Klassische Elektrodynamik

Theoretische Physik II Vorlesungs-Skriptum

Zweisprachige Ausgabe

Classical Electrodynamics

Theoretical Physics II Manuscript

Bilingual Edition

Franz Wegner
Institut für Theoretische Physik
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
2003

©2003 Franz Wegner Universität Heidelberg

Kopieren für den privaten Gebrauch unter Angabe des Autors gestattet. Kommerzielle Verwertung verboten.

Copying for private purposes with reference to the author allowed. Commercial use forbidden.

Hinweise auf Druckfehler nehme ich gerne entgegen.

I appreciate being informed of misprints.

Jörg Raufeisen, Andreas Haier, Stephan Frank und Bastian Engeser bin ich dankbar, dass sie mich auf mehrere Druckfehler in der ersten deutschen Auflage aufmerksam gemacht haben. In gleicher Weise danke ich Björn Feuerbacher, Sebastian Diehl, Karsten Freese, Markus Gabrysch und Jan Tomczak, dass sie mich auf Druckfehler der zweiten Auflage hingewiesen haben.

Cornelia Merkel, Melanie Steiert und Sonja Bartsch danke ich für das sorgfältige Lesen und Korrigieren des Textes der zweisprachigen Ausgabe.

I am grateful to Jörg Raufeisen, Andreas Haier, Stephan Frank, and Bastian Engeser for informing me of a number of misprints in the first German edition. Similarly I thank Björn Feuerbacher, Sebastian Diehl, Karsten Frese, Markus Gabrysch, and Jan Tomczak for informing me of misprints in the second edition.

I am indebted to Cornelia Merkel, Melanie Steiert, and Sonja Bartsch for carefully reading and correcting the text of the bilingual edition.

Bücher:

Books:

Becker, Sauter: Theorie der Elektrizität I
Jackson, Classical Electrodynamics
Landau, Lifschitz: Lehrbuch der Theoretischen Physik II: Klassische Feldtheorie
Panofsky, Phillips, Classical Electricity and Magnetism
Sommerfeld: Vorlesungen über Theoretische Physik III: Elektrodynamik
Stratton, Electromagnetic Theory
Stumpf, Schuler: Elektrodynamik

A

Grundgleichungen

Basic Equations

©2003 Franz Wegner Universität Heidelberg

Vorbemerkungen

Ich gehe davon aus, dass der Student bereits etwas mit der klassischen Elektrodynamik aus einer einführenden Vorlesung vertraut ist. Daher setze ich die vollständigen Gleichungen an den Anfang und führe von diesen ausgehend die jeweiligen Spezialisierungen ein.

In dieser Ausarbeitung verwende ich das Gausssche Maßsystem und nicht das SI-System. Der Zusammenhang und die Motivation wird im nächsten Abschnitt und in Anhang A angegeben.

Im Anhang B sind Formeln zur Vektoralgebra und Vektoranalysis angegeben. Der Leser /Die Leserin sei jedoch gewarnt, dass er/sie an einigen Stellen (B.11, B.15, B.34-B.50 und Aufgabe nach B.71) die Ergebnisse selbst einzutragen hat. Er/Sie ist also aufgefordert, die Rechnungen selbst durchzuführen oder zumindest die Ergebnisse, die in dem Skriptum erarbeitet werden, dort einzutragen.

Introductory Remarks

I assume that the student is already somewhat familiar with classical electrodynamics from an introductory course. Therefore I start with the complete set of equations and from this set I spezialize to various cases of interest.

In this manuscript I will use Gaussian units instead of the SI-units. The connection between both systems and the motivation for using Gaussian units will be given in the next section and in appendix A.

Formulae for vector algebra and vector analysis are given in appendix B. A warning to the reader: Sometimes (B.11, B.15, B.34-B.50 and exercise after B.71) he/she should insert the result by him/herself. He/She is requested to perform the calculations by him/herself or should at least insert the results given in this script.

1 Grundgleichungen der Elektrodynamik

Die Elektrodynamik befasst sich mit elektrischen und magnetischen Feldern, ihrer Erzeugung durch Ladungen und Ströme, ihrer Ausbreitung (elektromagnetische Wellen), ihrer Rückwirkung auf die Materie (Kräfte).

1.a Ladungen und Ströme

1.a.α Ladungsdichte

Die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ ist die Ladung Δq pro Volumenelement ΔV

1 Basic Equations of Electrodynamics

Electrodynamics describes electric and magnetic fields, their generation by charges and electric currents, their propagation (electromagnetic waves), and their reaction on matter (forces).

1.a Charges and Currents

1.a.α Charge Density

The charge density ρ is defined as the charge Δq per volume element ΔV

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}. \tag{1.1}$$

Damit ergibt sich die Ladung q im Volumen V zu

Therefore the charge q in the volume V is given by

$$q = \int_V \mathrm{d}^3 r \rho(\mathbf{r}). \tag{1.2}$$

Besteht die Ladungsverteilung aus Punktladungen q_i an den Orten $\mathbf{r}_i$, so ist die Ladungsdichte durch die Summe

If the charge distribution consists of point charges q_i at points $\mathbf{r}_i$, then the charge density is given by the sum

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \delta^3(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}), \tag{1.3}$$

gegeben, wobei die Diracsche Delta-Funktion (eigentlich Delta-Distribution) die Eigenschaft

where Dirac's delta-function (correctly delta-distribution) has the property

$$\int_V \mathrm{d}^3 r f(\mathbf{r}) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{cases} f(\mathbf{r}_0) & \text{falls if } \mathbf{r}_0 \in V \\ 0 & \text{falls if } \mathbf{r}_0 \notin V \end{cases} \tag{1.4}$$

hat.

.

Ähnlich definiert man die Flächenladungsdichte $\sigma(\mathbf{r})$ an Grenz- oder Oberflächen als Ladung pro Fläche

Similarly one defines the charge density per area $\sigma(\mathbf{r})$ at boundaries and surfaces as charge per area

$$\sigma(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}f}, \tag{1.5}$$

ähnlich auch die Linienladungsdichte.

similarly the charge density on a line.

1.a.β Strom und Stromdichte

Der Strom I ist die Ladung $\mathrm{d}q$, die pro Zeiteinheit $\mathrm{d}t$ durch eine Fläche F fließt,

1.a.β Current and Current Density

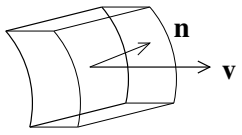
The current I is the charge $\mathrm{d}q$ that flows through a certain area F per time $\mathrm{d}t$,

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}. \tag{1.6}$$

Es sei nun $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ die mittlere Geschwindigkeit der Ladungsträger, $\mathbf{n}$ die (auf die Länge 1 normierte) Flächennormale. Dann ist $\mathbf{v}\mathrm{d}t$ der Weg, den die Ladungen in der Zeit $\mathrm{d}t$ zurücklegen. Multipliziert mit $\mathbf{n}$ ergibt sich die Schichtdicke $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}t$, die die in der Zeit $\mathrm{d}t$ durch die Fläche geflossenen Ladungen bilden.

Be $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ the average velocity of the charge carriers and $\mathbf{n}$ the unit vector normal to the area element. Then $\mathbf{v}\mathrm{d}t$ is the distance vector traversed during time $\mathrm{d}t$. Multiplied by $\mathbf{n}$ one obtains the thickness of the layer $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}t$ of the carriers which passed the surface during time $\mathrm{d}t$.

Multipliziert mit dem Flächenelement $\mathrm{d}f$ ergibt sich das Volumen der Ladung, die durch $\mathrm{d}f$ geflossen ist. Weitere Multiplikation mit der Ladungsdichte ρ ergibt die Ladung $\mathrm{d}q$, die in der Zeit $\mathrm{d}t$ durch die Fläche $\mathrm{d}f$ tritt



Multiplied by the surface element $\mathrm{d}f$ one obtains the volume of the charge, which flows through the area. Additional multiplication by ρ yields the charge $\mathrm{d}q$ which passes during time $\mathrm{d}t$ the surface $\mathrm{d}f$

$$\mathrm{d}q = \int_F \mathbf{v}\mathrm{d}t \cdot \mathbf{n}\mathrm{d}f\rho \tag{1.7}$$

$$I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t = \int_F \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)\rho(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})\mathrm{d}f = \int_F \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathrm{d}\mathbf{f} \tag{1.8}$$

mit der Stromdichte $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ und dem gerichteten Flächenelement $\mathrm{d}\mathbf{f} = \mathbf{n}\mathrm{d}f$.

with the current density $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ and the oriented area element $\mathrm{d}\mathbf{f} = \mathbf{n}\mathrm{d}f$.

1.a.γ Ladungserhaltung und Kontinuitätsgleichung

Die Ladung q in einem festen Volumen V

1.a.γ Conservation of Charge and Equation of Continuity

The charge q in a fixed volume V

$$q(t) = \int_V \mathrm{d}^3 r \rho(\mathbf{r}, t) \tag{1.9}$$

ändert sich pro Zeiteinheit um

changes as a function of time by

$$\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = \int_V \mathrm{d}^3 r \frac{\partial\rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \tag{1.10}$$

Da die Ladung erhalten ist, kann sie sich nur durch einen Strom durch die Oberfläche ∂V des Volumens ändern. Wir bezeichnen mit I den nach außen fließenden Strom. Dann ist

This charge can only change, if some charge flows through the surface ∂V of the volume, since charge is conserved. We denote the current which flows outward by I. Then

$$\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = -I(t) = -\int_{\partial V} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathrm{d}\mathbf{f} = -\int_V \mathrm{d}^3 r \,\mathrm{div}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \tag{1.11}$$

wobei wir vom Gaussschen Satz (B.59) Gebrauch machten. Da die Beziehungen (1.10) und (1.11) für jedes Volumen und auch jedes Volumenelement gilt, folgt die Gleichheit der Integranden in den beiden Volumenintegralen

where we make use of the divergence theorem (B.59). Since (1.10) and (1.11) hold for any volume and volume element, the integrands in the volume integrals have to be equal

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0. \tag{1.12}$$

Diese Gleichung bezeichnet man als Kontinuitätsgleichung. Sie drückt in differentieller Form die Erhaltung der Ladung aus.

This equation is called the equation of continuity. It expresses in differential form the conservation of charge.

1.b Maxwell-Gleichungen

Die elektrischen Ladungen und Ströme erzeugen das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Diese Beziehung wird durch die vier Maxwell-Gleichungen beschrieben

1.b Maxwell's Equations

The electric charges and currents generate the electric field $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ and the magnetic induction $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. This relation is described by the four Maxwell Equations

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{c\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \tag{1.13}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{r}, t) \tag{1.14}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{c\partial t} = \mathbf{0} \tag{1.15}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0. \tag{1.16}$$

Die Vektoroperation rot wird im Englischen mit curl bezeichnet. In den zentral gedruckten Gleichungen verwende ich stets rot, innerhalb des Textes die in der jeweiligen Sprache übliche Form.

The vector operation curl is denoted rot in the German language. In the equations printed in the center I use rot, within the text the usual form of the corresponding language.

Diese MAXWELL-Gleichungen werden bisweilen als MAXWELL-Gleichungen im Vakuum bezeichnet. Sie gelten jedoch auch in Materie. Die Ladungsdichte und die Stromdichte enthalten alle Beiträge, also freibewegliche und Polarisations-Ladungsdichten und freibewegliche, Polarisations- und Magnetisierungs-stromdichten.

Vielfach verlangt man als Randbedingung noch, dass das elektrische und das magnetische Feld im Unendlichen verschwinden.

These equations named after MAXWELL are often called MAXWELL's Equations in the vacuum. However, they are also valid in matter. The charge density and the current density contain all contributions, the densities of free charges and polarization charges, and of free currents and polarization- and magnetization currents.

Often one requires as a boundary condition that the electric and the magnetic fields vanish at infinity.

1.c COULOMB- und LORENTZ-Kraft

Das elektrische Feld **E** und die magnetische Induktion **B** üben auf eine Ladung q am Ort **r**, die sich mit der Geschwindigkeit **v** bewegt, die Kraft

$$\mathbf{K} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) + q\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{1.17}$$

aus.

Dabei sind **E** und **B** die Beiträge, die nicht von q selbst herrühren. Die von q selbst erzeugten Felder bewirken die Reaktionskraft, die wir jedoch im Weiteren nicht betrachten.

Der erste Beitrag in (1.17) ist die COULOMB-Kraft, der zweite die LORENTZ-Kraft. Dabei ist c= 299 792 458 m/s. Wir werden später sehen, dass diese Konstante die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. (Man hat sie zu obigem Wert definiert und damit den Umrechnungsfaktor zwischen Zeit und Länge festgelegt.) Die Kraft, die auf ein kleines Volumen ΔV wirkt, lässt sich schreiben als

1.c COULOMB and LORENTZ Force

The electric field **E** and the magnetic induction **B** exert a force **K** on a charge q located at **r**, moving with a velocity **v**

.

Here **E** and **B** are the contributions which do not come from q itself. The fields generated by q itself exert the reaction force which we will not consider further.

The first contribution in (1.17) is the COULOMB force, the second one the LORENTZ force. One has c= 299 792 458 m/s. Later we will see that this is the velocity of light in vacuum. (It has been defined with the value given above in order to introduce a factor between time and length.) The force acting on a small volume ΔV can be written as

$$\Delta\mathbf{K} = \mathbf{k}(\mathbf{r})\Delta V \tag{1.18}$$

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{1}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}). \tag{1.19}$$

Man bezeichnet **k** als die Kraftdichte. Die auf das Volumen V wirkende elektromagnetische Kraft ergibt sich dann zu

k is called the density of force. The electromagnetic force acting on the volume V is given by

$$\mathbf{K} = \int_V \mathrm{d}^3 r \mathbf{k}(\mathbf{r}). \tag{1.20}$$

2 Dimensionen und Einheiten

2.a Gausssches Maßsystem

In dieser Vorlesung verwenden wir das Gausssche Maßsystem. Wir betrachten nun die Dimensionen der auftretenden Größen. Aus der Kontinuitätsgleichung (1.12) und den Maxwellgleichungen (1.13) bis (1.16) folgt

$$[\rho]/[t] = [j]/[x] \tag{2.1}$$
$$[B]/[x] = [E]/([c][t]) = [j]/[c] \tag{2.2}$$
$$[E]/[x] = [B]/([c][t]) = [\rho]. \tag{2.3}$$

Daraus folgt

$$[j] = [\rho][x]/[t] \tag{2.4}$$
$$[E] = [\rho][x] \tag{2.5}$$
$$[B] = [\rho][c][t] = [\rho][x]^2/([c][t]), \tag{2.6}$$

sowie

$$[c] = [x]/[t] \tag{2.7}$$
$$[B] = [\rho][x]. \tag{2.8}$$

Daraus sieht man, dass c tatsächlich die Dimension einer Geschwindigkeit hat. Um die weiteren Größen in ihrer Dimension festzulegen, müssen wir noch den Ausdruck (1.19) für die Kraftdichte k verwenden

$$[k] = [\rho][E] = [\rho]^2[x]. \tag{2.9}$$

Daraus folgt dann

$$[\rho]^2 = [k]/[x] = \text{dyn cm}^{-4} \tag{2.10}$$
$$[\rho] = \text{dyn}^{1/2}\,\text{cm}^{-2} \tag{2.11}$$
$$[E] = [B] = \text{dyn}^{1/2}\,\text{cm}^{-1} \tag{2.12}$$
$$[j] = \text{dyn}^{1/2}\,\text{cm}^{-1}\,\text{s}^{-1} \tag{2.13}$$
$$[q] = [\rho][x]^3 = \text{dyn}^{1/2}\,\text{cm} \tag{2.14}$$
$$[I] = [j][x]^2 = \text{dyn}^{1/2}\,\text{cm}\,\text{s}^{-1}. \tag{2.15}$$

2.b Andere Einheitensysteme

Für jede Größe kann die Einheit in jedem System unabhängig definiert werden. Glücklicherweise macht man davon nicht vollständigen Gebrauch.

2 Dimensions and Units

2.a Gaussian Units

In this course we use Gaussian units. We consider the dimensions of the various quantities. From the equation of continuity (1.12) and Maxwell's equations (1.13 to 1.16) one obtains

From this one obtains

and

From (2.7) one sees that c really has the dimension of a velocity. In order to determine the dimensions of the other quantities we still have to use expression (1.19) for the force density k

From this one obtains

2.b Other Systems of Units

The unit for each quantity can be defined independently. Fortunately, this is not used extensively.

Neben dem Gaussschen Maßsystem werden noch eine Reihe weiterer cgs-Systeme sowie das SI-System (internationales Maßsystem, Giorgi-System) verwendet. Letzteres ist das gesetzliche Maßsystem in vielen Ländern (z.B. in USA seit 1894, in Deutschland seit 1898) und wird in der Technik angewandt.

Während das Gausssche Maßsystem alle elektromagnetischen Größen in cm, g und s ausdrückt, verwendet das Giorgi-System neben den mechanischen Einheiten m, kg und s noch zwei weitere Einheiten A (Ampere) und V (Volt), allerdings nicht unabhängig voneinander, vielmehr gilt für die Einheit der Energie

Besides the Gaussian system of units a number of other cgs-systems is used as well as the SI-system (international system of units, Giorgi-system). The last one is the legal system in many countries (e.g. in the US since 1894, in Germany since 1898) and is used for technical purposes.

