken weiter, dass $E_{0,z}$ und $B_{0,z}$ von einander unabhängig sind. Man unterscheidet dementsprechend TE-Moden (transversal elektrisch) mit $E_{0,z} = 0$ und TM-Moden (transversal magnetisch) mit $B_{0,z} = 0$.

Thus it is sufficient to fulfill the wave equations. We further note that $E_{0,z}$ and $B_{0,z}$ are independent from each other. Correspondingly one distinguishes TE-modes (transverse electric) with $E_{0,z} = 0$ and TM-modes (transverse magnetic) with $B_{0,z} = 0$.

Wir kommen nun nochmals auf die Randbedingungen zurück. Die Komponenten senkrecht zu der Ausbreitungsrichtung z lassen sich

We return to the boundary conditions. The components perpendicular to the direction of propagation z read

$$k_\perp^2(\mathbf{e}_x E_{0,x} + \mathbf{e}_y E_{0,y}) = \mathrm{i}k_z \operatorname{grad} E_{0,z} - \mathrm{i}k\mathbf{e}_z \times \operatorname{grad} B_{0,z} \tag{19.15}$$
$$k_\perp^2(\mathbf{e}_x B_{0,x} + \mathbf{e}_y B_{0,y}) = \mathrm{i}k_z \operatorname{grad} B_{0,z} + \mathrm{i}k\mathbf{e}_z \times \operatorname{grad} E_{0,z} \tag{19.16}$$

schreiben. Führen wir auf der Oberfläche des Hohlleiters zu dem Normalenvektor $\mathbf{e}_n$ und dem Vektor $\mathbf{e}_z$ noch einen dritten Einheitsvektor $\mathbf{e}_c = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_n$ ein, dann wird die Tangentialebene an die Oberfläche durch $\mathbf{e}_z$ und $\mathbf{e}_c$ aufgespannt. $\mathbf{e}_c$ liegt dabei in der xy-Ebene. Da auch $\mathbf{e}_n$ in der xy-Ebene liegt, können wir auf n- and c-Komponenten transformieren

. If we introduce besides the normal vector $\mathbf{e}_n$ and the vector $\mathbf{e}_z$ a third unit vector $\mathbf{e}_c = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_n$ at the surface of the waveguide then the tangential plain of the surface is spanned by $\mathbf{e}_z$ and $\mathbf{e}_c$. $\mathbf{e}_c$ itself lies in the xy-plain. Since $\mathbf{e}_n$ lies in the xy-plain too, we may transform to n and c components

$$\mathbf{e}_x E_{0,x} + \mathbf{e}_y E_{0,y} = \mathbf{e}_c E_{0,c} + \mathbf{e}_n E_{0,n}. \tag{19.17}$$

Damit lassen sich dann (19.15, 19.16) in der Form

Then (19.15, 19.16) can be brought into the form

$$k_\perp^2(\mathbf{e}_n E_{0,n} + \mathbf{e}_c E_{0,c}) = \mathrm{i}k_z(\mathbf{e}_n\partial_n E_{0,z} + \mathbf{e}_c\partial_c E_{0,z}) - \mathrm{i}k(\mathbf{e}_c\partial_n B_{0,z} - \mathbf{e}_n\partial_c B_{0,z}), \tag{19.18}$$
$$k_\perp^2(\mathbf{e}_n B_{0,n} + \mathbf{e}_c B_{0,c}) = \mathrm{i}k_z(\mathbf{e}_n\partial_n B_{0,z} + \mathbf{e}_c\partial_c B_{0,z}) + \mathrm{i}k(\mathbf{e}_c\partial_n E_{0,z} - \mathbf{e}_n\partial_c E_{0,z}) \tag{19.19}$$

schreiben. Auf der Oberfläche muss gemäß (19.2, 19.4)

. At the surface one has

$$E_{0,z} = E_{0,c} = B_{0,\mathrm{n}} = 0 \tag{19.20}$$

gelten. Aus (19.18, 19.19) folgt

according to (19.2, 19.4). From (19.18, 19.19) one obtains

$$k_\perp^2 E_{0,c} = \mathrm{i}k_z\partial_c E_{0,z} - \mathrm{i}k\partial_n B_{0,z}, \tag{19.21}$$

$$k_\perp^2 B_{0,\mathrm{n}} = \mathrm{i}k_z\partial_n B_{0,z} + \mathrm{i}k\partial_c E_{0,z}. \tag{19.22}$$

Da $E_{0,z} = 0$ auf der Oberfläche, gilt auch $\partial_c E_{0,z} = 0$ auf der Oberfläche. Offensichtlich hat man als zweite Bedingung $\partial_n B_{0,z} = 0$.

Since $E_{0,z} = 0$ holds at the surface one has $\partial_c E_{0,z} = 0$ at the surface too. Apparently the second condition is $\partial_n B_{0,z} = 0$.

