G

Elektrodynamische Potentiale

Electrodynamic Potentials

20 Elektrodynamische Potentiale, Eichtransformationen

In der Elektrostatik haben wir bereits das elektrische Potential Φ kennengelernt, in der Magnetostatik das Vektorpotential $\mathbf{A}$. Beide können auch für die zeitabhängigen Probleme eingeführt werden und erlauben auch dann die Bestimmung von $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$.

20.a Potentiale

Die dritte und vierte M -Gleichung sind homogen, das heißt, sie enthalten die Ladungen und Ströme nicht explizit. Sie erlauben, die Felder $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$ durch Potentiale auszudrücken. Aus $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ folgt

20 Electrodynamic Potentials, Gauge Transformations

We already know the electric potential Φ from electrostatics and the vector potential $\mathbf{A}$ from magnetostatics. Both can also be used for time-dependent problems and allow the determination of $\mathbf{B}$ and $\mathbf{E}$.

20.a Potentials

M 's third and fourth equations are homogeneous equations, i.e. they do not contain charges and currents explicitly. They allow to express the fields $\mathbf{B}$ and $\mathbf{E}$ by means of potentials. One obtains from $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r},t). \tag{20.1}$$

Beweis: Wegen $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ gilt $\triangle\mathbf{B} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B}$ (B.26), woraus dann ähnlich wie in (9.16) und (9.17)

Proof: Due to $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ one has $\triangle\mathbf{B} = -\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{B}$ (B.26), from which one concludes similarly as in (9.16) and (9.17)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r'\Big(\operatorname{rot}'\operatorname{rot}'\mathbf{B}(\mathbf{r}')\Big)\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\operatorname{rot}'\mathbf{B}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{20.2}$$

bei der Einführung des Vektorpotentials in der Magnetostatik folgt. Ein elementarer Beweis folgt als Übungsaufgabe.

Aus $\operatorname{rot}\mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}}/c = \mathbf{0}$ folgt dann

when the vector potential was introduced in the magnetostatics. An elementary proof is left as exercise.

From $\operatorname{curl}\mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}}/c = \mathbf{0}$ one obtains

$$\operatorname{rot}\Big(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}\Big) = \mathbf{0}, \tag{20.3}$$

so dass das Argument unter der Rotation als Gradient geschrieben werden kann. Konventionell setzt man dafür $-\operatorname{grad}\Phi$, so dass die Darstellung

so that the argument under the curl can be expressed as a gradient. Conventionally one calls it $-\operatorname{grad}\Phi$, so that

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} - \operatorname{grad}\Phi \tag{20.4}$$

folgt. Der zweite Term ist aus der Elektrostatik bekannt. In der Zeitableitung von **A** steckt das Induktionsgesetz. Man sieht umgekehrt, dass die Darstellung der Felder **E** und **B** durch die Potentiale in (20.4) und (20.1) die beiden homogenen M -Gleichungen erfüllt.

follows. The second term is already known from electrostatics. The time derivative of **A** contains the law of induction. One sees contrarily that the representations of the potentials in (20.4) and (20.1) fulfill the homogeneous M equations.

20.b Eichtransformationen

20.b Gauge Transformations

Die Potentiale **A** und Φ sind nicht eindeutig durch die Felder **B** und **E** bestimmt. Wir können **A** durch

The potentials **A** and Φ are not uniquely determined by the fields **B** and **E**. We may replace **A** by

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \operatorname{grad} \Lambda(\mathbf{r}, t) \tag{20.5}$$

ersetzen, ohne **B** zu ändern

without changing **B**

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{A}', \tag{20.6}$$

da $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Lambda = \mathbf{0}$. Dann folgt

since $\operatorname{curl} \operatorname{grad} \Lambda = \mathbf{0}$. It follows that

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}' - \operatorname{grad}(\Phi - \frac{1}{c}\dot{\Lambda}). \tag{20.7}$$

Ersetzen wir gleichzeitig Φ durch

If we replace simultaneously Φ by

$$\Phi'(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c}\dot{\Lambda}(\mathbf{r}, t), \tag{20.8}$$

so bleiben **E** und **B** unverändert. Man bezeichnet die Transformation (20.5) und (20.8) von **A** und Φ als Eichtransformation.

then **E** and **B** remain unchanged. One calls the transformations (20.5) and (20.8) gauge transformations.