Whereas all electromagnetic quantities in the Gaussian system are expressed in cm, g und s, the Giorgi-system uses besides the mechanical units m, kg and s two other units, A (ampere) und V (volt). They are not independent, but related by the unit of energy

$$1\ \mathrm{kg\ m^2\ s^{-2}} = 1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{W\ s} = 1\ \mathrm{A\ V\ s}. \tag{2.16}$$

Die Umrechnung einiger gebräuchlicher Maßsysteme ineinander kann durch drei Umrechnungsfaktoren ϵ_0, μ_0 und ψ beschrieben werden. Dabei können ϵ_0 und μ_0 (im SI-System als Dielektrizitätskonstante und Permeabilitätskonstante des Vakuums bekannt) und die Verkettungskonstante

The conversion of the conventional systems of units can be described by three conversion factors ϵ_0, μ_0 and ψ. The factors ϵ_0 and μ_0 (known as the dielectric constant and permeability constant of the vacuum in the SI-system) and the interlinking factor

$$\gamma = c\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \tag{2.17}$$

dimensionsbehaftet sein, während ψ ein dimensionsloser Zahlenfaktor ist. Man unterscheidet zwischen rationalen Maßsystemen ($\psi = 4\pi$) und nicht rationalen Maßsystemen ($\psi = 1$). Die Umrechnungsfaktoren einiger gebräuchlicher Maßsysteme sind

can carry dimensions whereas ψ is a dimensionless number. One distinguishes between rational systems $\psi = 4\pi$) and non-rational systems ($\psi = 1$) of units. The conversion factors of some conventional systems of units are

Maßsystem / System of Units	ϵ_0	μ_0	γ	ψ
Gauss / Gaussian	1	1	c	1
Elektrostatisch / electrostatic (esu)	1	c^{-2}	1	1
Elektromagnetisch / electromagnetic (emu)	c^{-2}	1	1	1
Heaviside-Lorentz	1	1	c	4π
Giorgi (SI)	$(\mathrm{c}^2\mu_0)^{-1}$	$\frac{4\pi}{10^7}\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$	1	4π

Die bisher eingeführten Größen drücken sich durch die Größen der anderen Maßsysteme (mit einem Stern versehen) folgendermaßen aus

The quantities introduced until now are expressed in Gaussian units by those of other systems of units (indicated by an asterisk) in the following way

$$\mathbf{E} = \sqrt{\psi\epsilon_0}\mathbf{E}^* \qquad 1\ \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1} \hat{=} 3\cdot 10^4 \mathrm{V/m} \tag{2.18}$$

$$\mathbf{B} = \sqrt{\psi/\mu_0}\mathbf{B}^* \qquad 1\ \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1} \hat{=} 10^{-4}\mathrm{Vs/m}^2 \tag{2.19}$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{\psi\epsilon_0}}q^* \qquad 1\ \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm} \hat{=} 10^{-9}/3\mathrm{As}, \begin{matrix}\text{ähnlich}\\ \text{similarly}\end{matrix}\ \rho, \sigma, I, j. \tag{2.20}$$

Ein Umrechnungsbeispiel: Die Coulomb-Lorentz-Kraft lässt sich schreiben

An example of conversion: The Coulomb-Lorentz-force can be written

$$\mathbf{K} = q(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}) = \frac{q^*}{\sqrt{\psi\epsilon_0}}(\sqrt{\psi\epsilon_0}\mathbf{E}^* + \frac{\sqrt{\psi}}{c\sqrt{\mu_0}}\mathbf{v}\times\mathbf{B}^*) = q^*(\mathbf{E}^* + \frac{1}{c\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}\mathbf{v}\times\mathbf{B}^*) = q^*(\mathbf{E}^* + \frac{1}{\gamma}\mathbf{v}\times\mathbf{B}^*). \tag{2.21}$$

Die Elementarladung e_0 ist in dem von uns verwendeten Gaussschen Maßsystem $4.803\cdot 10^{-10}\ \mathrm{dyn}^{1/2}$ cm und im SI-System $1.602\cdot 10^{-19}$ As. Das Elektron trägt die Ladung $-e_0$, das Proton e_0, ein Kern der Kernladungszahl Z die Ladung Ze_0, Quarks die Ladungen $\pm e_0/3$ oder $\pm 2e_0/3$.

The elementary charge e_0 is $4.803\cdot 10^{-10}\ \mathrm{dyn}^{1/2}$ cm in Gaussian units and $1.602\cdot 10^{-19}$ As in SI-units. The electron carries charge $-e_0$, the proton e_0, a nucleus with Z protons the charge Ze_0, quarks the charges $\pm e_0/3$ and $\pm 2e_0/3$.

Weitere Angaben werden jeweils bei der Einführung weiterer Größen gegeben und sind im Anhang A zusammengefasst.

2.c Motivation für Gausssche Einheiten

Im SI-System sind das elektrische Feld **E** und die dielektrische Verschiebung **D** wie auch die magnetische Induktion **B** und das Magnetfeld **H** mit unterschiedlichen Dimensionen behaftet. Hierdurch wird leicht der irreführende Eindruck erweckt, es handele sich um unabhängige Felder. Auf einem mikroskopischen Niveau hat man es nur mit zwei Feldern, **E** und **B** zu tun, (1.13-1.16) (Lorentz 1892).

Tatsächlich wird der zweite Satz Felder nur dadurch eingeführt, dass man Polarisations- und Magnetisierungsanteile der Ladungen und Ströme in Materie aus den totalen Ladungen und Strömen herauszieht und zu den Feldern addiert (Abschnitt 6 und 11).

Dieser enge Zusammenhang kommt besser in einem cgs-System zum Ausdruck, in dem **E** und **D** gleiche Dimension haben wie auch **B** und **H**.

Leider gehört das Gausssche Maßsystem zu den irrationalen, während das SI-System ein rationales ist, so dass bei Umrechnungen auch immer Faktoren 4π auftreten. Ich hätte ein rationales Maß-System wie das von Heaviside und Lorentz vorgezogen. Leider wird aber in gängigen Lehrbüchern nur das SI-System und das Gausssche verwendet. Ich möchte die Studierenden nicht mit einem Maßsystem konfrontieren, mit dem praktisch kein Lehrbuch arbeitet.

The conversion of other quantities is given where they are introduced. A summary is given in Appendix A.

2.c Motivation for Gaussian Units

In the SI-system the electrical field **E** and the dielectric displacement **D** as well as the magnetic induction **B** and the magnetic field **H** carry different dimensions. This leads easily to the misleading impression that these are independent fields. On a microscopic level one deals only with two fields, **E** and **B**, (1.13-1.16) (Lorentz 1892).

However, the second set of fields is introduced only in order to extract the polarization and magnetization contributions of charges and currents in matter from the total charges and currents, and to add them to the fields. (Section 6 and 11).

This close relation is better expressed in cgs-units, where **E** and **D** have the same dimension, as well as **B** and **H**.

Unfortunately, the Gaussian system belongs to the irrational ones, whereas the SI-system is a rational one, so that in conversions factors 4π appear. I would have preferred to use a rational system like that of Heaviside and Lorentz. However, in the usual textbooks only the SI-system and the Gaussian one are used. I do not wish to offer the electrodynamics in a system which in practice is not used in other textbooks.

B

Elektrostatik

Electrostatics

©2003 Franz Wegner Universität Heidelberg

3 Elektrisches Feld, Potential, Energie des Feldes

3.a Statik

In der Statik behandelt man das zeitunabhängige Problem. Das heißt, die auftretenden Größen hängen nur vom Ort ab, $\rho = \rho(\mathbf{r})$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$. Dann zerfallen die Kontinuitätsgleichung (1.12) und die Maxwell-Gleichungen (1.13-1.16) in zwei Gruppen

$$\begin{array}{c} \operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 \\ \operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \\ \operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \\ \text{Magnetostatik} \\ \text{magnetostatics} \\ \mathbf{k}_{\mathrm{ma}} = \frac{1}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}) \\ \operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \\ \text{Elektrostatik} \\ \text{electrostatics} \\ \mathbf{k}_{\mathrm{el}} = \rho(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{array} \tag{3.1}$$

Die erste Gruppe von Gleichungen enthält nur die magnetische Induktion $\mathbf{B}$ und die Stromdichte $\mathbf{j}$. Sie beschreibt die Magnetostatik. Die zweite Gruppe von Gleichungen enthält nur das elektrische Feld $\mathbf{E}$ und die Ladungsdichte ρ. Sie ist Grundlage der Elektrostatik. In der letzten Zeile sind noch die entsprechenden Anteile der Kraftdichte $\mathbf{k}$ hinzugefügt.

3.b Elektrisches Feld und Potential

3.b.α Elektrisches Potential

Wir führen nun das elektrische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ ein. Hierzu betrachten wir das Wegintegral von $\mathbf{E}$ auf zwei verschiedenen Wegen (1) und (2) von $\mathbf{r}_0$ nach $\mathbf{r}$

$$\int_{\substack{\mathbf{r}_0\\(1)}}^{\mathbf{r}} \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\substack{\mathbf{r}_0\\(2)}}^{\mathbf{r}} \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \oint \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}), \tag{3.2}$$

3 Electric Field, Potential, Energy of the Field

3.a Statics

First we consider the time-independent problem: Statics. This means, the quantities depend only on their location, $\rho = \rho(\mathbf{r})$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$. Then the equation of continuity (1.12) and Maxwell's equations (1.13-1.16) separate into two groups

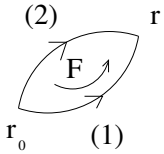
The first group of equations contains only the magnetic induction $\mathbf{B}$ and the current density $\mathbf{j}$. It describes magnetostatics. The second group of equations contains only the electric field $\mathbf{E}$ and the charge density ρ. It is the basis of electrostatics. The expressions for the corresponding parts of the force density $\mathbf{k}$ is given in the last line.

3.b Electric Field and Potential

3.b.α Electric Potential

Now we introduce the electric Potential $\Phi(\mathbf{r})$. For this purpose we consider the path integral over $\mathbf{E}$ along to different paths (1) and (2) from $\mathbf{r}_0$ to $\mathbf{r}$

wobei das letztere Integral über den geschlossenen Weg von $\mathbf{r}_0$ auf (1) nach $\mathbf{r}$ und von dort in entgegengesetzter Richtung auf (2) nach $\mathbf{r}_0$ zu erstrecken ist.



where the last integral has to be performed along the closed path from $\mathbf{r}_0$ along (1) to $\mathbf{r}$ and from there in opposite direction along (2) to $\mathbf{r}_0$.

Das letztere Integral lässt sich mit dem Stokesschen Satz (B.56) in das Integral über die von (1) und (2) berandete Fläche $\int \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r})$ überführen, das wegen der Maxwellgleichung $\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ (3.1) verschwindet.

This later integral can be transformed by means of Stokes' theorem (B.56) into the integral $\int \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \operatorname{curl}\mathbf{E}(\mathbf{r})$ over the open surface bounded by (1) and (2), which vanishes due to Maxwell's equation $\operatorname{curl}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ (3.1).

Daher ist das Integral (3.2) vom Weg unabhängig und man definiert das elektrische Potential

Therefore the integral (3.2) is independent of the path and one defines the electric potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \Phi(\mathbf{r}_0). \tag{3.3}$$

Dabei sind $\mathbf{r}_0$ und $\Phi(\mathbf{r}_0)$ willkürlich, aber fest. $\Phi(\mathbf{r})$ ist daher bis auf eine willkürliche additive Konstante bestimmt. Wir haben auf Grund der Definition (3.3)

The choice of $\mathbf{r}_0$ and of $\Phi(\mathbf{r}_0)$ is arbitrary, but fixed. Therefore $\Phi(\mathbf{r})$ is defined apart from an arbitrary additive constant. From the definition (3.3) we have

$$\mathrm{d}\Phi(\mathbf{r}) = -\mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}). \tag{3.4}$$

3.b.β Elektrischer Fluss und Ladung

3.b.β Electric Flux and Charge

Aus $\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r})$, (3.1) folgt

From $\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r})$, (3.1) one obtains

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi \int_V \mathrm{d}^3 r \rho(\mathbf{r}) \tag{3.5}$$

und damit mit dem Gaussschen Satz (B.59)

and therefore with the divergence theorem (B.59)

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi q(V), \tag{3.6}$$

das heißt der elektrische Fluß des Feldes $\mathbf{E}$ durch die Oberfläche ist das 4π-fache der Ladung q im Volumen V.

id est the electric flux of the field $\mathbf{E}$ through the surface equals 4π times the charge q in the volume V.

Eine einfache Anwendung hat dies für das elektrische Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$ mit $r = |\mathbf{r}|$. Aus Symmetriegründen weist das elektrische Feld in Normalenrichtung $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{r}/r$

This has a simple application for the electric field of a rotational invariant charge distribution $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$ with $r = |\mathbf{r}|$. For reasons of symmetry the electric field points in radial direction, $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{r}/r$

$$4\pi r^2 E(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 \mathrm{d}r' \mathrm{d}\Omega = (4\pi)^2 \int_0^r \rho(r') r'^2 \mathrm{d}r', \tag{3.7}$$

so dass man für das Feld

so that one obtains

$$E(r) = \frac{4\pi}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \tag{3.8}$$

erhält.

for the field.

Als Spezialfall betrachten wir jetzt noch eine Punktladung q im Ursprung. Dann gilt

As a special case we consider a point charge in the origin. Then one has

$$4\pi r^2 E(r) = 4\pi q, \quad E(r) = \frac{q}{r^2}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3} q. \tag{3.9}$$

Das Potential hängt aus Symmetriegründen nur von r ab. Dann gilt

The potential depends only on r for reasons of symmetry. Then one obtains

$$\operatorname{grad}\Phi(r) = \frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\mathrm{d}\Phi(r)}{\mathrm{d}r} = -\mathbf{E}(\mathbf{r}), \tag{3.10}$$

woraus durch Integration

which after integration yields

$$\Phi(r) = \frac{q}{r} + \text{const.} \tag{3.11}$$

folgt.

3.b.γ Potential einer Ladungsverteilung

Wir gehen aus von Punktladungen q_i an Orten $\mathbf{r}_i$. Das zugehörige Potential und die Feldstärke erhält man aus (3.11) und (3.10) durch Verschieben von $\mathbf{r}$ um $\mathbf{r}_i$ zu

3.b.γ Potential of a Charge Distribution

We start out from point charges q_i at locations $\mathbf{r}_i$. The corresponding potential and the field is obtained from (3.11) und (3.10) by shifting $\mathbf{r}$ by $\mathbf{r}_i$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} \tag{3.12}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}. \tag{3.13}$$

Wir gehen nun von den Punktladungen zu einer Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ über. Wir führen dabei den Übergang $\sum_i q_i f(\mathbf{r}_i) = \sum_i \Delta V \rho(\mathbf{r}_i) f(\mathbf{r}_i)$ nach $\int \mathrm{d}^3 r' \rho(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}')$ durch, was

We change now from point charges to the charge density $\rho(\mathbf{r})$. To do this we perform the transition from $\sum_i q_i f(\mathbf{r}_i) = \sum_i \Delta V \rho(\mathbf{r}_i) f(\mathbf{r}_i)$ to $\int \mathrm{d}^3 r' \rho(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}')$, which yields

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{3.14}$$

ergibt. Aus $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\Phi$ und $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$ folgt die Poisson-Gleichung

From $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\Phi$ and $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$ one obtains Poisson's equation

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}). \tag{3.15}$$

Man unterscheide $\triangle = \nabla\cdot\nabla$ und Δ =Delta. Wir machen auf (3.15) die Probe. Zunächst bilden wir

Please distinguish $\triangle = \nabla\cdot\nabla$ and Δ =Delta. We check eq. (3.15). First we determine

$$\nabla\Phi(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|^3} = \int \mathrm{d}^3 a\, \rho(\mathbf{r}+\mathbf{a}) \frac{\mathbf{a}}{a^3} \tag{3.16}$$

und

and

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}^3 a (\nabla\rho(\mathbf{r}+\mathbf{a}))\cdot\frac{\mathbf{a}}{a^3} = \int_0^\infty \mathrm{d}a \int d\Omega_a \frac{\partial\rho(\mathbf{r}+\mathbf{a})}{\partial a} = \int \mathrm{d}\Omega_a (\rho(\mathbf{r}+\infty\mathbf{e}_a) - \rho(\mathbf{r})) = -4\pi\rho(\mathbf{r}), \tag{3.17}$$

wenn ρ im Unendlichen verschwindet. Dabei haben wir das dreidimensionale Integral über a zerlegt in das Integral über den Radius a und den Raumwinkel Ω_a, $\mathrm{d}^3 a = a^2 \mathrm{d}a\mathrm{d}\Omega_a$ (vergleiche Abschnitt 5).

assuming that ρ vanishes at infinity. The three-dimensional integral over a has been separated by the integral over the radius a and the solid angle Ω_a, $\mathrm{d}^3 a = a^2 \mathrm{d}a\mathrm{d}\Omega$ (compare section 5).