Damit ist das folgende Eigenwert-Problem zu lösen

Then the following eigenvalue problem has to be solved

$$\text{TM-Mode:} \quad (\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + k_\perp^2)E_{0,z} = 0, \quad E_{0,z} = 0 \; \begin{array}{l}\text{auf der Oberfläche}\\ \text{at the surface}\end{array}, \tag{19.23}$$

$$\text{TE-Mode:} \quad (\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + k_\perp^2)B_{0,z} = 0, \quad (\operatorname{grad} B_{0,z})_\mathrm{n} = 0 \; \begin{array}{l}\text{auf der Oberfläche}\\ \text{at the surface}\end{array}. \tag{19.24}$$

Es folgt das Dispersionsgesetz

Then one obtains the dispersion law

$$\omega = c\sqrt{k_z^2 + k_\perp^2}. \tag{19.25}$$

TEM-Moden Wir haben den Fall $k_\perp = 0$ bisher nicht diskutiert. Wir wollen dies nicht in allen Details tun. Man kann zeigen, dass für diese Moden beide Longitudinal-Komponenten verschwinden, $E_{0,z} = B_{0,z} = 0$. Man spricht daher von TEM-Moden. Für diese folgt mit $k_z = \pm k$ aus (19.5) und analog durch eine Drehung von **E** und **B** um 90^0 um die z-Achse $E_{0,x} \to E_{0,y}$, $B_{0,y} \to -B_{0,x}$

TEM-modes By now we did not discuss the case $k_\perp = 0$. We will not do this in all details. One can show that for these modes both longitudinal components vanish, $E_{0,z} = B_{0,z} = 0$. Thus one calls them TEM-modes. Using $k_z = \pm k$ from (19.5) and similarly after a rotation of **E** and **B** around the z-axis by 90^0 $E_{0,x} \to E_{0,y}$, $B_{0,y} \to -B_{0,x}$ one obtains

$$B_{0,y} = \pm E_{0,x}, \quad B_{0,x} = \mp E_{0,y}. \tag{19.26}$$

Aus $(\operatorname{rot}\mathbf{E})_z = 0$ folgt dann, dass man $\mathbf{E}_0$ durch den Gradienten eines Potentials darstellen kann

From $(\operatorname{curl}\mathbf{E})_z = 0$ it follows that $\mathbf{E}_0$ can be expressed by the gradient of a potential

$$\mathbf{E}_0 = -\operatorname{grad}\Phi(x,y), \tag{19.27}$$

das wegen $\operatorname{div}\mathbf{E}_0 = 0$ die Potentialgleichung erfüllt

which due to $\operatorname{div}\mathbf{E}_0 = 0$ fulfills Laplace's equation

$$(\nabla_x^2 + \nabla_y^2)\Phi(x,y) = 0. \tag{19.28}$$

Es ist also die homogene Laplace-Gleichung in zwei Dimensionen zu lösen. Wegen $\mathbf{E}_{0,\mathrm{t}} = \mathbf{0}$ muss auf der Leiteroberfläche das Potential konstant sein. Daher erhält man eine nicht-triviale Lösung nur in mehrfach zusammenhängenden Gebieten, also nicht im Innern eines kreisförmigen oder rechteckigen Querschnitts, aber außerhalb, oder in Koaxialkabeln, oder im Außenraum zweier Drähte.

Thus Laplace's homogeneous equation in two dimensions has to be solved. Because of $\mathbf{E}_{0,\mathrm{t}} = \mathbf{0}$ the potential on the surface has to be constant. Thus one obtains a non-trivial solution only in multiply connected regions, i.e. not inside a circular or rectangular cross-section, but outside such a region or in a coaxial wire or outside two wires.

19.b Lösung für rechteckigen Querschnitt

Wir bestimmen die Wellen im Hohlleiter für einen rechteckigen Querschnitt mit Seitenlängen a und b. Für die TM-Wellen machen wir den Produkt-Ansatz

$$E_{0,z}(x,y) = f(x)g(y) \tag{19.29}$$

Einsetzen in (19.11) gibt

$$f''g + fg'' + k_\perp^2 fg = 0 \tag{19.30}$$

oder

$$\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} = -k_\perp^2, \tag{19.31}$$

woraus folgt, dass f''/f und g''/g konstant sind. Da $E_{0,z}$ am Rand verschwinden muss, folgt

$$E_{0,z}(x,y) = E_0 \sin(\frac{n\pi x}{a})\sin(\frac{m\pi y}{b}), \quad k_\perp^2 = \left(\frac{nu\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \quad n \geq 1, m \geq 1. \tag{19.32}$$

Für die TE-Welle erhält man mit dem entsprechendenen Ansatz

$$B_{0,z}(x,y) = f(x)g(y) \tag{19.33}$$

und der Randbedingung $(\operatorname{grad} B_{0,z})_\mathrm{n} = 0$ die Lösungen

$$B_{0,z}(x,y) = B_0 \cos(\frac{n\pi x}{a})\cos(\frac{m\pi y}{b}), \quad k_\perp^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \quad n \geq 0, \quad m \geq 0, \quad n+m \geq 1. \tag{19.34}$$

