# G Elektrodynamische Potentiale

©2003 Franz Wegner Universität Heidelberg

## 20 Elektrodynamische Potentiale, Eichtransformationen

In der Elektrostatik haben wir bereits das elektrische Potential $\Phi$ kennengelernt, in der Magnetostatik das Vektorpotential $\mathbf{A}$. Beide können auch für die zeitabhängigen Probleme eingeführt werden und erlauben auch dann die Bestimmung von $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$.

### 20.a Potentiale

Die dritte und vierte M -Gleichung sind homogen, das heißt, sie enthalten die Ladungen und Ströme nicht explizit. Sie erlauben, die Felder $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$ durch Potentiale auszudrücken. Aus $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ folgt

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \tag{20.1}$$

Beweis: Wegen $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ gilt $\triangle\mathbf{B} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B}$ (B.26), woraus dann ähnlich wie in (9.16) und (9.17)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r' \Big(\operatorname{rot}'\operatorname{rot}'\mathbf{B}(\mathbf{r}')\Big)\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\int \mathrm{d}^3r' \frac{\operatorname{rot}'\mathbf{B}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{20.2}$$

bei der Einführung des Vektorpotentials in der Magnetostatik folgt. Ein elementarer Beweis folgt als Übungsaufgabe.
Aus $\operatorname{rot}\mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}}/c = \mathbf{0}$ folgt dann

$$\operatorname{rot}\Big(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}\Big) = \mathbf{0}, \tag{20.3}$$

so dass das Argument unter der Rotation als Gradient geschrieben werden kann. Konventionell setzt man dafür $-\operatorname{grad}\Phi$, so dass die Darstellung

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} - \operatorname{grad}\Phi \tag{20.4}$$

folgt. Der zweite Term ist aus der Elektrostatik bekannt. In der Zeitableitung von $\mathbf{A}$ steckt das Induktionsgesetz. Man sieht umgekehrt, dass die Darstellung der Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ durch die Potentiale in (20.4) und (20.1) die beiden homogenen M -Gleichungen erfüllt.

### 20.b Eichtransformationen

Die Potentiale $\mathbf{A}$ und $\Phi$ sind nicht eindeutig durch die Felder $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$ bestimmt. Wir können $\mathbf{A}$ durch

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \operatorname{grad}\Lambda(\mathbf{r}, t) \tag{20.5}$$

ersetzen, ohne $\mathbf{B}$ zu ändern

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{rot}\mathbf{A}', \tag{20.6}$$

da $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Lambda = \mathbf{0}$. Dann folgt

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}' - \operatorname{grad}(\Phi - \frac{1}{c}\dot{\Lambda}). \tag{20.7}$$

Ersetzen wir gleichzeitig $\Phi$ durch

$$\Phi'(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c}\dot{\Lambda}(\mathbf{r}, t), \tag{20.8}$$

so bleiben $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ unverändert. Man bezeichnet die Transformation (20.5) und (20.8) von $\mathbf{A}$ und $\Phi$ als Eichtransformation.

Die Willkür in der Eichung erlaubt es, Einschränkungen an die Potentiale $\Phi$ und $\mathbf{A}$ zu fordern. Die folgenden beiden Eichungen werden häufig verwendet

$$\text{L -Eichung} \qquad \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c}\dot{\Phi} = 0, \tag{20.9}$$

$$\text{C -Eichung} \qquad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{20.10}$$

Hat man Potentiale $\Phi'$ und $\mathbf{A}'$, die die gewünschte Eichung nicht erfüllen, so erhält man Potentiale $\Phi$ und $\mathbf{A}$ durch geeignete Wahl von $\Lambda$

$$\text{L -Eichung} \qquad \operatorname{div} \mathbf{A}' + \frac{1}{c}\dot{\Phi}' = \Box\Lambda, \tag{20.11}$$

$$\text{C -Eichung} \qquad \operatorname{div} \mathbf{A}' = \triangle\Lambda, \tag{20.12}$$

wobei

$$\Box := \triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{20.13}$$

der 'A -Operator ist. Die L -Eichung geht auf den dänischen Physiker Ludvig V. L (1867) zurück im Gegensatz zur L -Transformation (Abschnitt 23), die dem holländischen Physiker Hendrik A. L zuzuschreiben ist.
Einsetzen der Ausdrücke (20.4) und (20.1) für $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ in die erste M -Gleichung ergibt