Die Willkür in der Eichung erlaubt es, Einschränkungen an die Potentiale Φ und **A** zu fordern. Die folgenden beiden Eichungen werden häufig verwendet

The arbitrariness in the gauge allows to impose restrictions on the potentials Φ and **A**

L -Eichung / gauge
$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c}\dot{\Phi} = 0, \tag{20.9}$$

C -Eichung / gauge
$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{20.10}$$

Hat man Potentiale Φ′ und **A**′, die die gewünschte Eichung nicht erfüllen, so erhält man Potentiale Φ und **A** durch geeignete Wahl von Λ

If potentials Φ′ and **A**′ do not obey the desired gauge, the potentials Φ and **A** are obtained by an appropriate choice of Λ

L -Eichung / gauge
$$\operatorname{div} \mathbf{A}' + \frac{1}{c}\dot{\Phi}' = \Box\Lambda, \tag{20.11}$$

C -Eichung / gauge
$$\operatorname{div} \mathbf{A}' = \triangle\Lambda, \tag{20.12}$$

wobei

where

$$\Box := \triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{20.13}$$

der ’A -Operator ist. Die L -Eichung geht auf den dänischen Physiker Ludvig V. L (1867) zurück im Gegensatz zur L -Transformation (Abschnitt 23), die dem holländischen Physiker Hendrik A. L zuzuschreiben ist.

is ’A ’s operator. The L gauge traces back to the Danish physicist L V. L (1867) in contrast to the L transformation (section 23) attributed to the Dutch physicist H A. L .

Einsetzen der Ausdrücke (20.4) und (20.1) für **E** und **B** in die erste M -Gleichung ergibt

Insertion of the expressions (20.4) and (20.1) for **E** and **B** into M 's first equation yields

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{A}} + \frac{1}{c}\operatorname{grad}\dot{\Phi} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{20.14}$$

das heißt

that is

$$-\Box\mathbf{A} + \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\dot{\Phi}\right) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{20.15}$$

während die zweite M -Gleichung dann

whereas M 's second equation reads

$$-\triangle\Phi - \frac{1}{c}\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}} = 4\pi\rho \tag{20.16}$$

lautet.

.

Daraus folgt für die beiden Eichungen

From this one obtains for both gauges

$$\text{L} \quad \begin{matrix}\text{-Eichung}\\ \text{gauge}\end{matrix} \quad \left\{\begin{array}{l} \Box\mathbf{A}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \\ \Box\Phi=-4\pi\rho \end{array}\right. \tag{20.17}$$

$$\text{C} \quad \begin{matrix}\text{-Eichung}\\ \text{gauge}\end{matrix} \quad \left\{\begin{array}{l} \Box\mathbf{A}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\operatorname{grad}\dot{\Phi} \\ \triangle\Phi=-4\pi\rho. \end{array}\right. \tag{20.18}$$

Aufgabe Zeige, dass ein Vektorfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, das $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ genügt, als $\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r})$ dargestellt werden kann. Hierzu setze man $A_z(\mathbf{r}) = 0$ und drücke $A_y(\mathbf{r})$ durch $A_y(x, y, 0)$ und B_x, ähnlich $A_x(\mathbf{r})$ durch $A_x(x, y, 0)$ und B_y aus. Dies setze man in $B_z = (\operatorname{rot}\mathbf{A})_z$ ein und zeige unter Verwendung von $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, dass man passende Komponenten von **A** bei $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ finden kann.

Exercise Show that a vector field $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, which obeys $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ can be represented by $\operatorname{curl}\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Therefore put $A_z(\mathbf{r}) = 0$ and express $A_y(\mathbf{r})$ by $A_y(x, y, 0)$ and B_x, similarly $A_x(\mathbf{r})$ by $A_x(x, y, 0)$ and B_y. Insert this in $B_z = (\operatorname{curl}\mathbf{A})_z$ and show by use of $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ that one can find fitting components of **A** at $\mathbf{r} = (x, y, 0)$.

21 Die elektromagnetischen Potentiale einer allgemeinen Ladungs- und Stromverteilung

21 Electromagnetic Potentials of a general Charge and Current Distribution

21.a Berechnung der Potentiale

21.a Calculation of the Potentials

In der L -Eichung hatten wir (20.17)

Using the L gauge we had

$$\square\Phi(\mathbf{r},t) = -4\pi\rho(\mathbf{r},t), \tag{21.1}$$

$$\square\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \tag{21.2}$$

mit dem ’A -Operator

with ’A ’s operator

$$\square = \triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{21.3}$$

und der Eichbedingung

and the gauge condition

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\dot{\Phi} = 0. \tag{21.4}$$