Aus der Poisson-Gleichung folgt

From Poisson's equation one obtains

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\mathbf{r}') \triangle \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\rho(\mathbf{r}) = -4\pi \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{3.18}$$

und aus der Gleichheit der Integranden

and from the equality of the integrands

$$\triangle \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{3.19}$$

3.c Coulombkraft und Feldenergie

Auf die Ladung q_i am Ort $\mathbf{r}_i$ wirkt die Kraft

$$\mathbf{K}_i = q_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r}_i). \tag{3.20}$$

Dabei ist $\mathbf{E}_i$ das elektrische Feld ohne das von der Ladung q_i selbst erzeugte. Damit folgt die Coulomb-Kraft

$$\mathbf{K}_i = q_i \sum_{j\neq i} \frac{q_j(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}. \tag{3.21}$$

Aus dieser Formel erkennt man auch die Definition der Ladungseinheit im Gaussschen Maßsystem: 1 $\mathrm{dyn}^{1/2}$ cm ist die Ladung, die auf eine gleiche Ladung in 1 cm Entfernung die Kraft 1 dyn ausübt.

Die potentielle Energie ist

$$U = \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\neq i} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2}\sum_i q_i \Phi_i(\mathbf{r}_i). \tag{3.22}$$

Der Faktor 1/2 rührt daher, dass jedes Paar von Ladungen in der Summe zweimal auftritt. So ist die Wechselwirkungsenergie zwischen Ladung 1 und Ladung 2 sowohl in $i = 1, j = 2$ wie auch in $i = 2, j = 1$ enthalten. Daher ist durch 2 zu dividieren. Dabei ist in Φ_i ebenfalls der von q_i herrührende Beitrag zum Potential nicht enthalten. Die Kraft folgt daraus wie üblich zu

$$\mathbf{K}_i = -\operatorname{grad}_{\mathbf{r}_i} U. \tag{3.23}$$

Im Kontinuum erhält man unter Verwendung von (B.62)

$$U = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 r \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}^3 r \operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi}\int_F \mathrm{d}\mathbf{f}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) - \frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}^3 r \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}), \tag{3.24}$$

wobei jetzt der Beitrag der Ladungsdichte zu Φ am gleichen Ort nicht mehr auszunehmen ist, da er für eine kontinuierliche Verteilung vernachlässigbar ist. F schließe alle Ladungen ein und sei etwa eine Kugel vom Radius R. Im Limes $R \to \infty$ geht $\Phi \propto 1/R$, $E \propto 1/R^2$, $\int_F \propto 1/R \to 0$. Man erhält dann die elektrostatische Energie

$$U = \frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}^3 r E^2(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}^3 r\, u(\mathbf{r}) \tag{3.25}$$

mit der Energiedichte

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi}E^2(\mathbf{r}). \tag{3.26}$$

Klassischer Elektronenradius Als Beispiel betrachten wir den "klassischen Elektronenradius" R_0: Man nimmt an, die Ladung sei auf einer Kugelschale vom Radius R_0 gleichmäßig verteilt. Die elektrische Feldenergie stimme mit der Energie m_0c^2 überein, wobei m_0 die Elektronenmasse ist.

3.c Coulomb Force and Field Energy

The force acting on the charge q_i at $\mathbf{r}_i$ is

$$\mathbf{K}_i = q_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r}_i). \tag{3.20}$$

Here $\mathbf{E}_i$ is the electric field without that generated by the charge q_i itself. Then one obtains the Coulomb force

$$\mathbf{K}_i = q_i \sum_{j\neq i} \frac{q_j(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}. \tag{3.21}$$

From this equation one realizes the definition of the unit of charge in Gauss's units, 1 $\mathrm{dyn}^{1/2}$ cm is the charge, which exerts on the same amount of charge in the distance of 1 cm the force 1 dyn.

The potential energy is

$$U = \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\neq i} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2}\sum_i q_i \Phi_i(\mathbf{r}_i). \tag{3.22}$$

The factor 1/2 is introduced since each pair of charges appears twice in the sum. E.g., the interaction energy between charge 1 and charge 2 is contained both in $i = 1, j = 2$ and $i = 2, j = 1$. Thus we have to divide by 2. The contribution from q_i is excluded from the potential Φ_i. The force is then as usually

$$\mathbf{K}_i = -\operatorname{grad}_{\mathbf{r}_i} U. \tag{3.23}$$

In the continuum one obtains by use of (B.62)

$$U = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 r \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}^3 r \operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi}\int_F \mathrm{d}\mathbf{f}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) - \frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}^3 r \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}), \tag{3.24}$$

where no longer the contribution from the charge density at the same location has to be excluded from Φ, since it is negligible for a continuous distribution. F should include all charges and may be a sphere of radius R. In the limit $R \to \infty$ one obtains $\Phi \propto 1/R$, $E \propto 1/R^2$, $\int_F \propto 1/R \to 0$. Then one obtains the electrostatic energy

$$U = \frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}^3 r E^2(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}^3 r\, u(\mathbf{r}) \tag{3.25}$$

with the energy density

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi}E^2(\mathbf{r}). \tag{3.26}$$

Classical Radius of the Electron As an example we consider the "classical radius of an electron" R_0: One assumes that the charge is homogeneously distributed on the surface of the sphere of radius R. The electric field energy should equal the energy m_0c^2, where m_0 is the mass of the electron.

$$\frac{1}{8\pi}\int_{R_0}^{\infty}\left(\frac{e_0}{r^2}\right)^2 r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega = \frac{e_0^2}{2R_0} = m_0c^2 \tag{3.27}$$

ergibt $R_0 = 1.4 \cdot 10^{-13}$ cm. Die Annahme einer homogenen Ladungsverteilung in der Kugel ergibt ein etwas anderes Ergebnis.

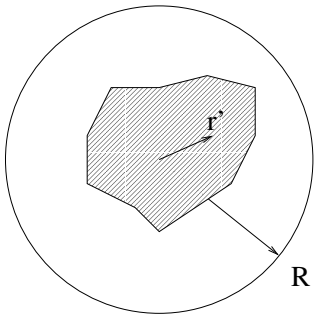
Aus hochenergetischen Streuprozessen weiß man allerdings, dass die Ausdehnung des Elektrons um mindestens einen Faktor 100 kleiner sein muss, obige Annahme also unzutreffend ist.

yields $R_0 = 1.4 \cdot 10^{-13}$ cm. The assumption of a homogeneous distribution of the charge inside the sphere yields a slightly different result.

From scattering experiments at high energies one knows that the extension of the electron is at least smaller by a factor of 100, thus the assumption made above does not apply.

4 Elektrischer Dipol und Quadrupol

Gegeben sei eine Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}')$ innerhalb einer Kugel vom Radius R um den Ursprung. Außerhalb sei $\rho(\mathbf{r}') = 0$.



4 Electric Dipole and Quadrupole

A charge distribution $\rho(\mathbf{r}')$ inside a sphere of radius R around the origin is given. We assume $\rho(\mathbf{r}') = 0$ outside the sphere.

4.a Das Feld für $r > R$

Das Potential der Ladungsverteilung ist

4.a The Field for $r > R$

The potential of the charge distribution is

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{4.1}$$

Wir führen nun eine Taylor-Entwicklung nach $\mathbf{r}'$, das heißt nach den drei Variabeln x'_1, x'_2 und x'_3 durch

We perform a Taylor-expansion in $\mathbf{r}'$, i.e. in the three variables x'_1, x'_2 und x'_3

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-\mathbf{r}'\nabla)^l}{l!} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - (\mathbf{r}'\nabla)\frac{1}{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{r}'\nabla)(\mathbf{r}'\nabla)\frac{1}{r} - ... \tag{4.2}$$

Als erstes müssen wir den Gradienten von $1/r$ berechnen

At first we have to calculate the gradient of $1/r$

$$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \text{ da } \text{since } \nabla f(r) = \frac{\mathbf{r}}{r} f'(r), \tag{4.3}$$

löse (B.39, B.42). Daraus folgt dann

solve (B.39, B.42). Then one obtains

$$(\mathbf{r}'\nabla)\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \tag{4.4}$$

Als nächstes berechnen wir (B.47)

Next we calculate (B.47)

$$\nabla\frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3}\,\mathrm{grad}\,(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{\mathbf{c}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \tag{4.5}$$

unter Verwendung von (B.27) und Lösung von (B.37, B.39). Damit erhalten wir die Taylor-Entwicklung

using (B.27) and the solutions of (B.37, B.39). Then we obtain the Taylor-expansion

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2}{2r^5} + ... \tag{4.6}$$

Wir formen zunächst noch $3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2$ um

At first we transform $3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2$

$$3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2 = x'_\alpha x'_\beta (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha,\beta}) = (x'_\alpha x'_\beta - \frac{1}{3} r'^2 \delta_{\alpha,\beta})(3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha,\beta}) \tag{4.7}$$

wegen $\delta_{\alpha,\beta}(3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha,\beta}r^2) = 3x_\alpha x_\alpha - r^2\delta_{\alpha,\alpha} = 0$. Hier und auch im Folgenden verwenden wir die Summationskonvention: Über alle Indices (von Komponenten), die zweimal in einem Produkt auftreten, wird summiert, in (4.7) also über α und β.

because of $\delta_{\alpha,\beta}(3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha,\beta}r^2) = 3x_\alpha x_\alpha - r^2\delta_{\alpha,\alpha} = 0$. Here and in the following we use the summation convention, i.e. we sum over all indices (of components), which appear twice in a product in (4.7), that is over α and β.

Wir führen nun die Größen

We now introduce the quantities

$$q = \int \mathrm{d}^3r'\rho(\mathbf{r}') \qquad \begin{matrix}\text{Ladung}\\ \text{charge}\end{matrix} \tag{4.8}$$

$$\mathbf{p} = \int \mathrm{d}^3r'\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}') \qquad \begin{matrix}\text{Dipolmoment}\\ \text{dipolar moment}\end{matrix} \tag{4.9}$$

$$Q_{\alpha,\beta} = \int \mathrm{d}^3r'(x'_\alpha x'_\beta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha,\beta}r'^2)\rho(\mathbf{r}') \qquad \begin{matrix}\text{Komponenten des Quadrupolmoments}\\ \text{components of the quadrupolar moment}\end{matrix} \tag{4.10}$$

ein und erhalten damit die Entwicklung für das Potential und die elektrische Feldstärke

and obtain the expansion for the potential and the electric field

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3} + Q_{\alpha,\beta}\frac{3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha,\beta}}{2r^5} + \mathrm{O}(\frac{1}{r^4}) \tag{4.11}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q\mathbf{r}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{p}r^2}{r^5} + \mathrm{O}(\frac{1}{r^4}) \tag{4.12}$$

4.b Transformationseigenschaften

Die Multipolmomente sind definiert bezüglich eines vorgegebenen Punktes, zum Beispiel des Ursprungs. Verschiebt man den Bezugspunkt um $\mathbf{a}$, das heißt $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}' - \mathbf{a}$, so findet man mit $\rho_1(\mathbf{r}'_1) = \rho(\mathbf{r}')$

4.b Transformation Properties

The multipole moments are defined with respect to a given point, for example with respect to the origin. If one shifts the point of reference by $\mathbf{a}$, i.e. $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}' - \mathbf{a}$, then one finds with $\rho_1(\mathbf{r}'_1) = \rho(\mathbf{r}')$

$$q_1 = \int \mathrm{d}^3r'_1\rho_1(\mathbf{r}'_1) = \int \mathrm{d}^3r'\rho(\mathbf{r}') = q \tag{4.13}$$

$$\mathbf{p}_1 = \int \mathrm{d}^3r'_1\mathbf{r}'_1\rho_1(\mathbf{r}'_1) = \int \mathrm{d}^3r'(\mathbf{r}' - \mathbf{a})\rho(\mathbf{r}') = \mathbf{p} - \mathbf{a}q. \tag{4.14}$$

Die Gesamtladung ist unabhängig vom Bezugspunkt. Das Dipolmoment ist unabhängig vom Bezugspunkt, falls $q = 0$ (reiner Dipol), sonst hängt es vom Bezugspunkt ab. Ähnlich findet man, dass das Quadrupolmoment unabhängig vom Bezugspunkt ist, falls $q = 0$ und $\mathbf{p} = 0$ (reiner Quadrupol).

The total charge is independent of the point of reference. The dipolar moment is independent of the point of reference if $q = 0$ (pure dipol), otherwise it depends on the point of reference. Similarly one finds that the quadrupolar moment is independent of the point of reference, if $q = 0$ and $\mathbf{p} = 0$ (pure quadrupole).

Unter Drehung $x'_{1,\alpha} = D_{\alpha,\beta}x'_\beta$ ist q invariant (Skalar), wobei D eine Drehmatrix sei, also eine orthogonale Transformation beschreibe. Der Dipol $\mathbf{p}$ transformiert sich wie ein Vektor

The charge q is invariant under rotation (scalar) $x'_{1,\alpha} = D_{\alpha,\beta}x'_\beta$, where D is a rotation matrix, which describes an orthogonal transformation. The dipole $\mathbf{p}$ transforms like a vector

$$p_{1,\alpha} = \int \mathrm{d}^3r' D_{\alpha,\beta}x'_\beta\rho(\mathbf{r}') = D_{\alpha,\beta}p_\beta \tag{4.15}$$

und der Quadrupol Q wie ein Tensor zweiter Stufe

and the quadrupole Q like a tensor of rank 2

$$Q_{1,\alpha\beta} = \int \mathrm{d}^3r'(D_{\alpha,\gamma}x'_\gamma D_{\beta,\delta}x'_\delta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha,\beta}r'^2)\rho(\mathbf{r}'). \tag{4.16}$$

Beachtet man, dass auf Grund der Orthogonalität von D

Taking into account that due to the orthogonality of D

$$\delta_{\alpha,\beta} = D_{\alpha,\gamma}D_{\beta,\gamma} = D_{\alpha,\gamma}\delta_{\gamma,\delta}D_{\beta,\delta}, \tag{4.17}$$

so folgt

it follows that

$$Q_{1,\alpha\beta} = D_{\alpha,\gamma} D_{\beta,\delta} Q_{\gamma,\delta}, \tag{4.18}$$

also das Transformationsgesetz für Tensoren zweiter Stufe.

that is the transformation law for tensors of second rank.

4.c Dipol

4.c Dipole

Der Prototyp eines Dipols besteht aus einer Ladung q am Ort $\mathbf{r}_0 + \mathbf{a}$ und einer entgegengesetzten Ladung $-q$ am Ort $\mathbf{r}_0$. Das Dipolmoment beträgt dann

The prototype of a dipole consists of two charges of opposite sign, q at $\mathbf{r}_0 + \mathbf{a}$ and $-q$ at $\mathbf{r}_0$.

$$\mathbf{p} = q\mathbf{a}. \tag{4.19}$$

Als Ladungsverteilung ergibt sich dann

Therefore the corresponding charge distribution is

$$\rho(\mathbf{r}) = q(\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{a}) - \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)). \tag{4.20}$$

Wir führen nun eine Taylorentwicklung nach $\mathbf{a}$ durch

We perform now the Taylor expansion in $\mathbf{a}$

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - q\mathbf{a} \cdot \nabla\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \frac{q}{2}(\mathbf{a} \cdot \nabla)^2\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + ... - q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \tag{4.21}$$

wobei sich der erste mit dem letzten Term weghebt. Wir führen nun den Limes $\mathbf{a} \to 0$ durch, wobei wir das Produkt $q\mathbf{a} = \mathbf{p}$ festhalten. Dann bleibt als Ladungsverteilung eines Dipols $\mathbf{p}$ am Ort $\mathbf{r}_0$

where the first and the last term cancel. We consider now the limit $\mathbf{a} \to 0$, where the product $q\mathbf{a} = \mathbf{p}$ is kept fixed. Then we obtain the charge distribution of a dipole $\mathbf{p}$ at location $\mathbf{r}_0$

$$\rho(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \tag{4.22}$$

und sein Potential

and its potential

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\mathbf{p} \cdot \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \operatorname{grad}' \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) = \mathbf{p} \cdot \int d^3r' \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \\ &= \mathbf{p} \cdot \int d^3r' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3},\end{aligned} \tag{4.23}$$

wobei die Gleichungen (B.61) verwendet und (B.50) gelöst wurden.

where equation (B.61) is used and (B.50) has to be solved.

4.d Quadrupol

4.d Quadrupole

Der Quadrupol wird durch die zweiten Momente der Ladungsverteilung beschrieben.

The quadrupole is described by the second moment of the charge distribution.

4.d.α Symmetrien

4.d.α Symmetries

Q ist ein symmetrischer Tensor

Q is a symmetric tensor

$$Q_{\alpha,\beta} = Q_{\beta,\alpha}. \tag{4.24}$$

Er lässt sich daher ähnlich wie der Trägheitstensor durch eine orthogonale Transformation auf Diagonalform bringen. Weiterhin folgt aus der Definition (4.10)

It can be diagonalized by an orthogonal transformation similarly as the tensor of inertia. Further from definition (4.10) it follows that

$$Q_{\alpha,\alpha} = 0, \tag{4.25}$$

das heißt die Spur des Quadrupol-Tensors verschwindet. Daher hat der Tensor nicht sechs, sondern nur fünf unabhängige Komponenten.