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{A}} + \frac{1}{c}\operatorname{grad}\dot{\Phi} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{20.14}$$

das heißt

$$-\Box\mathbf{A} + \operatorname{grad}\Big(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c}\dot{\Phi}\Big) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{20.15}$$

während die zweite M -Gleichung dann

$$-\triangle\Phi - \frac{1}{c}\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}} = 4\pi\rho \tag{20.16}$$

lautet.
Daraus folgt für die beiden Eichungen

$$\text{L -Eichung} \qquad \begin{cases} \Box\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \\ \Box\Phi = -4\pi\rho \end{cases} \tag{20.17}$$

$$\text{C -Eichung} \qquad \begin{cases} \Box\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\operatorname{grad}\dot{\Phi} \\ \triangle\Phi = -4\pi\rho. \end{cases} \tag{20.18}$$

**Aufgabe** Zeige, dass ein Vektorfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, das $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ genügt, als $\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r})$ dargestellt werden kann. Hierzu setze man $A_z(\mathbf{r}) = 0$ und drücke $A_y(\mathbf{r})$ durch $A_y(x, y, 0)$ und $B_x$, ähnlich $A_x(\mathbf{r})$ durch $A_x(x, y, 0)$ und $B_y$ aus. Dies setze man in $B_z = (\operatorname{rot}\mathbf{A})_z$ ein und zeige unter Verwendung von $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, dass man passende Komponenten von $\mathbf{A}$ bei $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ finden kann.

# 21 Die elektromagnetischen Potentiale einer allgemeinen Ladungs- und Stromverteilung

## 21.a Berechnung der Potentiale

In der L -Eichung hatten wir (20.17)

$$\begin{aligned} \Box\Phi(\mathbf{r},t) &= -4\pi\rho(\mathbf{r},t), & (21.1)\\ \Box\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) & (21.2)\end{aligned}$$

mit dem 'A -Operator

$$\Box = \triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{21.3}$$

und der Eichbedingung

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\dot{\Phi} = 0. \tag{21.4}$$

Wir führen bezüglich der Zeit die F -Transformierte ein

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{21.5}$$

analog für $\mathbf{A}, \rho, \mathbf{j}$. Dann folgt

$$\Box\Phi(\mathbf{r},t) = \int \mathrm{d}\omega(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2})\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \int \mathrm{d}\omega(-4\pi\hat{\rho}(\mathbf{r},\omega))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{21.6}$$

woraus durch Vergleich der Integranden

$$\Big(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2}\Big)\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega) = -4\pi\hat{\rho}(\mathbf{r},\omega) \tag{21.7}$$

folgt. Wir führen dazu die G sche Funktion $G$ ein, das heißt, die Lösung der linearen Differentialgleichung werde geschrieben als

$$\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega) = \int \mathrm{d}^3r' G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)\hat{\rho}(\mathbf{r}',\omega). \tag{21.8}$$

Setzen wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung (21.7) ein, so folgt

$$\Big(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2}\Big)G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{21.9}$$

Da keine Richtung ausgezeichnet ist und die Gleichung invariant gegen Verschiebungen der Vektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ um einen gleichen konstanten Vektor ist, ist anzunehmen, dass die Lösung $G$ nur vom Abstand zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ und zusätzlich natürlich von dem Parameter $\omega$ abhängt

$$G = g(a,\omega), \quad a = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|. \tag{21.10}$$

Damit folgt

$$(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2})g(a,\omega) = \frac{1}{a}\frac{d^2(ag)}{da^2} + \frac{\omega^2}{c^2}g = 0 \text{ für } a \neq 0. \tag{21.11}$$