Wir führen bezüglich der Zeit die F -Transformierte ein

We perform the F transform with respect to time

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega)e^{-i\omega t}, \tag{21.5}$$

analog für $\mathbf{A}$, ρ, $\mathbf{j}$. Dann folgt

analogously for $\mathbf{A}$, ρ, $\mathbf{j}$. Then one obtains

$$\square\Phi(\mathbf{r},t) = \int d\omega(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2})\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega)e^{-i\omega t} = \int d\omega(-4\pi\hat{\rho}(\mathbf{r},\omega))e^{-i\omega t}, \tag{21.6}$$

woraus durch Vergleich der Integranden

from which by comparison of the integrands

$$\Big(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2}\Big)\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega) = -4\pi\hat{\rho}(\mathbf{r},\omega) \tag{21.7}$$

folgt. Wir führen dazu die G sche Funktion G ein, das heißt, die Lösung der linearen Differentialgleichung werde geschrieben als

is obtained. We now introduce the G ’s function G, i.e. we write the solution of the linear differential equation as

$$\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega) = \int d^3r' G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)\hat{\rho}(\mathbf{r}',\omega). \tag{21.8}$$

Setzen wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung (21.7) ein, so folgt

Insertion of this ansatz into the differential equation (21.7) yields

$$\Big(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2}\Big)G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{21.9}$$

Da keine Richtung ausgezeichnet ist und die Gleichung invariant gegen Verschiebungen der Vektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ um einen gleichen konstanten Vektor ist, ist anzunehmen, dass die Lösung G nur vom Abstand zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ und zusätzlich natürlich von dem Parameter ω abhängt

Since there is no preferred direction and moreover the equation is invariant against displacement of the vectors $\mathbf{r}$ and $\mathbf{r}'$ by the same constant vector, we may assume that the solution depends only on the distance between $\mathbf{r}$ and $\mathbf{r}'$ and additionally of course on ω

$$G = g(a,\omega), \quad a = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|. \tag{21.10}$$

Damit folgt

Then one obtains

$$(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2})g(a,\omega) = \frac{1}{a}\frac{d^2(ag)}{da^2} + \frac{\omega^2}{c^2}g = 0 \,\substack{\text{für}\\ \text{for}}\, a \neq 0. \tag{21.11}$$

Dabei verwenden wir den L -Operator in der Form (5.15), wobei $\triangle_\Omega g = 0$, da g nicht von der Richtung von $\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, sondern nur vom Betrag a abhängt. Dies ergibt die Schwingungsgleichung für ag, hat also die Lösung

Here we use the Laplacian in the form (5.15), where $\triangle_\Omega g = 0$, since g does not depend on the direction of $\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, but on the modulus a. This yields the equation of a harmonic oscillation for ag with the solution

$$G = g(a,\omega) = \frac{1}{a}\Big(c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega a/c} + c_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega a/c}\Big). \tag{21.12}$$

Für kleinen Abstand divergiert die Lösung wie $(c_1 + c_2)/a$. Um die δ-Funktion in (21.9) als Inhomogenität mit dem richtigen Vorfaktor zu erhalten, muss $c_1 + c_2 = 1$ sein. Wir setzen nun der Reihe nach ein

At short distances the solution diverges like $(c_1 + c_2)/a$. In order to obtain the δ-function in (21.9) as an inhomogeneity with the appropriate factor in front, one requires $c_1 + c_2 = 1$. We now insert

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{r},t) &= \int \mathrm{d}\omega \hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\
&= \int \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}^3 r' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)\hat{\rho}(\mathbf{r}',\omega) \\
&= \int \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big(c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c} + c_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c}\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\hat{\rho}(\mathbf{r}',\omega) \\
&= \int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big(c_1 \rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}) + c_2 \rho(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})\Big).
\end{aligned} \tag{21.13}$$

Beim Übergang von der zweiten auf die dritte Zeile haben wir G eingesetzt. Anschließend führen wir die ω-Integration aus, vergleiche (21.5). Allerdings ist ω im Exponenten in (21.13) nicht mit t, sondern mit $t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$ multipliziert. Die Lösung in der letzten Zeile enthält einen Beitrag zu Φ zur Zeit t, der von ρ zu früherer Zeit (mit Faktor c_1) und einen, der von ρ zu späterer Zeit (mit Faktor c_2) abhängt. Man bezeichnet die Lösung, die nur den ersten Beitrag ($c_1 = 1$, $c_2 = 0$) enthält, als die retardierte Lösung und die, die nur den zweiten Beitrag ($c_1 = 0$, $c_2 = 1$) enthält, als die avancierte Lösung.