4.d.β Symmetrischer Quadrupol

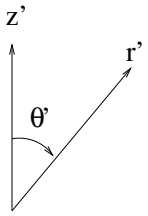
Ein Spezialfall ist der symmetrische Quadrupol. Seine Ladungsverteilung hängt nur von z und dem Abstand von der z-Achse ab, $\rho = \rho(z, \sqrt{x^2 + y^2})$. Für ihn gilt

$$Q_{x,y} = Q_{x,z} = Q_{y,z} = 0, \tag{4.26}$$

weil $\rho(x, y, z) = \rho(-x, y, z) = \rho(x, -y, z)$. Weiter ist

$$Q_{x,x} = Q_{y,y} = -\frac{1}{2}Q_{z,z} =: -\frac{1}{3}\hat{Q}. \tag{4.27}$$

Die erste Gleichung folgt aus $\rho(x, y, z)$=$\rho(y, x, z)$, die zweite daraus, dass die Spur von Q verschwindet. Das letzte Gleichheitszeichen gibt die Definition von $\hat{Q}$ an.



Man findet

$$\hat{Q} = \frac{3}{2}Q_{z,z} = \int d^3r'(\frac{3}{2}z'^2 - \frac{1}{2}r'^2)\rho(\mathbf{r}') = \int d^3r' r'^2 P_2(\cos\theta')\rho(\mathbf{r}') \tag{4.28}$$

mit dem Legendre-Polynom $P_2(\xi) = \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}$. Auf die Legendre-Polynome werden wir im nächsten Abschnitt und im Anhang C noch zurückkommen.

Als Beispiel betrachten wir noch den gestreckten Quadrupol mit zwei Ladungen q an den Orten $\pm a\mathbf{e}_z$ und einer Ladung $-2q$ am Ursprung. Wir finden $\hat{Q} = 2qa^2$. Die einzelnen Ladungen tragen zum Quadrupolpotential

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{3}\hat{Q}\frac{3x^2 - r^2}{2r^5} - \frac{1}{3}\hat{Q}\frac{3y^2 - r^2}{2r^5} + \frac{2}{3}\hat{Q}\frac{3z^2 - r^2}{2r^5} = \frac{\hat{Q}P_2(\cos\theta)}{r^3} \tag{4.29}$$

bei.

4.e Energie, Kraft und Drehmoment auf einen Multipol im äußeren Feld

Eine Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$, die um den Ursprung lokalisiert sei, sei in einem äußeren elektrischen Potential $\Phi_a(\mathbf{r})$, das etwa von einer entfernten Ladungsverteilung ρ_a erzeugt sei. Die Wechselwirkungsenergie beträgt dann

$$U = \int d^3r \rho(\mathbf{r})\Phi_a(\mathbf{r}). \tag{4.30}$$

that is the trace of the quadrupole tensor vanishes. Thus the tensor does not have six, but only five independent components.

4.d.β Symmetric Quadrupole

A special case is the symmetric quadrupole. Its charge distribution depends only on z and on the distance from the z-axis, $\rho = \rho(z, \sqrt{x^2 + y^2})$. It obeys

$$Q_{x,y} = Q_{x,z} = Q_{y,z} = 0, \tag{4.26}$$

because $\rho(x, y, z) = \rho(-x, y, z) = \rho(x, -y, z)$. Furthermore one has

$$Q_{x,x} = Q_{y,y} = -\frac{1}{2}Q_{z,z} =: -\frac{1}{3}\hat{Q}. \tag{4.27}$$

The first equality follows from $\rho(x, y, z) = \rho(y, x, z)$, the second one from the vanishing of the trace of Q. The last equality-sign gives the definition of $\hat{Q}$.

One finds

$$\hat{Q} = \frac{3}{2}Q_{z,z} = \int d^3r'(\frac{3}{2}z'^2 - \frac{1}{2}r'^2)\rho(\mathbf{r}') = \int d^3r' r'^2 P_2(\cos\theta')\rho(\mathbf{r}') \tag{4.28}$$

with the Legendre polynomial $P_2(\xi) = \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}$. We will return to the Legendre polynomials in the next section and in appendix C.

As an example we consider the stretched quadrupole with two charges q at $\pm a\mathbf{e}_z$ and a charge $-2q$ in the origin. Then we obtain $\hat{Q} = 2qa^2$. The different charges contribute to the potential of the quadrupole

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{3}\hat{Q}\frac{3x^2 - r^2}{2r^5} - \frac{1}{3}\hat{Q}\frac{3y^2 - r^2}{2r^5} + \frac{2}{3}\hat{Q}\frac{3z^2 - r^2}{2r^5} = \frac{\hat{Q}P_2(\cos\theta)}{r^3} \tag{4.29}$$

.

4.e Energy, Force and Torque on a Multipole in an external Field

A charge distribution $\rho(\mathbf{r})$ localized around the origin is considered in an external electric potential $\Phi_a(\mathbf{r})$, which may be generated by an external charge distribution ρ_a. The interaction energy is then given by

$$U = \int d^3r \rho(\mathbf{r})\Phi_a(\mathbf{r}). \tag{4.30}$$

Hier tritt kein Faktor $1/2$ vor dem Integral auf, wie man es wegen (3.24) annehmen könnte, da zum Integral über $\rho(\mathbf{r})\Phi_a(\mathbf{r})$ noch ein zweiter Beitrag mit dem Integral über $\rho_a(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})$ hinzutritt, der noch einmal den gleichen Beitrag liefert. Wir entwickeln nun das äußere Potential und erhalten für die Wechselwirkungsenergie

No factor $1/2$ appears in front of the integral, which might be expected in view of this factor in (3.24), since besides the integral over $\rho(\mathbf{r})\Phi_a(\mathbf{r})$ there is a second one over $\rho_a(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})$, which yields the same contribution. We now expand the external potential and obtain for the interaction energy

$$\begin{aligned} U &= \int d^3r\rho(\mathbf{r})\left\{\Phi_a(0) + \mathbf{r}\nabla\Phi_a|_{r=0} + \frac{1}{2}x_\alpha x_\beta\ \nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi_a\Big|_{r=0} + ...\right\} \\ &= q\Phi_a(0) + \mathbf{p}\cdot\nabla\Phi_a|_{r=0} + \frac{1}{2}\left(Q_{\alpha,\beta} + \frac{1}{3}\delta_{\alpha,\beta}\int d^3r\rho(\mathbf{r})r^2\right)\nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi_a\Big|_{r=0} + ... \end{aligned} \tag{4.31}$$

Der Beitrag proportional zum Integral über $\rho(\mathbf{r})r^2$ verschwindet, da $\nabla_\alpha\nabla_\alpha\Phi_a = \triangle\Phi_a = -4\pi\rho_a(\mathbf{r}) = 0$, da sich am Ursprung keine Ladungen befinden, die Φ_a erzeugen. Damit bleibt für das Wechselwirkungs-Potential

The contribution proportional to the integral over $\rho(\mathbf{r})r^2$ vanishes, since $\nabla_\alpha\nabla_\alpha\Phi_a = \triangle\Phi_a = -4\pi\rho_a(\mathbf{r}) = 0$, since there are no charges at the origin, which generate Φ_a. Therefore we are left with the potential of interaction

$$U = q\Phi_a(0) - \mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_a(0) + \frac{1}{2}Q_{\alpha,\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi_a + ... \tag{4.32}$$

Wir können daraus zum Beispiel die potentielle Energie zweier Dipole, $\mathbf{p}_b$ im Ursprung und $\mathbf{p}_a$ bei $\mathbf{r}_0$ bestimmen. Der Dipol $\mathbf{p}_a$ erzeugt das Potential

For example we can now determine the potential energy between two dipoles, $\mathbf{p}_b$ in the origin and $\mathbf{p}_a$ at $\mathbf{r}_0$. The dipole $\mathbf{p}_a$ generates the potential

$$\Phi_a(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}_a\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}. \tag{4.33}$$

Die Wechselwirkungsenergie ergibt sich dann zu (vgl. B.47)

Then the interaction energy yields (compare B.47)

$$U_{a,b} = \mathbf{p}_b\cdot\nabla\Phi_a|_{r=0} = \frac{\mathbf{p}_a\cdot\mathbf{p}_b}{r_0^3} - \frac{3(\mathbf{p}_a\cdot\mathbf{r}_0)(\mathbf{p}_b\cdot\mathbf{r}_0)}{r_0^5}. \tag{4.34}$$

Die Kraft auf einen Dipol im Ursprung ergibt sich zu

The force on the dipole in the origin is then given by

$$\mathbf{K} = \int d^3r\rho(\mathbf{r})\mathbf{E}_a(\mathbf{r}) = \int d^3r\rho(\mathbf{r})(\mathbf{E}_a(0) + x_\alpha\nabla_\alpha\mathbf{E}_a|_{r=0} + ...) = q\mathbf{E}_a(0) + (\mathbf{p}\cdot\ \mathrm{grad}\,)\mathbf{E}_a(0) + ... \tag{4.35}$$

Das Drehmoment auf einen Dipol im Ursprung ergibt sich zu

The torque on a dipole in the origin is given by

$$\mathbf{M}_{mech} = \int d^3r'\rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}'\times\mathbf{E}_a(\mathbf{r}') = \mathbf{p}\times\mathbf{E}_a(0) + ... \tag{4.36}$$

5 Multipol-Entwicklung in Kugelkoordinaten

5 Multipole Expansion in Spherical Coordinates

5.a Poisson-Gleichung in Kugelkoordinaten

Wir leiten zunächst den Ausdruck für den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

5.a Poisson Equation in Spherical Coordinates

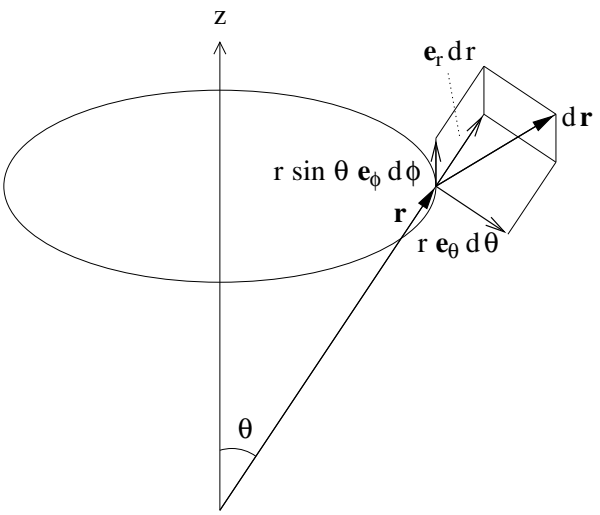
We first derive the expression for the Laplacian operator in spherical coordinates

$$x = r\sin\theta\cos\phi \tag{5.1}$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi \tag{5.2}$$

$$z = r\cos\theta \tag{5.3}$$

her. Dabei benützen wir zunächst nur, dass es sich dabei um krummlinige Koordinaten handelt, die sich unter rechtem Winkel schneiden, so dass wir



. Initially we use only that we deal with curvilinear coordinates which intersect at right angles, so that we may write

$$d\mathbf{r} = g_r\mathbf{e}_r dr + g_\theta\mathbf{e}_\theta d\theta + g_\phi\mathbf{e}_\phi d\phi \tag{5.4}$$

schreiben können, wobei die $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ und $\mathbf{e}_\phi$ eine orthonormierte ortsabhängige Basis bilden. Man findet leicht, dass

where the $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ and $\mathbf{e}_\phi$ constitute an orthonormal space dependent basis. Easily one finds

$$g_r = 1, \quad g_\theta = r, \quad g_\phi = r\sin\theta. \tag{5.5}$$

Das Volumenelement ist gegeben durch

The volume element is given by

$$d^3r = g_r dr g_\theta d\theta g_\phi d\phi = r^2 dr\sin\theta d\theta d\phi = r^2 dr d\Omega \tag{5.6}$$

mit dem Raumwinkelelement

with the element of the solid angle

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi. \tag{5.7}$$

5.a.α Der Gradient

Zur Berechnung des Gradienten betrachten wir das Differential einer Funktion $\Phi(\mathbf{r})$

5.a.α The Gradient

In order to determine the gradient we consider the differential of the function $\Phi(\mathbf{r})$

$$d\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\partial\Phi}{\partial r}dr + \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\Phi}{\partial\phi}d\phi, \tag{5.8}$$

die mit (grad Φ) · d**r** übereinstimmen muss. Aus der Entwicklung des Vektorfeldes in seine Komponenten

which coincides with (grad Φ) · d**r**. From the expansion of the vector field in its components

$$\text{grad}\,\Phi = (\text{grad}\,\Phi)_r \mathbf{e}_r + (\text{grad}\,\Phi)_\theta \mathbf{e}_\theta + (\text{grad}\,\Phi)_\phi \mathbf{e}_\phi \tag{5.9}$$

und (5.4) folgt dann

and (5.4) it follows that

$$\mathrm{d}\Phi(\mathbf{r}) = (\text{grad}\,\Phi)_r g_r \mathrm{d}r + (\text{grad}\,\Phi)_\theta g_\theta \mathrm{d}\theta + (\text{grad}\,\Phi)_\phi g_\phi \mathrm{d}\phi, \tag{5.10}$$

woraus wir

from which we obtain

$$(\text{grad}\,\Phi)_r = \frac{1}{g_r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad (\text{grad}\,\Phi)_\theta = \frac{1}{g_\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \quad (\text{grad}\,\Phi)_\phi = \frac{1}{g_\phi}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \tag{5.11}$$

für die Komponenten des Gradienten erhalten.

for the components of the gradient.

5.a.β Die Divergenz

Zur Berechnung der Divergenz verwenden wir den Gaussschen Satz (B.59). Wir integrieren die Divergenz von **A**(**r**) über ein Volumen begrenzt durch die Koordinaten $r, r+\Delta r, \theta, \theta+\Delta\theta, \phi, \phi+\Delta\phi$. Wir erhalten

5.a.β The Divergence

In order to calculate the divergence we use the divergence theorem (B.59). We integrate the divergence of **A**(**r**) in a volume limited by the coordinates $r, r+\Delta r$, $\theta, \theta+\Delta\theta, \phi, \phi+\Delta\phi$. We obtain

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^3 r\, \text{div}\,\mathbf{A} &= \int g_r g_\theta g_\phi\, \text{div}\,\mathbf{A}\, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
= \int \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{f} &= \int g_\theta \mathrm{d}\theta g_\phi \mathrm{d}\phi A_r\Big|_r^{r+\Delta r} + \int g_r \mathrm{d}r g_\phi \mathrm{d}\phi A_\theta\Big|_\theta^{\theta+\Delta\theta} + \int g_r \mathrm{d}r g_\theta \mathrm{d}\theta A_\phi\Big|_\phi^{\phi+\Delta\phi} \\
&= \int \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(g_\theta g_\phi A_r\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(g_r g_\phi A_\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(g_r g_\theta A_\phi\right)\right] \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Da die Identität für beliebig kleine Volumina zutrifft, müssen die Integranden auf der rechten Seite der ersten Zeile und auf der dritten Zeile übereinstimmen. Daraus folgt

Since the identity holds for arbitrarily small volumina the integrands on the right-hand side of the first line and on the third line have to agree which yields

$$\text{div}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{g_r g_\theta g_\phi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(g_\theta g_\phi A_r\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(g_r g_\phi A_\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(g_r g_\theta A_\phi\right)\right]. \tag{5.13}$$

5.a.γ Der Laplace-Operator

Durch Bildung von $\triangle\Phi = \text{div}\,\text{grad}\,\Phi$ erhalten wir schließlich

5.a.γ The Laplacian

Using $\triangle\Phi = \text{div}\,\text{grad}\,\Phi$ we obtain finally

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{g_r g_\theta g_\phi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{g_\theta g_\phi}{g_r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{g_r g_\phi}{g_\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{g_r g_\theta}{g_\phi}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right)\right]. \tag{5.14}$$

Diese Formel gilt noch generell für orthogonale krummlinige Koordinaten (wenn wir sie mit r, θ, ϕ bezeichnen). Setzen wir nun die Werte für g ein, so folgt für sphärische Koordinaten

This equation holds generally for curvilinear orthogonal coordinates (if we denote them by r, θ, ϕ). Substituting the values for g we obtain for spherical coordinates

$$\triangle\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2}\triangle_\Omega\Phi, \tag{5.15}$$

$$\triangle_\Omega\Phi = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}. \tag{5.16}$$

Der Operator $\triangle_\Omega$ wirkt nur auf die beiden Winkel θ und ϕ, aber nicht auf den Abstand r. Er wird auch Laplace-Operator auf der Kugel genannt.

The operator $\triangle_\Omega$ acts only on the two angels θ and ϕ, but not on the distance r. Therefore it is also called Laplacian on the sphere.