Dabei verwenden wir den L -Operator in der Form (5.15), wobei $\triangle_\Omega g = 0$, da $g$ nicht von der Richtung von $\mathbf{a} = \mathbf{r}-\mathbf{r}'$, sondern nur vom Betrag $a$ abhängt. Dies ergibt die Schwingungsgleichung für $ag$, hat also die Lösung

$$G = g(a,\omega) = \frac{1}{a}\Big(c_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega a/c} + c_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega a/c}\Big). \tag{21.12}$$

Für kleinen Abstand divergiert die Lösung wie $(c_1 + c_2)/a$. Um die $\delta$-Funktion in (21.9) als Inhomogenität mit dem richtigen Vorfaktor zu erhalten, muss $c_1 + c_2 = 1$ sein. Wir setzen nun der Reihe nach ein

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{r}, t) &= \int \mathrm{d}\omega \hat{\Phi}(\mathbf{r}, \omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\
&= \int \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}^3 r' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \hat{\rho}(\mathbf{r}', \omega) \\
&= \int \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Big( c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c} + c_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c} \Big) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \hat{\rho}(\mathbf{r}', \omega) \\
&= \int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Big( c_1 \rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) + c_2 \rho(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) \Big).
\end{aligned} \tag{21.13}$$

Beim Übergang von der zweiten auf die dritte Zeile haben wir $G$ eingesetzt. Anschließend führen wir die $\omega$-Integration aus, vergleiche (21.5). Allerdings ist $\omega$ im Exponenten in (21.13) nicht mit $t$, sondern mit $t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$ multipliziert. Die Lösung in der letzten Zeile enthält einen Beitrag zu $\Phi$ zur Zeit $t$, der von $\rho$ zu früherer Zeit (mit Faktor $c_1$) und einen, der von $\rho$ zu späterer Zeit (mit Faktor $c_2$) abhängt. Man bezeichnet die Lösung, die nur den ersten Beitrag ($c_1 = 1$, $c_2 = 0$) enthält, als die retardierte Lösung und die, die nur den zweiten Beitrag ($c_1 = 0$, $c_2 = 1$) enthält, als die avancierte Lösung.

$$\Phi_{\mathrm{r,a}}(\mathbf{r}, t) = \int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}', t \mp \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}). \tag{21.14}$$

Physikalisch ist in der Regel die retardierte Lösung (oberes Vorzeichen), da man davon ausgeht, dass das Potential durch die Ladungsverteilung, aber nicht die Ladungsverteilung durch das Potential entsteht. Analog erhält man die retardierte und avancierte Lösung für das Vektorpotential

$$\mathbf{A}_{\mathrm{r,a}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t \mp \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}). \tag{21.15}$$

## 21.b Eichbedingung

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Bedingung für die L -Eichung (20.9) erfüllt ist

$$\dot{\Phi} + c \,\mathrm{div}\, \mathbf{A} = \int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (\dot{\rho} + \mathrm{div}\, \mathbf{j}) + \int \mathrm{d}^3 r' \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{j}. \tag{21.16}$$

Die Argumente von $\rho$ und $\mathbf{j}$ sind wie oben $\mathbf{r}'$ und $t' = t \mp |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$. Im zweiten Integral kann man $\nabla$ durch $-\nabla'$ ersetzen und dann partiell integrieren. Das führt auf

$$\dot{\Phi} + c \,\mathrm{div}\, \mathbf{A} = \int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (\dot{\rho} + (\nabla + \nabla')\mathbf{j}). \tag{21.17}$$

Da $(\nabla + \nabla') t'(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{0}$ ist, folgt unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho}(\mathbf{r}', t'(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')) + (\nabla + \nabla')\mathbf{j}(\mathbf{r}', t'(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')) = \frac{\partial \rho}{\partial t'} + \nabla' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t')|_{t'} = 0, \tag{21.18}$$

so dass die Eichbedingung (20.9) erfüllt ist, da der Integrand in (21.17) wegen der Kontinuitätsgleichung verschwindet.