Going from the second to the third line we have inserted G. Then we perform the ω-integration, compare (21.5). However, ω in the exponent in (21.13) is not multiplied by t, but by $t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$. The solution in the last line contains a contribution of Φ at time t which depends on ρ at an earlier time (with factor c_1), and one which depends on ρ at a later time (with factor c_2). The solution which contains only the first contribution ($c_1 = 1$, $c_2 = 0$) is called the retarded solution, and the one which contains only the second contribution ($c_1 = 0$, $c_2 = 1$) the advanced solution.

$$\Phi_{\mathrm{r,a}}(\mathbf{r},t) = \int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho(\mathbf{r}', t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}). \tag{21.14}$$

Physikalisch ist in der Regel die retardierte Lösung (oberes Vorzeichen), da man davon ausgeht, dass das Potential durch die Ladungsverteilung, aber nicht die Ladungsverteilung durch das Potential entsteht. Analog erhält man die retardierte und avancierte Lösung für das Vektorpotential

Normally the retarded solution (upper sign) is the physical solution, since the potential is considered to be created by the charges, but not the charges by the potentials. Analogously, one obtains the retarded and advanced solutions for the vector potential

$$\mathbf{A}_{\mathrm{r,a}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{j}(\mathbf{r}', t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}). \tag{21.15}$$

21.b Eichbedingung

21.b Gauge Condition

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Bedingung für die L -Eichung (20.9) erfüllt ist

It remains to be shown that the condition for L gauge (20.9) is fulfilled

$$\dot{\Phi} + c\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}(\dot{\rho} + \,\mathrm{div}\,\mathbf{j}) + \int \mathrm{d}^3 r' \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{j}. \tag{21.16}$$

Die Argumente von ρ und $\mathbf{j}$ sind wie oben $\mathbf{r}'$ und $t' = t \mp |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$. Im zweiten Integral kann man ∇ durch $-\nabla'$ ersetzen und dann partiell integrieren. Das führt auf

The arguments of ρ and $\mathbf{j}$ are as above $\mathbf{r}'$ and $t' = t \mp |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$. In the second integral one can replace ∇ by $-\nabla'$ and perform a partial integration. This yields

$$\dot{\Phi} + c \operatorname{div} \mathbf{A} = \int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (\dot{\rho} + (\nabla + \nabla')\mathbf{j}). \tag{21.17}$$

Da $(\nabla + \nabla')t'(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{0}$ ist, folgt unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung

Since $(\nabla + \nabla')t'(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{0}$, one obtains from the equation of continuity

$$\dot{\rho}(\mathbf{r}', t'(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')) + (\nabla + \nabla')\mathbf{j}(\mathbf{r}', t'(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')) = \frac{\partial \rho}{\partial t'} + \nabla' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t')|_{t'} = 0, \tag{21.18}$$

so dass die Eichbedingung (20.9) erfüllt ist, da der Integrand in (21.17) wegen der Kontinuitätsgleichung verschwindet.

so that the gauge condition (20.9) is fulfilled, since the integrand in (21.17) vanishes because of the equation of continuity.

22 Ausstrahlung harmonischer Schwingungen

22 Radiation from Harmonic Oscillations

In diesem Abschnitt untersuchen wir schwingende Ladungen und Ströme als Strahlungsquellen.

In this section we consider the radiation of oscillating charges and currents.

22.a Strahlungsfeld

22.a Radiation Field

Wir betrachten harmonische Schwingungen, das heißt, die Zeitabhängigkeit von ρ und $\mathbf{j}$ ist proportional zu $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$

We consider harmonic oscillations, i.e. the time dependence of ρ and $\mathbf{j}$ is proportional to $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$

$$\rho(\mathbf{r},t) = \Re\Big(\rho_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Big) \tag{22.1}$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \Re\Big(\mathbf{j}_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Big), \tag{22.2}$$

analog für Φ, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$. Es folgt

analogously for Φ, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$. One obtains

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \Re \int \mathrm{d}^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho_0(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}. \tag{22.3}$$

Mit $k = \omega/c$ folgt

With the notation $k = \omega/c$ it follows that

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho_0(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{22.4}$$

analog

analogously

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{22.5}$$

22.a.α Nahzone (Statische Zone)

22.a.α Near Zone (Static Zone)

In der Nahzone, das heißt für $k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll 2\pi$, was gleichbedeutend ist mit $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll \lambda$, wobei λ die Wellenlänge der elektromagnetischen Welle ist, kann $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ durch 1 genähert werden. Damit werden die Potentiale Φ_0, (22.4) und $\mathbf{A}_0$, (22.5) zu den Potentialen der Elektro- und Magnetostatik (3.14) und (9.17).