5.b Kugelflächenfunktionen

Wie wir im Anhang C näher ausführen, gibt es einen vollständigen Satz orthonormierter Funktionen $Y_{l,m}(\theta,\phi)$, $l = 0,1,2,...$, $m = -l,-l+1,...l$, die der Gleichung

$$\triangle_\Omega Y_{l,m}(\theta,\phi) = -l(l+1)Y_{l,m}(\theta,\phi) \tag{5.17}$$

genügen. Diese heißen Kugelflächenfunktionen. Vollständigkeit heißt: Ist $f(\theta,\phi)$ auf der Kugel differenzierbar und sind die Ableitungen beschränkt, so lässt sich $f(\theta,\phi)$ darstellen als konvergente Summe

$$f(\theta,\phi) = \sum_{l,m} \hat{f}_{l,m} Y_{l,m}(\theta,\phi). \tag{5.18}$$

Daher führen wir jetzt die entsprechende Entwicklung für $\Phi(\mathbf{r})$ und $\rho(\mathbf{r})$ durch

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \hat{\Phi}_{l,m}(r) Y_{l,m}(\theta,\phi), \tag{5.19}$$

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \hat{\rho}_{l,m}(r) Y_{l,m}(\theta,\phi). \tag{5.20}$$

Die Kugelflächenfunktionen sind orthonormal, das heißt, das Integral über den Raumwinkel ergibt

$$\int \mathrm{d}\Omega Y^*_{l,m}(\theta,\phi) Y_{l',m'}(\theta,\phi) = \int \mathrm{d}\phi \sin\theta \mathrm{d}\theta Y^*_{l,m}(\theta,\phi) Y_{l',m'}(\theta,\phi) = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'}. \tag{5.21}$$

Diese Orthogonalitätsbeziehung können wir zur Berechnung der $\hat{\Phi}$ und $\hat{\rho}$ verwenden

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}\phi \sin\theta \mathrm{d}\theta Y^*_{l,m}(\theta,\phi)\rho(\mathbf{r}) &= \sum_{l',m'} \hat{\rho}_{l',m'}(r) \int \mathrm{d}\phi \sin\theta \mathrm{d}\theta Y^*_{l,m}(\theta,\phi) Y_{l',m'}(\theta,\phi) \\ = \sum_{l',m'} \hat{\rho}_{l',m'}(r)\delta_{l,l'}\delta_{m,m'} &= \hat{\rho}_{l,m}(r). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Wir geben hier einige der Kugelflächenfunktionen an

$$Y_{0,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \tag{5.23}$$

$$Y_{1,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \tag{5.24}$$

$$Y_{1,\pm1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi} \tag{5.25}$$

$$Y_{2,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) \tag{5.26}$$

$$Y_{2,\pm1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi} \tag{5.27}$$

$$Y_{2,\pm2}(\theta,\phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}. \tag{5.28}$$

5.b Spherical Harmonics

As will be explained in more detail in appendix C there is a complete set of orthonormal functions $Y_{l,m}(\theta,\phi)$, $l = 0,1,2,...$, $m = -l,-l+1,...l$, which obey the equation

. They are called spherical harmonics. Completeness means: If $f(\theta,\phi)$ is differentiable on the sphere and its derivatives are bounded, then $f(\theta,\phi)$ can be represented as a convergent sum

Therefore we perform the corresponding expansion for $\Phi(\mathbf{r})$ and $\rho(\mathbf{r})$

The spherical harmonics are orthonormal, i.e. the integral over the solid angle yields

This orthogonality relation can be used for the calculation of $\hat{\Phi}$ and $\hat{\rho}$

We list some of the spherical harmonics

Allgemein ist

In general one has

$$Y_{l,m}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{5.29}$$

mit den zugeordneten LEGENDRE-Funktionen

with the associated LEGENDRE functions

$$P_l^m(\xi) = \frac{(-)^m}{2^l l!}(1-\xi^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}\xi^{l+m}}(\xi^2-1)^l. \tag{5.30}$$

Generell ist $Y_{l,m}$ das Produkt aus $(\sin\theta)^{|m|}e^{im\phi}$ und einem Polynom der Ordnung $l-|m|$ in $\cos\theta$. Je nachdem, ob $l-|m|$ gerade oder ungerade ist, handelt es sich dabei um ein gerades oder ungerades Polynom in $\cos\theta$. Es gilt die Symmetrie-Beziehung

Generally $Y_{l,m}$ is a product of $(\sin\theta)^{|m|}e^{im\phi}$ and a polynomial of order $l-|m|$ in $\cos\theta$. If $l-|m|$ is even (odd), then this polynomial is even (odd) in $\cos\theta$. There is the symmetry relation

$$Y_{l,-m}(\theta,\phi) = (-)^m Y_{l,m}^*(\theta,\phi). \tag{5.31}$$

5.c Radialgleichung und Multipol-Momente

5.c Radial Equation and Multipole Moments

Unter Verwendung der Entwicklung von Φ und ρ nach den Kugelflächenfunktionen lautet die POISSON-Gleichung nun

Using the expansion of Φ and ρ in spherical harmonics the POISSON equation reads

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l,m}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(r\hat{\Phi}_{l,m}(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2}\hat{\Phi}_{l,m}(r)\right)Y_{l,m}(\theta,\phi) = -4\pi\sum_{l,m}\hat{\rho}_{l,m}(r)Y_{l,m}(\theta,\phi). \tag{5.32}$$

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten von $Y_{l,m}$ erhalten wir die Radialgleichungen

Equating the coefficients of $Y_{l,m}$ we obtain the radial equations

$$\hat{\Phi}''_{l,m}(r) + \frac{2}{r}\hat{\Phi}'_{l,m}(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\hat{\Phi}_{l,m}(r) = -4\pi\hat{\rho}_{l,m}(r). \tag{5.33}$$

Die Lösung der homogenen Gleichung lautet

The solution of the homogeneous equation reads

$$\hat{\Phi}_{l,m}(r) = a_{l,m}r^l + b_{l,m}r^{-l-1}. \tag{5.34}$$

Für die inhomogene Gleichung macht man nun wie üblich den Ansatz (ich lasse im Moment die Indices l und m weg.)

For the inhomogeneous equation we introduce the conventional ansatz (at present I suppress the indices l and m.)

$$\hat{\Phi} = a(r)r^l + b(r)r^{-l-1}. \tag{5.35}$$

Dann folgt

Then one obtains

$$\hat{\Phi}' = a'(r)r^l + b'(r)r^{-l-1} + la(r)r^{l-1} - (l+1)b(r)r^{-l-2}. \tag{5.36}$$

Wir fordern nun wie üblich

As usual we require

$$a'(r)r^l + b'(r)r^{-l-1} = 0 \tag{5.37}$$

und erhalten dann für die zweite Ableitung

and obtain for the second derivative

$$\hat{\Phi}'' = la'(r)r^{l-1} - (l+1)b'(r)r^{-l-2} + l(l-1)a(r)r^{l-2} + (l+1)(l+2)b(r)r^{-l-3}. \tag{5.38}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Radialgleichung ein, so heben sich die Anteile, die a und b ohne Ableitung enthalten, weg. Es bleibt

After substitution into the radial equation the contributions which contain a and b without derivative cancel. We are left with

$$la'(r)r^{l-1} - (l+1)b'(r)r^{-l-2} = -4\pi\hat{\rho}, \tag{5.39}$$

Aus den Gleichungen (5.37) und (5.39) folgt dann durch Auflösen nach a' und b'

From the equations (5.37) and (5.39) one obtains by solving for a' and b'

$$\frac{\mathrm{d}a_{l,m}(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{4\pi}{2l+1} r^{1-l} \hat{\rho}_{l,m}(r), \tag{5.40}$$

$$\frac{\mathrm{d}b_{l,m}(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{4\pi}{2l+1} r^{l+2} \hat{\rho}_{l,m}(r). \tag{5.41}$$

Wir integrieren nun die Gleichungen

Now we integrate these equations

$$a_{l,m}(r) = \frac{4\pi}{2l+1} \int_r^\infty \mathrm{d}r' r'^{1-l} \hat{\rho}_{l,m}(r') \tag{5.42}$$

$$b_{l,m}(r) = \frac{4\pi}{2l+1} \int_0^r \mathrm{d}r' r'^{l+2} \hat{\rho}_{l,m}(r'). \tag{5.43}$$

Addieren wir eine Konstante zu $a_{l,m}(r)$, so ist dies auch eine Lösung der Poisson-Gleichung, da $r^l Y_{l,m}(\theta, \phi)$ homogene Lösung der Poisson-Gleichung ist. Wir wünschen aber eine Lösung, die für großes r abfällt. Daher wählen wir $a_{l,m}(\infty) = 0$. Addieren wir eine Konstante zu $b_{l,m}$, so ist das eine Lösung für $r \neq 0$. Für $r = 0$ hingegen erhält man eine Singularität, die die Poisson-Gleichung nicht erfüllt. Daher muss man $b_{l,m}(0) = 0$ setzen.

If we add a constant to $a_{l,m}(r)$, then this is a solution of the Poisson equation too, since $r^l Y_{l,m}(\theta, \phi)$ is a homogeneous solution of the Poisson equation. We request a solution, which decays for large r. Therefore we choose $a_{l,m}(\infty) = 0$. If we add a constant to $b_{l,m}$, then this is a solution for $r \neq 0$. For $r = 0$ however, one obtains a singularity, which does not fulfil the Poisson equation. Therefore $b_{l,m}(0) = 0$ is required.

Wir können nun die Entwicklungs-Koeffizienten $\hat{\rho}_{l,m}$ einsetzen und erhalten

We may now insert the expansion coefficients $\hat{\rho}_{l,m}$ and obtain

$$a_{l,m}(r) = \frac{4\pi}{2l+1} \int_{r'>r} \mathrm{d}^3 r' r'^{-1-l} Y^*_{l,m}(\theta', \phi') \rho(\mathbf{r}') \tag{5.44}$$

$$b_{l,m}(r) = \frac{4\pi}{2l+1} \int_{r'<r} \mathrm{d}^3 r' r'^{l} Y^*_{l,m}(\theta', \phi') \rho(\mathbf{r}'). \tag{5.45}$$

Wir können nun die Ausdrücke für $a_{l,m}$ und $b_{l,m}$ in (5.19) und (5.35) einsetzen. Die r- und r'-Abhängigkeit ergibt sich für $r < r'$ aus dem a-Term zu r^l/r'^{l+1} und für $r > r'$ aus dem b-Term zu r'^l/r^{l+1}. Dies fasst man zusammen, indem man mit $r_>$ den größeren, mit $r_<$ den kleineren der beiden Radien r und r' bezeichnet. Dann folgt

We may now insert the expressions for $a_{l,m}$ und $b_{l,m}$ into (5.19) and (5.35). The r- und r'-dependence is obtained for $r < r'$ from the a-term as r^l/r'^{l+1} and for $r > r'$ from the b-term as r'^l/r^{l+1}. This can be put together, if we denote by $r_>$ the larger, by $r_<$ the smaller of both radii r and r'. Then one has

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \rho(\mathbf{r}') Y^*_{l,m}(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi). \tag{5.46}$$

Ist $\rho(\mathbf{r}') = 0$ für $r' > R$, dann folgt für $r > R$

If $\rho(\mathbf{r}') = 0$ for $r' > R$, then one obtains for $r > R$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} q_{l,m} \frac{Y_{l,m}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} \tag{5.47}$$

mit den Multipolmomenten

with the multipole moments

$$q_{l,m} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \mathrm{d}^3 r' r'^l Y^*_{l,m}(\theta', \phi') \rho(\mathbf{r}'). \tag{5.48}$$

Für $l = 0$ erhalten wir das "Monopolmoment" Ladung, für $l = 1$ haben wir die Komponenten des Dipol-Moments, für $l = 2$ die Komponenten des Quadrupolmoments. Speziell für $m = 0$ hat man

For $l = 0$ one obtains the "monopole moment" charge, for $l = 1$ the components of the dipole moment, for $l = 2$ the components of the quadrupole moment. In particular for $m = 0$ one has

$$q_{0,0} = \sqrt{4\pi}\int \mathrm{d}^3r' \sqrt{\frac{1}{4\pi}}\rho(\mathbf{r}') = q \tag{5.49}$$

$$q_{1,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\int \mathrm{d}^3r' \sqrt{\frac{3}{4\pi}}r'\cos\theta'\rho(\mathbf{r}') = \int \mathrm{d}^3r' z'\rho(\mathbf{r}') = p_z \tag{5.50}$$

$$q_{2,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{5}}\int \mathrm{d}^3r' \sqrt{\frac{5}{4\pi}}r'^2(\frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2})\rho(\mathbf{r}') = \int \mathrm{d}^3r'(\frac{3}{2}z'^2 - \frac{1}{2}r'^2)\rho(\mathbf{r}') = \frac{3}{2}Q_{zz}. \tag{5.51}$$

5.d Punktladung am Ort r′, zylindersymmetrische Ladungsverteilung

Wir betrachten jetzt noch den Fall einer Punktladung q am Ort $\mathbf{r}'$. Wir können ausgehen von dem bekannten Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{q}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\psi}}. \tag{5.52}$$

Dabei ist ψ der Winkel zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$. Wir entwickeln nun nach $r_</r_>$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r_>\sqrt{1+(\frac{r_<}{r_>})^2 - 2\frac{r_<}{r_>}\cos\psi}} = q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\psi). \tag{5.53}$$

Dabei bezeichnet man $P_l(\xi)$ als LEGENDRE-Polynome. Für $\cos\psi = \pm 1$ sieht man sofort aus der Entwicklung von $1/(r_> \mp r_<)$, dass $P_l(1) = 1$ und $P_l(-1) = (-)^l$ gilt.

Wir können andererseits auch mit (5.46) arbeiten und finden

$$\Phi(\mathbf{r}) = q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{l,m}(\theta,\phi)Y^*_{l,m}(\theta',\phi'). \tag{5.54}$$

Durch Vergleich findet man das Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen

$$P_l(\cos\psi) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{l,m}(\theta,\phi)Y^*_{l,m}(\theta',\phi'), \tag{5.55}$$

wobei sich der Winkel ψ zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ ausdrücken lässt durch $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' = rr'\cos\psi$ und unter Verwendung von (5.1-5.3)

$$\cos\psi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi'). \tag{5.56}$$

Wir betrachten jetzt noch den Spezialfall $\theta' = 0$, das heißt $\psi = \theta$. Dann verschwinden alle $Y_{l,m}(\theta',\phi')$ wegen der Faktoren $\sin\theta'$ außer denen für $m = 0$ und das Additions-Theorem reduziert sich auf

$$P_l(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2l+1}Y_{l,0}(\theta)Y_{l,0}(0) = P_l^0(\cos\theta)P_l^0(1). \tag{5.57}$$

Aus der Darstellung (5.30) $P_l^0(\xi) = 1/(2^l l!)\mathrm{d}^l(\xi^2-1)^l/\mathrm{d}\xi^l$ folgt für $\xi = 1$ und Zerlegen $(\xi^2-1)^l = (\xi+1)^l(\xi-1)^l$ das Ergebnis $P_l^0(1) = [(\xi+1)^l/2^l]_{\xi=1}[\mathrm{d}^l(\xi-1)^l/\mathrm{d}\xi^l/l!]_{\xi=1} = 1$. Damit haben wir gefunden, dass

$$P_l^0(\xi) = P_l(\xi) \tag{5.58}$$

5.d Point Charge at r′, Cylindric Charge Distribution

Finally we consider the case of a point charge q located at $\mathbf{r}'$. We start from the potential

Here ψ is the angle between $\mathbf{r}$ and $\mathbf{r}'$. We expand in $r_</r_>$

The $P_l(\xi)$ are called LEGENDRE polynomials. For $\cos\psi = \pm 1$ one sees immediately from the expansion of $1/(r_> \mp r_<)$, that $P_l(1) = 1$ and $P_l(-1) = (-)^l$ hold.

On the other hand we may work with (5.46) and find

By comparison we obtain the addition theorem for spherical harmonics

where the angle ψ between $\mathbf{r}$ and $\mathbf{r}'$ can be expressed by $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' = rr'\cos\psi$ and by use of (5.1-5.3)

We consider now the special case $\theta' = 0$, i.e. $\psi = \theta$. Then all $Y_{l,m}(\theta',\phi')$ vanish because of the factors $\sin\theta'$ with the exception of the term for $m = 0$ and the addition theorem is reduced to

From the representation (5.30) $P_l^0(\xi) = 1/(2^l l!)\mathrm{d}^l(\xi^2-1)^l/\mathrm{d}\xi^l$ one obtains for $\xi = 1$ and the decomposition $(\xi^2-1)^l = (\xi+1)^l(\xi-1)^l$ the result $P_l^0(1) = [(\xi+1)^l/2^l]_{\xi=1}[\mathrm{d}^l(\xi-1)^l/\mathrm{d}\xi^l/l!]_{\xi=1} = 1$. Thus we have

gilt.

.

Speziell für zylindersymmetrische Verteilungen $\rho(\mathbf{r})$, die also nur von r und θ, aber nicht von ϕ abhängen, gilt dann

In particular for a cylinder symmetric charge distribution $\rho(\mathbf{r})$, which therefore depends only on r and θ, but not on ϕ, one has

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_l \frac{P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}} q_{l,0} \tag{5.59}$$

mit den Momenten

with the moments

$$q_{l,0} = \int \mathrm{d}^3 r' r'^l P_l(\cos\theta')\rho(\mathbf{r}'). \tag{5.60}$$

Alle Momente mit $m \neq 0$ verschwinden für die zylindersymmetrische Verteilung.