# 22 Ausstrahlung harmonischer Schwingungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir schwingende Ladungen und Ströme als Strahlungsquellen.

## 22.a Strahlungsfeld

Wir betrachten harmonische Schwingungen, das heißt, die Zeitabhängigkeit von $\rho$ und $\mathbf{j}$ ist proportional zu $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$

$$\rho(\mathbf{r},t) = \Re\Big(\rho_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Big) \tag{22.1}$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \Re\Big(\mathbf{j}_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Big), \tag{22.2}$$

analog für $\Phi$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$. Es folgt

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \Re \int \mathrm{d}^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho_0(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}. \tag{22.3}$$

Mit $k = \omega/c$ folgt

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho_0(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{22.4}$$

analog

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{22.5}$$

### 22.a.$\alpha$ Nahzone (Statische Zone)

In der Nahzone, das heißt für $k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll 2\pi$, was gleichbedeutend ist mit $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll \lambda$, wobei $\lambda$ die Wellenlänge der elektromagnetischen Welle ist, kann $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ durch 1 genähert werden. Damit werden die Potentiale $\Phi_0$, (22.4) und $\mathbf{A}_0$, (22.5) zu den Potentialen der Elektro- und Magnetostatik (3.14) und (9.17).

### 22.a.$\beta$ Fernzone (Strahlungszone)

Für große Entfernungen entwickelt man im Exponenten

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = r\sqrt{1-2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2}+\frac{r'^2}{r^2}} = r - \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}' + O(\frac{r'^2}{r}), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{22.6}$$

Dies ist gerechtfertigt für $r \gg kR^2$, wobei $R$ eine Abschätzung für die Ausdehnung der Ladungs- bzw. Stromverteilung ist, $r' < R$ für $\rho(\mathbf{r}') \neq 0$ bzw. $\mathbf{j}(\mathbf{r}') \neq \mathbf{0}$. Im Nenner approximieren wir $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx r$, was für $r \gg R$ gut ist. Dann folgt

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr}\mathbf{g}(k\mathbf{n}) + O(\frac{1}{r^2}) \tag{22.7}$$

mit der F -Transformierten der Stromverteilung

$$\mathbf{g}(k\mathbf{n}) = \int \mathrm{d}^3r'\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'}. \tag{22.8}$$

Hieraus folgt das Magnetfeld

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \operatorname{rot}\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\operatorname{grad}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr}\times\mathbf{g}(k\mathbf{n}) + O(\frac{1}{r^2}) = \mathrm{i}k\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr}\mathbf{n}\times\mathbf{g} + O(\frac{1}{r^2}). \tag{22.9}$$

Das elektrische Feld erhalten wir aus

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\dot{\mathbf{E}} \to \operatorname{rot}\mathbf{B}_0 = -\frac{\mathrm{i}\omega}{c}\mathbf{E}_0 \tag{22.10}$$

zu

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\mathrm{i}}{k}\operatorname{rot}\mathbf{B}_0 = -\mathbf{n}\times\mathbf{B}_0 + O(\frac{1}{r^2}). \tag{22.11}$$

$\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ und $\mathbf{n}$ bilden ein Orthogonalsystem. $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{B}_0$ sind betragsmäßig gleich und fallen wie $1/r$ ab. Der P -Vektor liefert im zeitlichen Mittel

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{S}(t)\mathrm{d}t, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{22.12}$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{S}} &= \frac{c}{4\pi}\overline{\Re\mathbf{E}\times\Re\mathbf{B}} = \frac{c}{8\pi}\Re(\mathbf{E}_0^*\times\mathbf{B}_0)\\ &= -\frac{c}{8\pi}\Re\Big((\mathbf{n}\times\mathbf{B}_0^*)\times\mathbf{B}_0\Big) = -\frac{c}{8\pi}\Re(\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_0)\mathbf{B}_0^* + \frac{c}{8\pi}\mathbf{n}(\mathbf{B}_0^*\cdot\mathbf{B}_0).\end{aligned} \tag{22.13}$$