In the near zone, i.e. for $k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll 2\pi$ which is equivalent to $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll \lambda$, where λ is the wave-length of the electromagnetic wave, the expression $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ can be approximated by 1. Then the potentials Φ_0, (22.4) and $\mathbf{A}_0$, (22.5) reduce to the potentials of electrostatics (3.14) and of magnetostatics (9.17).

22.a.β Fernzone (Strahlungszone)

22.a.β Far Zone (Radiation Zone)

Für große Entfernungen entwickelt man im Exponenten

At large distances one expands the expression in the exponent

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = r\sqrt{1-2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2}+\frac{r'^2}{r^2}} = r - \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}' + O(\frac{r'^2}{r}), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{22.6}$$

Dies ist gerechtfertigt für $r \gg kR^2$, wobei R eine Abschätzung für die Ausdehnung der Ladungs- bzw. Stromverteilung ist, $r' < R$ für $\rho(\mathbf{r}') \neq 0$ bzw. $\mathbf{j}(\mathbf{r}') \neq \mathbf{0}$. Im Nenner approximieren wir $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx r$, was für $r \gg R$ gut ist. Dann folgt

This is justified for $r \gg kR^2$, where R is an estimate of the extension of the charge and current distribution, $r' < R$ for $\rho(\mathbf{r}') \neq 0$ and $\mathbf{j}(\mathbf{r}') \neq \mathbf{0}$, resp. We approximate in the denominator $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx r$ which is reasonable for $r \gg R$. Then one obtains

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr}\mathbf{g}(k\mathbf{n}) + O(\frac{1}{r^2}) \tag{22.7}$$

mit der F -Transformierten der Stromverteilung

with the F transform of the current distribution

$$\mathbf{g}(k\mathbf{n}) = \int \mathrm{d}^3r' \mathbf{j}_0(\mathbf{r}') \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'}. \tag{22.8}$$

Hieraus folgt das Magnetfeld

From this one deduces the magnetic field

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\operatorname{grad} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr} \times \mathbf{g}(k\mathbf{n}) + O(\frac{1}{r^2}) = \mathrm{i}k \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr} \mathbf{n} \times \mathbf{g} + O(\frac{1}{r^2}). \tag{22.9}$$

Das elektrische Feld erhalten wir aus

The electric field is obtained from

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}} \rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{B}_0 = -\frac{\mathrm{i}\omega}{c} \mathbf{E}_0 \tag{22.10}$$

zu

as

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\mathrm{i}}{k} \operatorname{rot} \mathbf{B}_0 = -\mathbf{n} \times \mathbf{B}_0 + O(\frac{1}{r^2}). \tag{22.11}$$

$\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ und $\mathbf{n}$ bilden ein Orthogonalsystem. $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{B}_0$ sind betragsmäßig gleich und fallen wie $1/r$ ab. Der P -Vektor liefert im zeitlichen Mittel

$\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ and $\mathbf{n}$ are orthogonal to each other. The moduli of $\mathbf{E}_0$ and $\mathbf{B}_0$ are equal and both decay like $1/r$. The P vector yields in the time average

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S}(t) \mathrm{d}t, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{22.12}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} &= \frac{c}{4\pi} \overline{\Re \mathbf{E} \times \Re \mathbf{B}} = \frac{c}{8\pi} \Re(\mathbf{E}_0^* \times \mathbf{B}_0) \\ &= -\frac{c}{8\pi} \Re\Big((\mathbf{n} \times \mathbf{B}_0^*) \times \mathbf{B}_0\Big) = -\frac{c}{8\pi} \Re(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{B}_0^* + \frac{c}{8\pi} \mathbf{n}(\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{B}_0). \end{aligned} \tag{22.13}$$

Der erste Term nach dem letzten Gleichheitszeichen verschwindet, da $\mathbf{B}_0 \perp \mathbf{n}$. Es bleibt daher

The first term after the last equals sign vanishes, since $\mathbf{B}_0 \perp \mathbf{n}$. Thus there remains

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{c}{8\pi} \mathbf{n}(\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{B}_0) = \frac{k^2 \mathbf{n}}{8\pi c r^2} |\mathbf{n} \times \mathbf{g}(k\mathbf{n})|^2 + O(\frac{1}{r^3}). \tag{22.14}$$

Die im Mittel abgestrahlte Leistung ist dann

The average power radiated is

$$\dot{U}_{\mathrm{s}} = \frac{k^2}{8\pi c} \int |\mathbf{n} \times \mathbf{g}(k\mathbf{n})|^2 \mathrm{d}\Omega_n, \tag{22.15}$$

wobei über den Raumwinkel Ω_n von $\mathbf{n}$ integriert wird.

where the integral is performed over the solid angle Ω_n of $\mathbf{n}$.