All moments with $m \neq 0$ vanish for a cylinder symmetric distribution.

Aufgabe Berechnen Sie aus (5.1) bis (5.5) die Vektoren $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ und $\mathbf{e}_\phi$ und prüfen Sie nach, dass diese ein Orthonormalsystem bilden.

Exercise Calculate the vectors $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ and $\mathbf{e}_\phi$ from (5.1) to (5.5) and check that they constitute an orthonormal basis.

Aufgabe Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes (B.56) die Rotation in Kugelkoordinaten.

Exercise Calculate by means of Stokes' theorem (B.56) the curl in spherical coordinates.

Aufgabe Berechnen Sie für Zylinderkoordinaten $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$ und z die metrischen Faktoren g_ρ, g_ϕ und g_z, das Volumenelement und Gradient und Divergenz.

Exercise Calculate for cylindric coordinates $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$ and z the metric factors g_ρ, g_ϕ and g_z, the volume element and gradient and divergence.

6 Elektrisches Feld in Materie

6.a Polarisation und dielektrische Verschiebung

Die bisher aufgestellten Feldgleichungen gelten auch in Materie. Auf ein äußeres elektrisches Feld reagiert die Materie im allgemeinen durch Polarisation. Die Elektronen verschieben sich gegenüber den Kernen, wodurch Dipole entstehen, oder bereits existierende Dipole von Molekülen oder Molekülgruppen richten sich gegen die thermische Bewegung aus. Ein elektrisches Feld bewirkt also die Verschiebung von Ladungen q_i vom Ort $\mathbf{r}_i$ zum Ort $\mathbf{r}_i + \mathbf{a}_i$, das heißt Dipole $\mathbf{p}_i = q_i\mathbf{a}_i$ werden induziert. Man erhält die Ladungsverteilung der Polarisationsladungen (4.22)

$$\rho_{\mathrm{P}}(\mathbf{r}) = -\sum_i \mathbf{p}_i \cdot \operatorname{grad}\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i). \tag{6.1}$$

Führen wir eine Dipolmomentdichte $\mathbf{P}$ ein, die man als Polarisation bezeichnet,

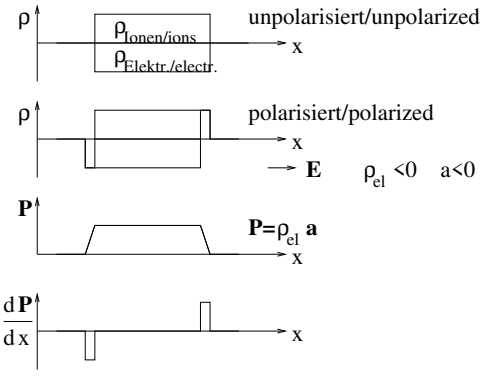
$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V}, \tag{6.2}$$

wobei $\sum \mathbf{p}_i$ die Summe der Dipolmomente in einem infinitesimalen Volumen ΔV ist, so folgt

$$\rho_{\mathrm{P}}(\mathbf{r}) = -\int \mathrm{d}^3r'\mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot\operatorname{grad}\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\operatorname{div}\left(\int \mathrm{d}^3r'\mathbf{P}(\mathbf{r}')\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right) = -\operatorname{div}\mathbf{P}(\mathbf{r}). \tag{6.3}$$

Wir veranschaulichen diese Gleichung. Wir gehen aus von einem Festkörper, in dem sich (auf einer Skala groß gegen den Atomabstand) die Ladungen der Ionen und Elektronen kompensieren (oberste Figur).

Legt man ein Feld $\mathbf{E}$ an, so verschieben sich die Elektronen gegenüber den Ionen (zweite Figur). Im Inneren hat man Ladungskompensation. Nur am Rand bleiben Netto-Ladungen übrig. Im dritten Bild ist die Polarisation $\mathbf{P} = \rho_{\mathrm{el}}\mathbf{a}$ aufgezeichnet, wobei diese am Rand stetig ausgeschmiert wurde.



Im letzten Bild ist die Ableitung $-\mathrm{d}\mathbf{P}/\mathrm{d}x$ aufgetragen. Man sieht, dass diese mit der des zweiten Bilds übereinstimmt.

6 Electric Field in Matter

6.a Polarization and Dielectric Displacement

The field equations given by now are also valid in matter. In general matter reacts in an external electric field by polarization. The electrons move with respect to the positively charged nuclei, thus generating dipoles, or already existing dipoles of molecules or groups of molecules order against thermal disorder. Thus an electric field displaces the charges q_i from $\mathbf{r}_i$ to $\mathbf{r}_i + \mathbf{a}_i$, i.e. dipoles $\mathbf{p}_i = q_i\mathbf{a}_i$ are induced. One obtains the charge distribution of the polarization charges (4.22)

Introducing a density of dipole moments $\mathbf{P}$ called polarization

where $\sum \mathbf{p}_i$ is the sum of the dipole moments in an infinitesimal volume ΔV, one obtains

Let us visualize this equation. We start out from a solid body, in which the charges of the ions and electrons (on a scale large in comparison to the distance between the atoms) compensate (upper figure).

If one applies a field $\mathbf{E}$ then the electrons move against the ions (second figure). Inside the bulk the charges compensate. Only at the boundaries a net-charge is left. In the third figure the polarization $\mathbf{P} = \rho_{\mathrm{el}}\mathbf{a}$ is shown, which has been continuously smeared at the boundary.

The last figure shows the derivative $-\mathrm{d}\mathbf{P}/\mathrm{d}x$. One sees that this charge distribution agrees with that in the second figure.

Damit setzt sich die Ladungsdichte ρ zusammen aus einer freibeweglichen Ladungsdichte ρ_f und der Polarisations-Ladungsdichte ρ_P (erstere kann zum Beispiel die Ladungsdichte sein, die auf eine Kondensatorplatte aufgebracht wird)

Thus the charge density ρ consists of the freely moving charge density ρ_f and the charge density of the polarization ρ_P (the first one may be the charge density on the plates of a condensator)

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + \rho_\mathrm{P}(\mathbf{r}) = \rho_\mathrm{f}(\mathbf{r}) - \operatorname{div}\mathbf{P}(\mathbf{r}). \tag{6.4}$$

Damit führt man in der Maxwellgleichung

Thus one introduces in Maxwell's equation

$$\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}) = 4\pi\rho_\mathrm{f}(\mathbf{r}) - 4\pi \operatorname{div}\mathbf{P}(\mathbf{r}) \tag{6.5}$$

die dielektrische Verschiebung $\mathbf{D}$ ein

the dielectric displacement $\mathbf{D}$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + 4\pi\mathbf{P}(\mathbf{r}), \tag{6.6}$$

so dass

so that

$$\operatorname{div}\mathbf{D}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho_\mathrm{f}(\mathbf{r}) \tag{6.7}$$

gilt. Für den Fluss der dielektrischen Verschiebung durch die Oberfläche eines Volumens erhält man dann die freibewegliche Ladung $q_\mathrm{f}(V)$ in diesem Volumen

holds. The flux of the dielectric displacement through the surface of a volume yields the free charge q_f inside this volume

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = 4\pi q_\mathrm{f}(V). \tag{6.8}$$

Für viele Substanzen sind bei nicht zu großer Feldstärke $\mathbf{P}$ und $\mathbf{E}$ in guter Näherung proportional

For many substances $\mathbf{P}$ and $\mathbf{E}$ are within good approximation proportional as long as the field intensity $\mathbf{E}$ is not too large

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \chi_\mathrm{e}\mathbf{E}(\mathbf{r}) \qquad \chi_\mathrm{e} \begin{matrix}\text{elektrische Suszeptibilität}\\ \text{electric susceptibility}\end{matrix} \tag{6.9}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}) \qquad \epsilon \begin{matrix}\text{(relative) Dielektrizitätskonstante}\\ \text{relative dielectric constant}\end{matrix} \tag{6.10}$$

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_\mathrm{e}. \tag{6.11}$$

χ_e und ϵ sind Tensoren für anisotrope Materialien, sonst Skalare. Bei Ferroelektrika ist $\mathbf{P}$ bereits für $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ von $\mathbf{0}$ verschieden. Allerdings ist die Polarisationsladung meist durch Oberflächenladungen kompensiert. Doch wird sie offensichtlich, wenn die Polarisation durch äußere Änderungen verändert wird, zum Beispiel durch Druck beim Quarz (Piezoelektrizität) oder Temperaturveränderung.

χ_e and ϵ are tensors for anisotropic matter, otherwise scalars. For ferroelectrica $\mathbf{P}$ is different from $\mathbf{0}$ already for $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. However, in most cases it is compensated by surface charges. But it is observed, when the polarization is varied by external changes like pressure in the case of quartz (piezo-electricity) or under change of temperature.

Im Gaussschen System sind die Dimensionen von $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ und $\mathbf{P}$ übereinstimmend $\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}$. Im SI-System wird aber $\mathbf{E}$ in V/m, $\mathbf{D}$ und $\mathbf{P}$ in $\mathrm{As/m}^2$ gemessen. Da das SI-System ein rationales Maßsystem ist, das Gausssche ein irrationales, unterscheiden sich die Umrechnungsfaktor für $\mathbf{D}$ und $\mathbf{P}$ um 4π.
Dementsprechend unterscheiden sich auch die χ_e in beiden Systemen um einen Faktor 4π. Dagegen sind die relativen Dielektrizitätskonstanten ϵ identisch. Genaueres findet sich im Anhang A.

In Gaussian units the dimensions of $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ und $\mathbf{P}$ agree to $\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}$. In the SI-system $\mathbf{E}$ is measured in V/m, $\mathbf{D}$ and $\mathbf{P}$ in $\mathrm{As/m}^2$. Since the SI-system is a rational system of units, the Gaussian an irrational one, the conversion factors for $\mathbf{D}$ and $\mathbf{P}$ differ by a factor 4π.
Consequently the χ_e differ in both systems by a factor 4π. However, the relative dielectric constants ϵ are identical. For more details see appendix A.

6.b Grenzflächen zwischen Dielektrika

Wir betrachten nun die Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika oder Dielektrikum und Vakuum. Aus der MAXWELLgleichung $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}$ folgt, dass die Komponenten des elektrischen Feldes tangential zur Grenzfläche in beiden Dielektrika übereinstimmen

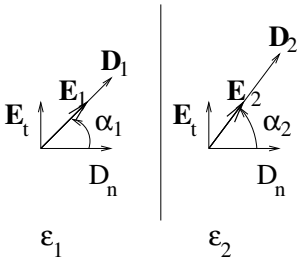
$$\mathbf{E}_{1,\mathrm{t}} = \mathbf{E}_{2,\mathrm{t}}. \tag{6.12}$$

Um dies zu sehen, muss man nur ein Linienintegral $\oint \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$, das parallel zur Grenzfläche in einem Dielektrikum hin, im anderen zurückführt, ausführen und in das Flächenintegral $\int \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ überführen. Man sieht dann, dass das Linienintegral verschwindet. Sind die Integrationswege in den beiden Dielektrika infinitesimal benachbart, so folgt, da das für beliebige Wege gilt, dass $\mathbf{E}_\mathrm{t}$ in beiden Dielektrika übereinstimmen muss.

Andererseits können wir ein "GAUSSsche Dose" einführen, deren Deckfläche infinitesimal von der Grenzfläche entfernt in einem Dielektrikum und deren Grundfläche ebenfalls infinitesimal von der Grenzfläche im anderen Dielektrikum verläuft. Sind auf der Grenzfläche keine freibeweglichen Ladungen, so gilt $\int_V \mathrm{d}^3 r\,\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 0$, was dazu führt, dass man auf der Oberfläche $\int \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{D} = 0$ hat. Rückt man die Oberfläche nun an die Grenzfläche heran, so folgt die Stetigkeit der Normalkomponenten von $\mathbf{D}$

$$D_{1,\mathrm{n}} = D_{2,\mathrm{n}}. \tag{6.13}$$

Schließt das elektrische Feld (in isotropen Dielektrika) mit der Flächennormalen die Winkel α_1 und α_2 ein, so gilt



$$E_1 \sin\alpha_1 = E_2 \sin\alpha_2 \tag{6.14}$$

$$D_1 \cos\alpha_1 = D_2 \cos\alpha_2 \tag{6.15}$$

$$\frac{\tan\alpha_1}{\epsilon_1} = \frac{\tan\alpha_2}{\epsilon_2}. \tag{6.16}$$

6.b Boundaries between Dielectric Media

We now consider the boundary between two dielectric media or a dielectric material and vacuum. From MAXWELL's equation $\mathrm{curl}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}$ it follows that the components of the electric field parallel to the boundary coincides in both dielectric media

In order to see this one considers the line integral $\oint \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$ along the closed contour which runs tangential to the boundary in one dielectric and returns in the other one, and transforms it into the integral $\int \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathrm{curl}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ over the enclosed area. One sees that the integral over the contour vanishes. If the paths of integration in both dielectrica are infinitesimally close to each other, then $\mathbf{E}_\mathrm{t}$ vanishes, since the integral over the contour vanishes for arbitrary paths.

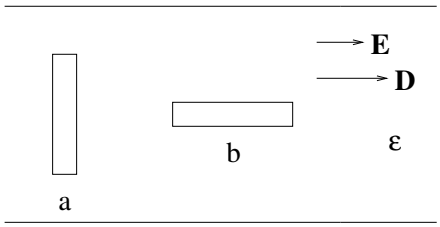
On the other hand we may introduce a "pill box" whose covering surface is in one medium, the basal surface in the other one, both infinitesimally separated from the boundary. If there are no free charges at the boundary, then $\int_V \mathrm{d}^3 r\,\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 0$, so that the integral $\int \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{D} = 0$ over the surface vanishes. If the surface approaches the boundary, then it follows that the normal component of $\mathbf{D}$ is continuous

If the angle between the electric field (in an isotropic medium) and the normal to the boundary are α_1 and α_2 then one has

Wir betrachten jetzt einen Hohlraum im Dielektrikum. Ist der Hohlraum sehr dünn in Richtung des Feldes (a) und in beiden dazu senkrechten Richtungen vergleichsweise sehr ausgedehnt, dann stimmt die dielektrische Verschiebung **D** im Hohlraum und im Dielektrikum überein.

We now consider a cavity in a dielectric medium. If the cavity is very thin in the direction of the field (a) and large in perpendicular direction like a pill box then the displacement **D** agrees in the medium and the cavity.

Handelt es sich dabei um einen sehr langgestreckten Hohlraum in Richtung des Feldes (b), so muss der Abfall des Potentials in dieser langgestreckten Richtung übereinstimmen, so dass im Inneren und im Äußeren des Hohlraums das elektrische Feld **E** übereinstimmt.



If on the other hand the cavity has the shape of a slot very long in the direction of the field (b), then the variation of the potential along this direction has to agree, so that inside and outside the cavity **E** coincides.

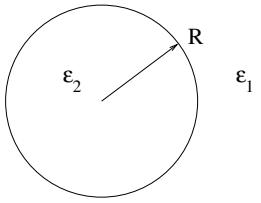
Daneben treten vor allem an den Rändern auch Streufelder auf. Es ist für Ellipsoide möglich, das Feld im Innern eines Hohlraums exakt zu berechnen. Siehe zum Beispiel im Buch von Becker und Sauter. Das Feld im Inneren des Ellipsoids ist homogen. Für die Kugel führen wir die Berechnung anschließend durch.

At the edges of the cavities will be scattered fields. It is possible to calculate the field exactly for ellipsoidal cavities. See for example the book by Becker and Sauter. The field is homogeneous inside the ellipsoid. The calculation for a sphere is given below.