Der erste Term nach dem letzten Gleichheitszeichen verschwindet, da $\mathbf{B}_0 \perp \mathbf{n}$. Es bleibt daher

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{c}{8\pi}\mathbf{n}(\mathbf{B}_0^*\cdot\mathbf{B}_0) = \frac{k^2\mathbf{n}}{8\pi c r^2}|\mathbf{n}\times\mathbf{g}(k\mathbf{n})|^2 + O(\frac{1}{r^3}). \tag{22.14}$$

Die im Mittel abgestrahlte Leistung ist dann

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{k^2}{8\pi c}\int |\mathbf{n}\times\mathbf{g}(k\mathbf{n})|^2\mathrm{d}\Omega_n, \tag{22.15}$$

wobei über den Raumwinkel $\Omega_n$ von $\mathbf{n}$ integriert wird.

## 22.b Elektrische Dipolstrahlung (Hertzscher Dipol)

Erstreckt sich die Ladungs- und Stromverteilung nur über einen im Vergleich zur Wellenlänge $\lambda$ kleinen Bereich $R$, so ist es sinnvoll, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'}$ zu entwickeln

$$\mathbf{g}(k\mathbf{n}) = \mathbf{g}^{(0)} - \mathrm{i}k\mathbf{g}^{(1)} + ..., \quad \mathbf{g}^{(0)} = \int \mathrm{d}^3r'\mathbf{j}_0(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{g}^{(1)} = \int \mathrm{d}^3r'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') \tag{22.16}$$

Diese Entwicklung reicht aus, um das Strahlungsfeld in der Fernzone zu untersuchen. Ist man daran interessiert, auch Nah- und Übergangszone zu betrachten, so muss man

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}(-\mathrm{i}k + \frac{1}{r})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}') + O(r'^2) \tag{22.17}$$

in dem Ausdruck für $\mathbf{A}_0$ entwickeln, was

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr}\mathbf{g}^{(0)} + (-\mathrm{i}k + \frac{1}{r})\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr}\mathbf{g}^{(1)} + ... \tag{22.18}$$

ergibt.
Wir betrachten zunächst den Beitrag von $\mathbf{g}^{(0)}$. Wir verwenden, dass

$$\mathrm{div}'\mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\dot{\rho}(\mathbf{r}') = \mathrm{i}\omega\rho(\mathbf{r}') \rightarrow \mathrm{div}'\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') = \mathrm{i}\omega\rho_0(\mathbf{r}'). \tag{22.19}$$

Dann folgt aus

$$\int \mathrm{d}^3r'\,\mathrm{div}'\Big(f(\mathbf{r}')\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')\Big) = 0 \tag{22.20}$$

die Beziehung

$$\int \mathrm{d}^3r'\,\mathrm{grad}'f(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') = -\mathrm{i}\omega\int \mathrm{d}^3r' f(\mathbf{r}')\rho_0(\mathbf{r}'). \tag{22.21}$$

Mit $f(\mathbf{r}') = x'_\alpha$ folgt dann

$$g_\alpha^{(0)} = \int \mathrm{d}^3r'\,j_{0,\alpha}(\mathbf{r}') = -\mathrm{i}\omega\int \mathrm{d}^3r'\,x'_\alpha\rho_0(\mathbf{r}') = -\mathrm{i}\omega p_{0,\alpha}, \tag{22.22}$$

das heißt, $\mathbf{g}^{(0)}$ lässt sich durch die Amplitude des elektrischen Dipolmoments ausdrücken

$$\mathbf{g}^{(0)} = -\mathrm{i}\omega\mathbf{p}_0. \tag{22.23}$$

Man bezeichnet daher diesen Anteil als elektrische Dipolstrahlung. Es folgt

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = -\mathrm{i}k\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathbf{p}_0, \tag{22.24}$$

daraus

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \Big(\frac{k^2}{r} + \frac{\mathrm{i}k}{r^2}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\mathbf{n}\times\mathbf{p}_0 \tag{22.25}$$