22.b Elektrische Dipolstrahlung (HERTZscher Dipol)

22.b Electric Dipole Radiation (HERTZ Dipole)

Erstreckt sich die Ladungs- und Stromverteilung nur über einen im Vergleich zur Wellenlänge λ kleinen Bereich R, so ist es sinnvoll, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'}$ zu entwickeln

If the charge and current distribution is within a range R small in comparison to the wave length λ, then it is reasonable to expand $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'}$

$$\mathbf{g}(k\mathbf{n}) = \mathbf{g}^{(0)} - \mathrm{i}k\mathbf{g}^{(1)} + ..., \quad \mathbf{g}^{(0)} = \int \mathrm{d}^3r' \mathbf{j}_0(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{g}^{(1)} = \int \mathrm{d}^3r' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}_0(\mathbf{r}') \tag{22.16}$$

Diese Entwicklung reicht aus, um das Strahlungsfeld in der Fernzone zu untersuchen. Ist man daran interessiert, auch Nah- und Übergangszone zu betrachten, so muss man

This expansion is sufficient to investigate the radiation field in the far zone. If one is interested to consider it also in the near zone and the intermediate zone, one has to expand

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}(-\mathrm{i}k + \frac{1}{r})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') + O(r'^2) \tag{22.17}$$

in dem Ausdruck für $\mathbf{A}_0$ entwickeln, was

in the expression for $\mathbf{A}_0$, which yields

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{cr}\mathbf{g}^{(0)} + (-ik + \frac{1}{r})\frac{e^{ikr}}{cr}\mathbf{g}^{(1)} + ... \tag{22.18}$$

ergibt.

Wir betrachten zunächst den Beitrag von $\mathbf{g}^{(0)}$. Wir verwenden, dass

We first consider the contribution from $\mathbf{g}^{(0)}$. We use that

$$\mathrm{div}'\mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\dot{\rho}(\mathbf{r}') = i\omega\rho(\mathbf{r}') \rightarrow \mathrm{div}'\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') = i\omega\rho_0(\mathbf{r}'). \tag{22.19}$$

Dann folgt aus

Then we obtain from

$$\int d^3r' \,\mathrm{div}'\big(f(\mathbf{r}')\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')\big) = 0 \tag{22.20}$$

die Beziehung

the relation

$$\int d^3r' \,\mathrm{grad}' f(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{j}_0(\mathbf{r}') = -i\omega \int d^3r' f(\mathbf{r}')\rho_0(\mathbf{r}'). \tag{22.21}$$

Mit $f(\mathbf{r}') = x'_\alpha$ folgt dann

One obtains with $f(\mathbf{r}') = x'_\alpha$

$$g_\alpha^{(0)} = \int d^3r' j_{0,\alpha}(\mathbf{r}') = -i\omega \int d^3r' x'_\alpha \rho_0(\mathbf{r}') = -i\omega p_{0,\alpha}, \tag{22.22}$$

das heißt, $\mathbf{g}^{(0)}$ lässt sich durch die Amplitude des elektrischen Dipolmoments ausdrücken

that is $\mathbf{g}^{(0)}$ can be expressed by the amplitude of the electric dipole moment

$$\mathbf{g}^{(0)} = -i\omega\mathbf{p}_0. \tag{22.23}$$

Man bezeichnet daher diesen Anteil als elektrische Dipolstrahlung. Es folgt

Thus one calls this contribution electric dipole radiation. One finds

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = -ik\frac{e^{ikr}}{r}\mathbf{p}_0, \tag{22.24}$$

daraus

thus

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \Big(\frac{k^2}{r} + \frac{ik}{r^2}\Big)e^{ikr}\mathbf{n} \times \mathbf{p}_0 \tag{22.25}$$

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = -\frac{k^2}{r}e^{ikr}\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{p}_0) + \big(3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_0) - \mathbf{p}_0\big)\Big(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2}\Big)e^{ikr}. \tag{22.26}$$

Der erste Term ist der führende in der Fernzone ($1/r \ll k$), der zweite führt in der Nahzone ($1/r \gg k$). Aus dem Ausdruck für die Fernzone erhält man als zeitgemittelten P -Vektor

The first term is leading in the far zone ($1/r \ll k$), the second one in the near zone ($1/r \gg k$). One obtains the time-averaged P vector from the expression for the far zone