6.c Dielektrische Kugel im homogenen elektrischen Feld

6.c Dielectric Sphere in a Homogeneous Electric Field

Wir betrachten eine dielektrische Kugel mit Radius R und Dielektrizitätskonstante ϵ_2, die in ein anderes Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante ϵ_1 eingebettet ist. Im Dielektrikum 1 herrsche in sehr großer Entfernung ein homogenes Feld



We consider a dielectric sphere with radius R and dielectric constant ϵ_2 inside a medium with dielectric constant ϵ_1. The electric field in the medium 1 be homogeneous at large distances

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1 = E_1 \mathbf{e}_z \quad r \gg R. \tag{6.17}$$

Daraus folgt das Potential

Thus one obtains for the potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{r} = -E_1 r \cos\theta \quad r \gg R. \tag{6.18}$$

Da $\cos\theta$ das Legendre-Polynom $P_1(\cos\theta)$ ist, führt der Ansatz

Since $\cos\theta$ is the Legendre polynomial $P_1(\cos\theta)$, the ansatz

$$\Phi(\mathbf{r}) = f(r)\cos\theta \tag{6.19}$$

zum Erfolg. Die Lösung der homogenen Poisson-Gleichung $\triangle(f(r)\cos\theta) = 0$ ist eine Linearkombination (5.34) aus $f(r) = r$ (homogenes Feld) und $f(r) = 1/r^2$ (Dipolfeld). Da am Ursprung kein makroskopischer Dipol sitzt, können wir ansetzen

is successful. The solution of the homogeneous Poisson equation $\triangle(f(r)\cos\theta) = 0$ is a linear combination (5.34) of $f(r) = r$ (homogeneous field) and $f(r) = 1/r^2$ (dipolar field). Since there is no dipole at the origin we may assume

$$\Phi(\mathbf{r}) = \cos\theta \cdot \begin{cases} -E_2 r & r \le R \\ -E_1 r + p/r^2 & r \ge R \end{cases} . \tag{6.20}$$

An der Grenzfläche gilt $\Phi(R+0) = \Phi(R-0)$, was identisch ist mit $\mathbf{E}_{1,\mathrm{t}} = \mathbf{E}_{2,\mathrm{t}}$ und auf

At the boundary one has $\Phi(R+0) = \phi(R-0)$, which is identical to $\mathbf{E}_{1,\mathrm{t}} = \mathbf{E}_{2,\mathrm{t}}$ and leads to

$$-E_1 R + \frac{p}{R^2} = -E_2 R \tag{6.21}$$

führt. Die Bedingung $D_{1,\mathrm{n}} = D_{2,\mathrm{n}}$ führt mit $D_\mathrm{n} = -\epsilon\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ auf

. The condition $D_{1,\mathrm{n}} = D_{2,\mathrm{n}}$ together with $D_\mathrm{n} = -\epsilon\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ yields

$$\epsilon_1(E_1 + \frac{2p}{R^3}) = \epsilon_2 E_2. \tag{6.22}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man

From these two equations one obtains

$$E_2 = \frac{3\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} E_1 \tag{6.23}$$

$$p = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} R^3 E_1. \tag{6.24}$$

Speziell für die dielektrische Kugel ($\epsilon_2 = \epsilon$) im Vakuum ($\epsilon_1 = 1$) folgt

. One obtains in particular for the dielectric sphere ($\epsilon_2 = \epsilon$) in the vacuum ($\epsilon_1 = 1$)

$$E_2 = \frac{3}{2+\epsilon} E_1, \quad p = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} R^3 E_1. \tag{6.25}$$

Die Polarisation im Inneren der Kugel bewirkt eine Veränderung des mittleren elektrischen Felds um

The polarization inside the sphere changes the average field by

$$\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \frac{1-\epsilon}{2+\epsilon} E_1 \mathbf{e}_z = -\frac{4\pi}{3}\mathbf{P}. \tag{6.26}$$

Für eine Hohlkugel ($\epsilon_2 = 1$) im Dielektrikum ($\epsilon_1 = \epsilon$) erhält man dagegen

However, for a spherical cavity ($\epsilon_2 = 1$) in a dielectric medium ($\epsilon_1 = \epsilon$) one obtains

$$E_2 = \frac{3\epsilon}{1+2\epsilon} E_1. \tag{6.27}$$

6.d Dielektrizitätskonstante nach Clausius und Mossotti

6.d Dielectric Constant according to Clausius and Mossotti

Clausius und Mossotti leiten die Dielektrizitätskonstante aus der Polarisierbarkeit α der Moleküle (Atome) wie folgt her: Im Feld $\mathbf{E}_\mathrm{eff}$ ist das mittlere Dipolmoment

Clausius and Mossotti derive the dielectric constant from the polarizability α of molecules (atoms) as follows: The average dipole moment in the field $\mathbf{E}_\mathrm{eff}$ is

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_\mathrm{eff}. \tag{6.28}$$

Bei einer Dichte der Dipole (Atome) n ergibt sich die Polarisation

The density n of the dipoles (atoms) yields the polarization

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p} = n\alpha \mathbf{E}_\mathrm{eff}. \tag{6.29}$$

Wir müssen daher das effektive Feld $\mathbf{E}_\mathrm{eff}$ bestimmen, das auf den Dipol wirkt.

Therefore we have to determine the effective field $\mathbf{E}_\mathrm{eff}$, which acts on the dipole.

Dazu schneiden wir eine Kugel vom Radius R aus der Materie um den Dipol heraus. Diese Dipole erzeugen, wie wir am Beispiel der dielektrischen Kugel im Vakuum aus (6.26) sehen, ein mittleres Feld

For this purpose we cut a sphere of radius R out of the matter around the dipole. These dipoles generate, as we have seen in the example of the dielectric sphere in the vacuum (6.26) an average field

$$\bar{\mathbf{E}}_\mathrm{P} = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = -\frac{4\pi}{3}\mathbf{P}. \tag{6.30}$$

Dieses Feld fehlt nach dem Herausschneiden der Kugel. Dafür ist das schnell veränderliche Feld der einzelnen Dipole innerhalb der Kugel zu addieren (mit Ausnahme des Dipols, an dessen Stelle das Feld bestimmt werden soll)

This field is missing after we have cut out the sphere. Instead the rapidly varying field of the dipoles inside the sphere has to be added (with the exception of the field of the dipole at the location, where the field has to be determined)

$$\mathbf{E}_{\text{eff}} = \mathbf{E} - \bar{\mathbf{E}}_{\text{P}} + \sum_i \frac{-\mathbf{p}_i r_i^2 + 3(\mathbf{p}_i \mathbf{r}_i)\mathbf{r}_i}{r_i^5}. \tag{6.31}$$

Die Summe hängt von der Anordnung der Dipole (Kristallstruktur) ab. Falls die Dipole auf einem kubischen Gitter sitzen, verschwindet die Summe, denn die Beiträge aus

The sum depends on the location of the dipoles (crystal structure). If the dipoles are located on a cubic lattice, then the sum vanishes, since the contributions from

$$\sum_{\alpha,\beta} \mathbf{e}_\alpha p_\beta \sum_i \frac{-\delta_{\alpha,\beta} r_i^2 + 3 x_{i,\alpha} x_{i,\beta}}{r_i^5} \tag{6.32}$$

heben sich für $\alpha \neq \beta$ weg, wenn man die Beiträge jeweils für x_α und $-x_\alpha$ zusammenfasst, die für $\alpha = \beta$, wenn man die drei Beiträge, die man durch zyklisches Permutieren der drei Komponenten erhält, zusammenfasst. Damit bleibt für ein kubisches Gitter

cancel for $\alpha \neq \beta$, if one adds the contributions for x_α and $-x_\alpha$, those for $\alpha = \beta$, if one adds the three contributions obtained by cyclic permutation of the three components. Thus one obtains for the cubic lattice

$$\chi_{\text{e}} \mathbf{E} = \mathbf{P} = n\alpha \mathbf{E}_{\text{eff}} = n\alpha(\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P}) = n\alpha(1 + \frac{4\pi}{3}\chi_{\text{e}})\mathbf{E}, \tag{6.33}$$

woraus die Beziehung von Clausius (1850) und Mossotti (1879)

from which the relation of Clausius (1850) and Mossotti (1879)

$$\chi_{\text{e}} = \frac{n\alpha}{1 - \frac{4\pi n\alpha}{3}} \text{ oder or } \frac{4\pi}{3} n\alpha = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \tag{6.34}$$

folgt.

follows.

7 Elektrizität auf Leitern

7.a Elektrische Leiter

Innerhalb eines Leiters ist das elektrische Feld $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, da ein von Null verschiedenes Feld sofort die Ladungen verschieben würde. Das Potential ist daher in jedem Leiter konstant. Für den Leiter #i gilt daher $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_i$.

Außerhalb der Leiter ist der Potentialverlauf durch die Poisson-Gleichung gegeben

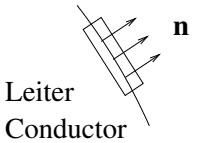
$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}) \overset{\text{oder}}{\underset{\text{or}}{}} \operatorname{div}(\epsilon(\mathbf{r})\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r})) = -4\pi\rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}). \tag{7.1}$$

7.a.α Randbedingungen an der Leiteroberfläche

An der Leiteroberfläche hat man ein konstantes Potential (auch auf der Seite des Dielektrikums). Daher verschwinden die Komponenten von $\mathbf{E}$ tangential zur Oberfläche

$$\mathbf{E}_{\mathrm{t}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \tag{7.2}$$

Auf der Leiteroberfläche befinden sich in der Regel Influenzladungen. Wir bezeichnen die Oberflächenladungsdichte mit $\sigma(\mathbf{r})$.



Bei Integration über ein Stück der Oberfläche folgt dann

$$\int \mathrm{d}\mathbf{f}\cdot\mathbf{E}_{\mathrm{a}}(\mathbf{r}) = 4\pi q = 4\pi\int \mathrm{d}f\,\sigma(\mathbf{r}). \tag{7.3}$$

Daher gilt für die Feldstärke $\mathbf{E}_{\mathrm{a}}$ an der Oberfläche im Außenraum

$$\mathbf{E}_{\mathrm{a}}(\mathbf{r}) = 4\pi\sigma(\mathbf{r})\mathbf{n}, \quad -\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 4\pi\sigma(\mathbf{r}). \tag{7.4}$$

Im allgemeinen wird sich die Ladungsdichte σ an der Oberfläche zusammensetzen aus der freibeweglichen σ_{f} auf der Leiteroberfläche und der Polarisationsladungsdichte σ_{P} auf dem Dielektrikum $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}) + \sigma_{\mathrm{P}}(\mathbf{r})$ mit

$$\mathbf{D}_{\mathrm{a}}(\mathbf{r}) = 4\pi\sigma_{\mathrm{f}}(\mathbf{r})\mathbf{n}, \tag{7.5}$$

woraus dann mit $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$

$$\sigma_{\mathrm{f}} = \epsilon(\sigma_{\mathrm{f}} + \sigma_{\mathrm{P}}), \quad \sigma_{\mathrm{P}} = (\frac{1}{\epsilon} - 1)\sigma_{\mathrm{f}} \tag{7.6}$$

7 Electricity on Conductors

7.a Electric Conductors

The electric field vanishes within a conductor, $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, since a nonvanishing field would move the charges. Thus the potential within a conductor is constant. For the conductor #i one has $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_i$.

Outside the conductor the potential is given by Poisson's equation

7.a.α Boundary Conditions at the Surface of the Conductor

On the surface of the conductor one has a constant potential (on the side of the dielectric medium, too). Thus the components of $\mathbf{E}$ tangential to the surface vanish

In general there are charges at the surface of the conductor. We denote its density by $\sigma(\mathbf{r})$.

Integration over a small piece of the surface yields

Therefore the field $\mathbf{E}_{\mathrm{a}}$ obeys at the surface in the outside region

In general the charge density σ at the surface consists of the free charge density σ_{f} at the surface of the conductor and the polarization charge density σ_{P} on the dielectric medium $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}) + \sigma_{\mathrm{P}}(\mathbf{r})$ with

from which one obtains

folgt. .

7.a.β Kraft auf Leiter (im Vakuum)

Zunächst könnte man vermuten, die Kraft sei gegeben durch $\int \mathrm{d}f \mathbf{E}_\mathrm{a}\sigma(\mathbf{r})$. Dies ist aber falsch. Denn genau so könnte man argumentieren, man müsse das Feld im Leiter $\mathbf{E}_\mathrm{i} = \mathbf{0}$ einsetzen. Die Wahrheit liegt in der Mitte. Dies erkennt man, wenn man davon ausgeht, dass die Ladung nicht exakt auf der Oberfläche sitzt, sondern über eine Schichtdicke l verschmiert ist. Nehmen wir an innerhalb einer Schicht der Dicke a befindet sich die Ladung $s(a)\sigma(\mathbf{r})\mathrm{d}f$ mit $s(0) = 0$ und $s(l) = 1$, dann wirkt in der Tiefe a die Feldstärke $\mathbf{E}_\mathrm{i}(\mathbf{r} - a\mathbf{n}) = (1 - s(a))\mathbf{E}_\mathrm{a}(\mathbf{r})$, da der Bruchteil $s(a)$ bereits abgeschirmt ist. Mit $\rho(\mathbf{r} - a\mathbf{n}) = s'(a)\sigma(\mathbf{r})$ folgt dann

7.a.β Force acting on the Conductor (in Vacuo)

Initially one might guess that the force on the conductor is given by $\int \mathrm{d}f \mathbf{E}_\mathrm{a}\sigma(\mathbf{r})$. This, however, is wrong. By the same token one could argue that one has to insert the field inside the conductor $\mathbf{E}_\mathrm{i} = \mathbf{0}$ into the integral. The truth lies halfway. This becomes clear, if one assumes that the charge is not exactly at the surface but smeared out over a layer of thickness l. If we assume that inside a layer of thickness a one has the charge $s(a)\sigma(\mathbf{r})\mathrm{d}f$ with $s(0) = 0$ and $s(l) = 1$, then the field acting at depth a is $\mathbf{E}_\mathrm{i}(\mathbf{r} - a\mathbf{n}) = (1 - s(a))\mathbf{E}_\mathrm{a}(\mathbf{r})$, since the fraction $s(a)$ is already screened. With $\rho(\mathbf{r} - a\mathbf{n}) = s'(a)\sigma(\mathbf{r})$ one obtains

$$\mathbf{K} = \int \mathrm{d}f\, \mathrm{d}a\rho(\mathbf{r} - a\mathbf{n})\mathbf{E}(\mathbf{r} - a\mathbf{n}) = \int \mathrm{d}f\sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}_\mathrm{a}(\mathbf{r}) \int_0^l \mathrm{d}a s'(a)(1 - s(a)). \tag{7.7}$$

Das Integral über a ergibt $(s(a) - s^2(a)/2)|_0^l = 1/2$, so dass wir schließlich die Kraft

The integral over a yields $(s(a) - s^2(a)/2)|_0^l = 1/2$, so that finally we obtain the force

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}f\sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}_\mathrm{a}(\mathbf{r}) \tag{7.8}$$

erhalten. .

7.b Kapazitäten

Wir betrachten jetzt mehrere Leiter eingebettet in das Vakuum oder in Dielektrika. Außerhalb der Leiter seien keine freibeweglichen Ladungsdichten, $\rho_\mathrm{f} = 0$. Die elektrischen Potentiale Φ_i der Leiter #i seien vorgegeben. Gesucht sind die freibeweglichen Ladungen q_i auf den Leitern. Da die Maxwell-Gleichungen linear sind (und wir annehmen, dass lineare Beziehungen $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ bestehen), können wir das Potential als Superposition von Lösungen Ψ_i schreiben

7.b Capacities

We now consider several conductors imbedded in the vacuum or in dielectric media. Outside the conductors there should be no free moving charge densities, $\rho_\mathrm{f} = 0$. The electric potentials Φ_i of the conductors #i should be given. We look for the free charges q_i at the conductors. Since Maxwell's equations are linear (and we assume that there is a linear relation $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$) we may write the potential as a superposition of solutions Ψ_i

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_i \Phi_i\Psi_i(\mathbf{r}). \tag{7.9}$$

Dabei ist Ψ_i die Lösung, die auf dem Leiter #i den Wert 1, auf den anderen den Wert 0 annimmt

Ψ_i is the solution which assumes the value 1 at the conductor #i, and 0 at all others

$$\Psi_i(\mathbf{r}) = \delta_{i,j} \quad \mathbf{r} \in \begin{matrix}\text{Leiter}\\ \text{conductor}\end{matrix} j. \tag{7.10}$$

Die Ladung auf dem Leiter #i ist dann gegeben durch

The charge on conductor #i is then given by

$$q_i = -\frac{1}{4\pi}\int_{F_i} \mathrm{d}f\epsilon \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_\mathrm{a} = \sum_j C_{i,j}\Phi_j \tag{7.11}$$

mit den Kapazitätskoeffizienten

with the capacity coefficients

$$C_{i,j} = -\frac{1}{4\pi}\int_{F_i} \mathrm{d}f\epsilon \left.\frac{\partial\Psi_j}{\partial n}\right|_\mathrm{a}. \tag{7.12}$$

Im Gaussschen Maßsystem hat die Kapazität die Dimension Ladung/Spannung = Länge. Die Umrechnung in das SI-System geschieht mit dem Faktor $4\pi\epsilon_0$, so dass 1 cm $\hat{=}$ $1/9 \cdot 10^{-11}$ As/V = 10/9 pF (Picofarad).

The capacity has the dimension charge/(electric potential), which in Gaussian units is a length. The conversion into the SI-system is by the factor $4\pi\epsilon_0$, so that 1 cm $\hat{=}$ $1/9 \cdot 10^{-11}$ As/V = 10/9 pF (picofarad).