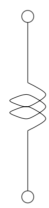
$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = -\frac{k^2}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{p}_0) + \big(3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}_0) - \mathbf{p}_0\big)\Big(\frac{1}{r^3} - \frac{\mathrm{i}k}{r^2}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}. \tag{22.26}$$

Der erste Term ist der führende in der Fernzone ($1/r \ll k$), der zweite führt in der Nahzone ($1/r \gg k$). Aus dem Ausdruck für die Fernzone erhält man als zeitgemittelten P -Vektor

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{ck^4\mathbf{n}}{8\pi r^2}|\mathbf{n}\times\mathbf{p}_0|^2 = \frac{ck^4|\mathbf{p}_0|^2\mathbf{n}}{8\pi r^2}\sin^2\theta, \tag{22.27}$$

Im zweiten Ausdruck wird angenommen, dass Realteil und Imaginärteil von $\mathbf{p}_0$ in die gleiche Richtung weisen. Dann ist $\theta$ der Winkel zwischen $\mathbf{p}_0$ und $\mathbf{n}$. Die abgestrahlte Leistung ist dann

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{ck^4|\mathbf{p}_0|^2}{3}. \tag{22.28}$$



Die Leistung nimmt also mit der vierten Potenz der Frequenz ($\omega = ck$) zu (R -Streuung). Als Beispiel kann man zwei Kondensatorkugeln im Abstand $l$ mit $I(t) = \Re(I_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})$ betrachten. Dann ist

$$|\mathbf{g}^{(0)}| = |\int \mathrm{d}^3r'\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')| = |\int \mathrm{d}lI_0| = |I_0l|, \quad p_0 = \frac{\mathrm{i}I_0l}{\omega}, \quad \dot{U}_\mathrm{s} = \frac{(klI_0)^2}{3c} \tag{22.29}$$

Diese Leistungsabgabe bedingt einen Strahlungswiderstand $R_\mathrm{s}$

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{1}{2}R_\mathrm{s}I_0^2, \quad R_\mathrm{s} = \frac{2}{3c}(kl)^2 \hat{=} 20\Omega\cdot(kl)^2 \tag{22.30}$$

zusätzlich zum O schen Widerstand. Man beachte $\frac{1}{c}\hat{=}30\Omega$, vergleiche (A.4).

## 22.c Magnetische Dipolstrahlung und elektrische Quadrupolstrahlung

Wir betrachten nun den zweiten Term in (22.16)

$$\begin{aligned} g_\alpha^{(1)} &= n_\beta\int \mathrm{d}^3r'\,x'_\beta j_{0,\alpha}(\mathbf{r}') \\ &= \frac{n_\beta}{2}\int \mathrm{d}^3r'(x'_\beta j_{0,\alpha} - x'_\alpha j_{0,\beta}) + \frac{n_\beta}{2}\int \mathrm{d}^3r'(x'_\beta j_{0,\alpha} + x'_\alpha j_{0,\beta}). \end{aligned} \tag{22.31}$$

Der erste Term ergibt das magnetische Dipolmoment (10.7)

$$n_\beta c\epsilon_{\beta,\alpha,\gamma}m_{0,\gamma} = -c(\mathbf{n}\times\mathbf{m}_0)_\alpha. \tag{22.32}$$

Der zweite Term lässt sich durch das elektrische Quadrupolmoment (4.10) ausdrücken. Mit $f = \frac{1}{2}x'_\alpha x'_\beta$ ergibt er sich mit (22.21) zu

$$-\mathrm{i}\omega\frac{n_\beta}{2}\int \mathrm{d}^3r'\,x'_\alpha x'_\beta\rho_0(\mathbf{r}') = -\mathrm{i}\omega\frac{n_\beta}{2}\Big(Q_{0,\alpha,\beta} + \frac{1}{3}\delta_{\alpha,\beta}\int \mathrm{d}^3r'\,r'^2\rho_0(\mathbf{r}')\Big). \tag{22.33}$$