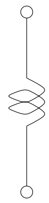
$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{ck^4\mathbf{n}}{8\pi r^2}|\mathbf{n} \times \mathbf{p}_0|^2 = \frac{ck^4|\mathbf{p}_0|^2\mathbf{n}}{8\pi r^2}\sin^2\theta, \tag{22.27}$$

Im zweiten Ausdruck wird angenommen, dass Realteil und Imaginärteil von $\mathbf{p}_0$ in die gleiche Richtung weisen. Dann ist θ der Winkel zwischen $\mathbf{p}_0$ und $\mathbf{n}$. Die abgestrahlte Leistung ist dann

In the second expression it is assumed that real and imaginary part of $\mathbf{p}_0$ point into the same direction. Then θ is the angle between $\mathbf{p}_0$ and $\mathbf{n}$. The radiated power is then

$$\dot{U}_s = \frac{ck^4|\mathbf{p}_0|^2}{3}. \tag{22.28}$$

Die Leistung nimmt also mit der vierten Potenz der Frequenz ($\omega = ck$) zu (R -Streuung). Als Beispiel kann man zwei Kondensatorkugeln im Abstand l mit $I(t) = \Re(I_0 e^{-i\omega t})$ betrachten. Dann ist



The radiation increases with the fourth power of the frequency ($\omega = ck$) (R radiation). As an example one may consider two capacitor spheres at distance l with $I(t) = \Re(I_0 e^{-i\omega t})$. Then one has

$$|\mathbf{g}^{(0)}| = |\int \mathrm{d}^3r' \mathbf{j}_0(\mathbf{r}')| = |\int \mathrm{d}l I_0| = |I_0 l|, \quad p_0 = \frac{\mathrm{i}I_0 l}{\omega}, \quad \dot{U}_\mathrm{s} = \frac{(klI_0)^2}{3c} \tag{22.29}$$

Diese Leistungsabgabe bedingt einen Strahlungswiderstand R_s

This power release yields a radiation resistance R_s

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{1}{2}R_\mathrm{s}I_0^2, \quad R_\mathrm{s} = \frac{2}{3c}(kl)^2 \hat{=} 20\Omega \cdot (kl)^2 \tag{22.30}$$

zusätzlich zum O schen Widerstand. Man beachte $\frac{1}{c}\hat{=}30\Omega$, vergleiche (A.4).

in addition to an O ic resistance. Note that $\frac{1}{c}\hat{=}30\Omega$, compare (A.4).

22.c Magnetische Dipolstrahlung und elektrische Quadrupolstrahlung

22.c Magnetic Dipole radiation and Electric Quadrupole Radiation

Wir betrachten nun den zweiten Term in (22.16)

Now we consider the second term in (22.16)

$$\begin{aligned} g_\alpha^{(1)} &= n_\beta \int \mathrm{d}^3r' x'_\beta j_{0,\alpha}(\mathbf{r}') \\ &= \frac{n_\beta}{2}\int \mathrm{d}^3r'(x'_\beta j_{0,\alpha} - x'_\alpha j_{0,\beta}) + \frac{n_\beta}{2}\int \mathrm{d}^3r'(x'_\beta j_{0,\alpha} + x'_\alpha j_{0,\beta}). \end{aligned} \tag{22.31}$$

Der erste Term ergibt das magnetische Dipolmoment (10.7)

The first term yields the magnetic dipole moment (10.7)

$$n_\beta c \epsilon_{\beta,\alpha,\gamma} m_{0,\gamma} = -c(\mathbf{n}\times\mathbf{m}_0)_\alpha. \tag{22.32}$$

Der zweite Term lässt sich durch das elektrische Quadrupolmoment (4.10) ausdrücken. Mit $f = \frac{1}{2}x'_\alpha x'_\beta$ ergibt er sich mit (22.21) zu

The second term can be expressed by the electric quadrupole moment (4.10). With $f = \frac{1}{2}x'_\alpha x'_\beta$ one obtains from (22.21)

$$-\mathrm{i}\omega\frac{n_\beta}{2}\int \mathrm{d}^3r' x'_\alpha x'_\beta \rho_0(\mathbf{r}') = -\mathrm{i}\omega\frac{n_\beta}{2}\Big(Q_{0,\alpha,\beta} + \frac{1}{3}\delta_{\alpha,\beta}\int \mathrm{d}^3r' r'^2\rho_0(\mathbf{r}')\Big). \tag{22.33}$$

Damit haben wir

Thus we have

$$\mathbf{g}^{(1)} = -c\mathbf{n}\times\mathbf{m}_0 - \frac{\mathrm{i}\omega}{2}Q_{0,\alpha,\beta}n_\beta\mathbf{e}_\alpha + \text{ const. } \mathbf{n}. \tag{22.34}$$

Wir beobachten, dass der dritte Term proportional $\mathbf{n}$ keinen Beitrag zu $\mathbf{B}_0$ (22.9) und $\mathbf{E}_0$ (22.11) liefert.