19.c Wellenpakete

Vielfach hat man es nicht mit monochromatischen Wellen, sondern mit Wellenpaketen zu tun, die aus Fourierkomponenten mit $k_z \approx k_{z,0}$ bestehen

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x,y) \int dk_z\, f_0(k_z) e^{\mathrm{i}(k_z z - \omega(k_z)t)}, \tag{19.35}$$

wobei $f_0(k_z)$ bei $k_z = k_{z,0}$ ein Maximum hat und für andere k_z-Werte rasch abfällt. Dann entwickeln wir $\omega(k_z)$ um $k_{z,0}$

$$\omega(k_z) = \omega(k_{z,0}) + v_{\mathrm{gr}}(k_z - k_{z,0}) + ... \tag{19.36}$$

$$v_{\mathrm{gr}} = \left.\frac{d\omega(k_z)}{dk_z}\right|_{k_z=k_{z,0}}. \tag{19.37}$$

In linearer Näherung dieser Entwicklung folgt dann

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x,y) e^{\mathrm{i}(k_{z,0}z - \omega(k_{z,0})t)} f(z - v_{\mathrm{gr}}t), \quad f(z - v_{\mathrm{gr}}t) = \int \mathrm{d}k_z\, f_0(k_z) e^{\mathrm{i}(k_z - k_{z,0})(z - v_{\mathrm{gr}}t)}. \tag{19.38}$$

Der Vorfaktor enthält die Phase $\phi = k_{z,0}z - \omega(k_{z,0})t$. Das Paket oszilliert also mit der Phasengeschwindigkeit

$$v_{\mathrm{ph}} = \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_\phi = \frac{\omega(k_{z,0})}{k_{z,0}}. \tag{19.39}$$

19.b Solution for a Rectangular Cross Section

We determine the waves in a wave guide of rectangular cross-section with sides a and b. For the TM-wave we start with the factorization ansatz (19.29).

Insertion into (19.11) yields (19.30) and equivalently (19.31), from which one concludes that f''/f and g''/g have to be constant. Since $E_{0,z}$ has to vanish at the boundary, one obtains (19.32).

For the TE-wave one obtains with the corresponding ansatz (19.33) and the boundary condition $(\operatorname{grad} B_{0,z})_\mathrm{n} = 0$ the solutions (19.34).

19.c Wave Packets

Often one does not deal with monochromatic waves, but with wave packets, which consist of Fourier components with $k_z \approx k_{z,0}$ (19.35), where $f_0(k_z)$ has a maximum at $k_z = k_{z,0}$ and decays rapidly for other values of k_z. Then one expands $\omega(k_z)$ around $k_{z,0}$ (19.36), (19.37).

In linear approximation of this expansion one obtains (19.38).

The factor in front contains the phase $\phi = k_{z,0}z - \omega(k_{z,0})t$. Thus the wave packet oscillates with the phase velocity (19.39).

Die Ortsabhängigkeit der Amplitude steckt dagegen in der Funktion $f(z - v_{\rm gr}t)$. Das Wellenpaket bewegt sich also mit der Gruppengeschwindigkeit (auch Signalgeschwindigkeit) $v_{\rm gr}$, (19.37).

Für die Wellen des Hohlleiters finden wir aus (19.25)

On the other hand the local dependence of the amplitude is contained in the function $f(z - v_{\rm gr}t)$. Thus the wave packet moves with the group velocity (signal velocity) $v_{\rm gr}$, (19.37).

For the waves in the wave-guide we obtain from (19.25)

$$v_{\rm ph} = c\frac{\sqrt{k_\perp^2 + k_{z,0}^2}}{k_{z,0}}, \qquad (19.40)$$

$$v_{\rm gr} = c\frac{k_{z,0}}{\sqrt{k_\perp^2 + k_{z,0}^2}}. \qquad (19.41)$$

Die Phasengeschwindigkeit ist größer als die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c, die Gruppen- oder Signalgeschwindigkeit aber kleiner als die Lichtgeschwindigkeit. Geht man in der Entwicklung (19.36) über den linearen Term hinaus, so findet man, dass die Wellenpakete auseinanderfließen.

Aufgabe Bestimme $\omega(k)$ für Transversal-Schwingungen in einem Leiter oberhalb der Plasmafrequenz (Abschnitt 17.b) für $\epsilon = 1$ und die daraus resultierende Phasen- und Gruppengeschwindigkeit.

The phase velocity is larger than the velocity of light in vacuum c, the group velocity (velocity of a signal) less than c. If one performs the expansion (19.36) beyond the linear term, then one finds that the wave packets spread in time.

Exercise Determine $\omega(k)$ for transverse oscillations in a conductor above the plasma frequency (section 17.b) for $\epsilon = 1$ and the resulting phase- and group-velocities, resp.