Damit haben wir

$$\mathbf{g}^{(1)} = -c\mathbf{n}\times\mathbf{m}_0 - \frac{\mathrm{i}\omega}{2}Q_{0,\alpha,\beta}n_\beta\mathbf{e}_\alpha + \text{ const. }\mathbf{n}. \tag{22.34}$$

Wir beobachten, dass der dritte Term proportional $\mathbf{n}$ keinen Beitrag zu $\mathbf{B}_0$ (22.9) und $\mathbf{E}_0$ (22.11) liefert.

### 22.c.$\alpha$ Magnetische Dipolstrahlung

Der erste Beitrag in (22.34) gibt die magnetische Dipolstrahlung. Wir finden

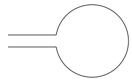
$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \Big(\mathrm{i}k - \frac{1}{r}\Big)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathbf{n}\times\mathbf{m}_0 \tag{22.35}$$

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = -k^2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{m}_0) + \Big(3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}_0) - \mathbf{m}_0\Big)\Big(\frac{1}{r^3} - \frac{\mathrm{i}k}{r^2}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} \tag{22.36}$$

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = (-\frac{k^2}{r} - \frac{\mathrm{i}k}{r^2}\Big)(\mathbf{n}\times\mathbf{m}_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}. \tag{22.37}$$

Als Beispiel betrachten wir einen Kreisstrom, der eine Fläche $f$ einschließt,

$$m_0 = I_0 f/c, \quad \dot{U}_\mathrm{s} = \frac{ck^4 m_0^2}{3} = \frac{k^4 I_0^2 f^2}{3c}, \tag{22.38}$$



was einem Strahlungswiderstand

$$R_\mathrm{s} = \frac{2}{3c}k^4 f^2 \hat{=} 20\Omega\,(k^2 f)^2 \tag{22.39}$$

entspricht.

### 22.c.$\beta$ Elektrische Quadrupolstrahlung

Wir betrachten noch den zweiten Term aus (22.34) in der Fernzone. Dieser liefert

$$\mathbf{g} = -\mathrm{i}k\mathbf{g}^{(1)} = -\frac{k^2 c}{2}Q_{0,\alpha,\beta}n_\beta\mathbf{e}_\alpha. \tag{22.40}$$

Als Spezialfall untersuchen wir den symmetrischen Quadrupol (4.27), $Q_{0,x,x} = Q_{0,y,y} = -\frac{1}{3}Q_0$, $Q_{0,z,z} = \frac{2}{3}Q_0$, während die Außerdiagonal-Elemente verschwinden. Dann ist

$$Q_{0,\alpha,\beta} = -\frac{1}{3}Q_0\delta_{\alpha,\beta} + Q_0\delta_{\alpha,3}\delta_{\beta,3}, \tag{22.41}$$

woraus

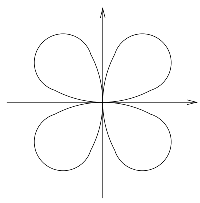
$$\mathbf{g} = -\frac{k^2 c}{2}Q_0 n_3\mathbf{e}_3 + \frac{k^2 c}{6}Q_0\mathbf{n}, \quad n_3 = \cos\theta \tag{22.42}$$

$$\mathbf{B}_0 = -\mathrm{i}k^3\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{2r}Q_0\mathbf{n}\times\mathbf{e}_3\cos\theta \tag{22.43}$$

$$\mathbf{E}_0 = \mathrm{i}k^3\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{2r}Q_0\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{e}_3)\cos\theta \tag{22.44}$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{ck^6\mathbf{n}}{32\pi r^2}|Q_0|^2\sin^2\theta\cos^2\theta \tag{22.45}$$

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{ck^6}{60}|Q_0|^2 \tag{22.46}$$



folgt. Auf der Zeichnung ist die Intensität der Quadrupol-Strahlung in Abhängigkeit vom Winkel $\theta$ radial skizziert.