We observe that the third term proportional $\mathbf{n}$ does neither contribute to $\mathbf{B}_0$ (22.9) nor to $\mathbf{E}_0$ (22.11).

22.c.α Magnetische Dipolstrahlung

22.c.α Magnetic Dipole Radiation

Der erste Beitrag in (22.34) gibt die magnetische Dipolstrahlung. Wir finden

The first contribution in (22.34) yields the magnetic dipole radiation. We obtain

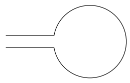
$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \Big(\mathrm{i}k - \frac{1}{r}\Big)\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathbf{n}\times\mathbf{m}_0 \tag{22.35}$$

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = -k^2\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{m}_0) + \Big(3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}_0) - \mathbf{m}_0\Big)\Big(\frac{1}{r^3} - \frac{\mathrm{i}k}{r^2}\Big)e^{\mathrm{i}kr} \tag{22.36}$$

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = (-\frac{k^2}{r} - \frac{\mathrm{i}k}{r^2})(\mathbf{n}\times\mathbf{m}_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}. \tag{22.37}$$

Als Beispiel betrachten wir einen Kreisstrom, der eine Fläche f einschließt,

As an example we consider a current along a loop which includes the area f,



$$m_0 = I_0 f/c, \quad \dot{U}_\mathrm{s} = \frac{ck^4 m_0^2}{3} = \frac{k^4 I_0^2 f^2}{3c}, \tag{22.38}$$

was einem Strahlungswiderstand

which corresponds to a radiation resistance

$$R_\mathrm{s} = \frac{2}{3c}k^4 f^2 \widehat{=} 20\Omega\,(k^2 f)^2 \tag{22.39}$$

entspricht.

.

22.c.β Elektrische Quadrupolstrahlung

22.c.β Electric Quadrupole Radiation

Wir betrachten noch den zweiten Term aus (22.34) in der Fernzone. Dieser liefert

We finally consider the second term in (22.34) in the far zone. It yields

$$\mathbf{g} = -\mathrm{i}k\mathbf{g}^{(1)} = -\frac{k^2 c}{2}Q_{0,\alpha,\beta}n_\beta\mathbf{e}_\alpha. \tag{22.40}$$

Als Spezialfall untersuchen wir den symmetrischen Quadrupol (4.27), $Q_{0,x,x} = Q_{0,y,y} = -\frac{1}{3}Q_0$, $Q_{0,z,z} = \frac{2}{3}Q_0$, während die Außerdiagonal-Elemente verschwinden. Dann ist

As special case we investigate the symmetric quadrupole (4.27), $Q_{0,x,x} = Q_{0,y,y} = -\frac{1}{3}Q_0$, $Q_{0,z,z} = \frac{2}{3}Q_0$, whereas the off-diagonal elements vanish. Then one has

$$Q_{0,\alpha,\beta} = -\frac{1}{3}Q_0\delta_{\alpha,\beta} + Q_0\delta_{\alpha,3}\delta_{\beta,3}, \tag{22.41}$$

woraus

from which

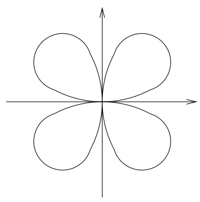
$$\mathbf{g} = -\frac{k^2 c}{2}Q_0 n_3\mathbf{e}_3 + \frac{k^2 c}{6}Q_0\mathbf{n}, \quad n_3 = \cos\theta \tag{22.42}$$

$$\mathbf{B}_0 = -\mathrm{i}k^3\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{2r}Q_0\mathbf{n}\times\mathbf{e}_3\cos\theta \tag{22.43}$$

$$\mathbf{E}_0 = \mathrm{i}k^3\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{2r}Q_0\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{e}_3)\cos\theta \tag{22.44}$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{ck^6\mathbf{n}}{32\pi r^2}|Q_0|^2\sin^2\theta\cos^2\theta \tag{22.45}$$

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{ck^6}{60}|Q_0|^2 \tag{22.46}$$



folgt. Auf der Zeichnung ist die Intensität der Quadrupol-Strahlung in Abhängigkeit vom Winkel θ radial skizziert.

follows. The intensity of the quadrupole-radiation is radially sketched as function of the angle θ.