Die elektrostatische Energie ergibt sich aus

The electrostatic energy is obtained from

$$\mathrm{d}U = \sum_i \Phi_i \mathrm{d}q_i = \sum_{i,j} \Phi_i C_{i,j} \mathrm{d}\Phi_j, \tag{7.13}$$

das heißt

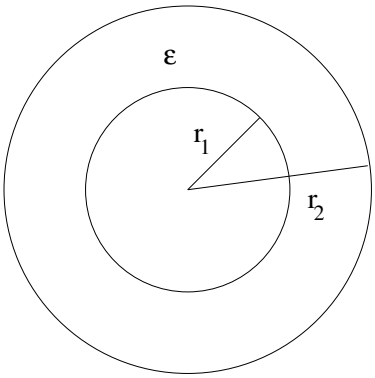
that is

$$\frac{\partial U}{\partial \Phi_j} = \sum_i C_{i,j}\Phi_i, \tag{7.14}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j} = C_{i,j} = \frac{\partial^2 U}{\partial \Phi_j \partial \Phi_i} = C_{j,i}, \tag{7.15}$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,j} C_{i,j}\Phi_i\Phi_j = \frac{1}{2}\sum_i \Phi_i q_i \tag{7.16}$$

Als Beispiel betrachten wir den Kugelkondensator. Zwei konzentrische leitende Kugeln mit Radien r_1, r_2, wobei $r_1 < r_2$, seien mit den Ladungen q_1 und q_2 belegt. Der Außenraum sei Vakuum. Zwischen den beiden Kugeln sei ein Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante ϵ. Im Außenraum gilt dann



As an example we consider a spherical capacitor. Two concentric conducting spheres with radii r_1, r_2 with $r_1 < r_2$ carry the charges q_1 and q_2, resp. Outside be vacuum. Between the two spheres is a medium with dielectric constant ϵ. Then outside the spheres one has

$$\Phi(r) = \frac{q_1 + q_2}{r} \quad r \geq r_2. \tag{7.17}$$

Im Raum zwischen den beiden Kugeln hat man einen Abfall des Potentials der Form $q_1/(\epsilon r)$. Da das Potential bei $r = r_2$ stetig sein muss, folgt

The potential decays in the space between the two spheres like $q_1/(\epsilon r)$. Since the potential is continuous at $r = r_2$, it follows that

$$\Phi(r) = \frac{q_1}{\epsilon r} - \frac{q_1}{\epsilon r_2} + \frac{q_1 + q_2}{r_2} \quad r_1 \leq r \leq r_2. \tag{7.18}$$

In der kleineren Kugel ist das Potential konstant.

Inside the smaller sphere the potential is constant.

$$\Phi(r) = \frac{q_1}{\epsilon r_1} - \frac{q_1}{\epsilon r_2} + \frac{q_1 + q_2}{r_2} \quad r \leq r_1. \tag{7.19}$$

Daraus errechnen sich dann die Ladungen als Funktion der Potentiale $\Phi_i = \Phi(r_i)$

From this one calculates the charges as a function of the potentials $\Phi_i = \Phi(r_i)$

$$q_1 = \frac{\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}(\Phi_1 - \Phi_2) \tag{7.20}$$

$$q_2 = \frac{\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}(\Phi_2 - \Phi_1) + r_2\Phi_2, \tag{7.21}$$

aus denen man die Kapazitätskoeffizienten unmittelbar ablesen kann. Falls das System neutral ist $q = q_1 = -q_2$, kann man q durch die Potentialdifferenz ausdrücken

from which the capacitor coefficients can be read off immediately. If the system is neutral, $q = q_1 = -q_2$, then q can be expressed by the difference of the potential

$$q = C(\Phi_1 - \Phi_2) \tag{7.22}$$

und bezeichnet C als die Kapazität. Für den Kugelkondensator finden wir $\Phi_2 = 0$ und $\Phi_1 = \frac{q_1}{\epsilon}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$, woraus die Kapazität

and one calls C the capacity. For the spherical capacitor one obtains $\Phi_2 = 0$ and $\Phi_1 = \frac{q_1}{\epsilon}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$, from which the capacity

$$C = \frac{\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1} \tag{7.23}$$

folgt.

is obtained.

Für eine einzelne Kugel können wir r_2 gegen ∞ gehen lassen und finden $C = \epsilon r_1$.

For a single sphere r_2 can go to ∞ and one finds $C = \epsilon r_1$.

Den Plattenkondensator mit Plattenabstand d erhalten wir, indem wir $r_2 = r_1 + d$ setzen und dann großes r_1 betrachten. Wir finden

We obtain the plate capacitor with a distance d between the plates, by putting $r_2 = r_1 + d$ in the limit of large r_1

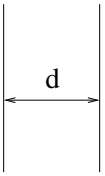
$$C = \frac{(r_1^2 + r_1 d)\epsilon}{d} = \frac{4\pi r_1^2 \epsilon}{d}\Big(\frac{1}{4\pi} + \frac{d}{4\pi r_1}\Big), \tag{7.24}$$

was für große r_1 gegen $\frac{\epsilon F}{4\pi d}$ mit der Fläche F geht. Daher erhält man für den Plattenkondensator

which approaches $\frac{\epsilon F}{4\pi d}$ for large r_1 with the area F. Therefore one obtains for the plate capacitor

$$C = \frac{\epsilon F}{4\pi d}. \tag{7.25}$$

Eine andere Überlegung ist die Folgende: Die Ladung q erzeugt einen Fluss $DF = 4\pi q$. Daher ist die Potentialdifferenz zwischen den beiden Platten $\Phi = \frac{D}{\epsilon} d = \frac{4\pi d}{\epsilon F} q$, woraus $C = q/\phi = \frac{\epsilon F}{4\pi d}$ folgt. Man beachte, dass wir hier mit q die freibewegliche Ladung bezeichnet haben.



A different consideration is the following: The charge q generates the flux $DF = 4\pi q$. Therefore the potential difference between the two plates is $\Phi = \frac{D}{\epsilon} d = \frac{4\pi d}{\epsilon F} q$, from which $C = q/\phi = \frac{\epsilon F}{4\pi d}$ follows. Be aware that here we have denoted the free charge by q.

7.c Influenzladungen

Halten wir die Potentiale der Leiter auf 0, $\Phi_i = 0$ und haben wir eine freibewegliche Ladung q' am Ort $\mathbf{r}'$, so beschreiben wir das Potential

7.c Influence Charges

If we fix the potentials of all conductors to 0, $\Phi_i = 0$ in the presence of a free charge q' at $\mathbf{r}'$, then we write the potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')q' \tag{7.26}$$

mit der Greenschen Funktion G. Offensichtlich genügt diese der Gleichung

with the Green's function G. Apparently this function obeys the equation

$$\nabla(\epsilon(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{7.27}$$

für $\mathbf{r}$ außerhalb der Leiter. Für $\mathbf{r}$ auf den Leiteroberflächen ist $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$. Für eine Ladungsverteilung $\rho_f(\mathbf{r}')$ außerhalb der Leiter gilt dann nach dem Superpositionsprinzip

for $\mathbf{r}$ outside the conductor. For $\mathbf{r}$ at the surface of the conductors we have $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$. The superposition principle yields for a charge density $\rho_f(\mathbf{r}')$ located outside the conductors

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}^3 r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho_f(\mathbf{r}') + \sum_i \Phi_i \Psi_i(\mathbf{r}), \tag{7.28}$$

wobei wir jetzt angenommen haben, dass die Leiter auf den Potentialen Φ_i liegen.

where now we have assumed that the conductors have the potential Φ_i.

Wir zeigen nun, dass die Greensche Funktion symmetrisch ist, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$. Zum Beweis gehen wir aus vom Integral über die Leiteroberflächen

We now show that the Green's function is symmetric, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$. In order to show this we start from the integral over the surfaces of the conductors

$$\int \mathrm{d}\mathbf{f}'' \cdot \{G(\mathbf{r}'', \mathbf{r})\epsilon(\mathbf{r}'')\nabla'' G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') - \epsilon(\mathbf{r}'')[\nabla'' G(\mathbf{r}'', \mathbf{r})]G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')\} = 0, \tag{7.29}$$

da G auf den Leiteroberflächen verschwindet. Das Flächenelement $\mathrm{d}\mathbf{f}''$ weise in die Leiter. Wir erstrecken das Integral auch über eine Kugel vom Radius R, die alle Leiter einschließt. Wegen $G \sim 1/R$ und $\nabla'' G \sim 1/R^2$ verschwindet das Oberflächenintegral für $R \to \infty$. Die Anwendung des Gaussschen Satzes liefert

since G vanishes at the surface of the conductors. The area element $\mathrm{d}\mathbf{f}''$ is directed into the conductors. We perform the integral also over a sphere of radius R, which includes all conductors. Since $G \sim 1/R$ and since $\nabla'' G \sim 1/R^2$ the surface integral vanishes for $R \to \infty$. Application of the divergence theorem yields

$$\int \mathrm{d}^3 r'' \{G(\mathbf{r}'', \mathbf{r})\nabla''[\epsilon(\mathbf{r}'')\nabla'' G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')] - \nabla''[\epsilon(\mathbf{r}'')\nabla'' G(\mathbf{r}'', \mathbf{r})]G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')\} \tag{7.30}$$

$$= -4\pi \int \mathrm{d}^3 r'' \{G(\mathbf{r}'', \mathbf{r})\delta^3(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}') - \delta^3(\mathbf{r}'' - \mathbf{r})G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')\} \tag{7.31}$$

$$= -4\pi(G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = 0. \tag{7.32}$$

Wir betrachten nun einige Beispiele:

We consider now a few examples:

7.c.α Leiterfreier Raum

Im leiterfreien Raum mit konstanter Dielektrizitätskonstante ϵ gilt

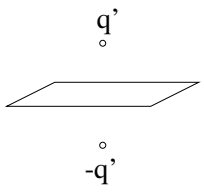
7.c.α Space free of Conductors

In a space with constant dielectric constant ϵ and without conductors one has

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\epsilon|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{7.33}$$

7.c.β Leitende Ebene

Für eine leitende Ebene $z = 0$ ($\epsilon = 1$) löst man das Problem durch eine Spiegelladung. Befindet sich die gegebene Ladung q' am Ort $\mathbf{r}' = (x', y', z')$, so denke man sich eine zweite Ladung $-q'$ am Ort $\mathbf{r}'' = (x', y', -z')$. Diese kompensiert gerade das Potential an der Leiteroberfläche. Es folgt



7.c.β Conducting Plane

For a conducting plane $z = 0$ ($\epsilon = 1$) one solves the problem by mirror charges. If the given charge q' is located at $\mathbf{r}' = (x', y', z')$, then one should imagine a second charge $-q'$ at $\mathbf{r}'' = (x', y', -z')$. This mirror charge compensates the potential at the surface of the conductor. One obtains

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} & \begin{matrix}\text{für} \\ \text{for}\end{matrix} \ \operatorname{sign} z = \operatorname{sign} z' \\ 0 & \begin{matrix}\text{für} \\ \text{for}\end{matrix} \ \operatorname{sign} z = -\operatorname{sign} z'. \end{cases} \tag{7.34}$$

Als nächstes betrachten wir die Kraft, die auf die Ladung q' wirkt. Das Potential ist $\Phi(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')q'$. Dabei ist der Anteil $q'/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ das Potential von q' selbst, das auf q' keine Kraft ausübt. Der zweite Beitrag $-q'/|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|$ rührt dagegen von den Influenz-Ladungen auf der Metallebene her und bewirkt die Kraft

Next we consider the force which acts on the charge q'. The potential is $\Phi(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')q'$. The contribution $q'/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ is the potential of q' itself that does not exert a force on q' . The second contribution $-q'/|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|$ comes, however, from the influence charges on the metal surface and exerts the force

$$\mathbf{K} = -q' \operatorname{grad} \frac{-q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} = -\frac{q'^2 \mathbf{e}_z}{4z'^2} \operatorname{sign} z'. \tag{7.35}$$

Weiter bestimmen wir die Influenz-Ladung auf der Platte. Bei $z = 0$ haben wir $4\pi \operatorname{sign} z' \mathbf{e}_z \sigma(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) = q' \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} - q' \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|^3}$. Daraus ergibt sich die Oberflächenladungsdichte

Further one determines the influence charge on the plate. At $z = 0$ one has $4\pi \operatorname{sign} z' \mathbf{e}_z \sigma(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) = q' \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} - q' \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|^3}$. From this one obtains the density of the surface charge per area

$$\sigma(\mathbf{r}) = -\frac{q'}{2\pi} \frac{|z'|}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2}^3} \tag{7.36}$$

Mit $\mathrm{d}f = \pi \mathrm{d}(x^2 + y^2)$ folgt dann

With $\mathrm{d}f = \pi \mathrm{d}(x^2 + y^2)$ one obtains

$$\int \mathrm{d}f \sigma(\mathbf{r}) = -\frac{q'|z'|}{2} \int_{z'^2}^{\infty} \frac{\mathrm{d}(x^2 + y^2 + z'^2)}{(x^2 + y^2 + z'^2)^{3/2}} = -q'. \tag{7.37}$$

Die Kraft auf die Platte errechnet sich zu

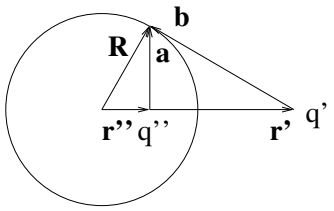
The force acting on the plate is obtained as

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}f \mathbf{E}(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r}) = \frac{q'^2 z' |z'|}{2} \mathbf{e}_z \int \frac{\mathrm{d}(x^2 + y^2 + z'^2)}{(x^2 + y^2 + z'^2)^3} = \frac{q'^2 \mathbf{e}_z}{4z'^2} \operatorname{sign} z'. \tag{7.38}$$

7.c.γ Leitende Kugel

7.c.γ Conducting Sphere

Wir betrachten eine Ladung q' am Ort $\mathbf{r}'$ in Gegenwart einer leitenden Kugel mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung. Es gibt dann einen Vektor $\mathbf{r}''$, so dass das Verhältnis der Abstände von allen Punkten $\mathbf{R}$ der Kugeloberfläche von $\mathbf{r}'$ und $\mathbf{r}''$ konstant ist. Es sei



We consider a charge q' located at $\mathbf{r}'$ in the presence of a conducting sphere with radius R and center in the origin. Then there is a vector $\mathbf{r}''$, so that the ratio of the distances of all points $\mathbf{R}$ on the surface of the sphere from $\mathbf{r}'$ and $\mathbf{r}''$ is constant. Be

$$a^2 := (\mathbf{R} - \mathbf{r}'')^2 = R^2 + r''^2 - 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'' \tag{7.39}$$

$$b^2 := (\mathbf{R} - \mathbf{r}')^2 = R^2 + r'^2 - 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}' \tag{7.40}$$

Diese Konstanz des Verhältnisses der Abstände ist erfüllt für $\mathbf{r}' \parallel \mathbf{r}''$ und

This constant ratio of the distances is fulfilled for $\mathbf{r} \parallel \mathbf{r}''$ and

$$\frac{R^2 + r''^2}{R^2 + r'^2} = \frac{r''}{r'}. \tag{7.41}$$

Dann gilt

Then one has

$$R^2 = r' r'' \quad \mathbf{r}'' = \frac{R^2}{r'^2} \mathbf{r}' \tag{7.42}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{r''}{r'} = \frac{R^2}{r'^2} = \frac{r''^2}{R^2}. \tag{7.43}$$

Man findet damit ein konstantes Potential auf der Kugel mit der Ladung q' am Ort $\mathbf{r}'$ und der Ladung $q'' = -q'R/r'$ am Ort r''

Thus one obtains a constant potential on the sphere with the charge q' at $\mathbf{r}'$ and the charge $q'' = -q'R/r'$ at r''

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{R/r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} & \text{für / for } \operatorname{sign}(r - R) = \operatorname{sign}(r' - R), \\ 0 & \text{sonst / otherwise} \end{cases}. \tag{7.44}$$

Mit diesem G verschwindet das Potential auf der Kugel. Für $r' > R$ trägt sie die Ladung q'' und für $r' < R$ die Ladung $-q'$. Daher muss man für eine neutrale Kugel zum Potential Φ noch den Beitrag hinzufügen, der von einer gleichmäßig auf der Kugel verteilten Ladung $-q''$ beziehungsweise q' herrührt.

The potential on the sphere vanishes with this GREEN's function G. For $r' > R$ it carries the charge q'' and for $r' < R$ the charge $-q'$. Thus if the total charge on the sphere vanishes one has to add a potential Φ, which corresponds to a homogeneously distributed charge $-q''$ and q', resp.

8 Energie, Kräfte und Spannungen im Dielektrikum

8 Energy, Forces and Stress in Dielectric Media

8.a Elektrostatische Energie

Bei Verschiebung der Ladungsdichten $\delta\rho = \delta\rho_\mathrm{f} + \delta\rho_\mathrm{P}$ wird die elektrostatische Energie

$$\delta U = \int \mathrm{d}^3 r \delta\rho_\mathrm{f}\Phi + \int \mathrm{d}^3 r \delta\rho_\mathrm{P}\Phi \tag{8.1}$$

zugeführt. Gleichzeitig sind in der Materie zusätzliche innere Potentiale Φ_i vorhanden, so dass die Polarisation im Gleichgewicht ist, das heißt

$$\delta U = \int \mathrm{d}^3 r \delta\rho_\mathrm{f}\Phi + \int \mathrm{d}^3 r \delta\rho_\mathrm{P}(\Phi + \Phi_\mathrm{i}). \tag{8.2}$$

Diese Potentiale müssen so beschaffen sein, dass $\delta U = 0$ für eine Variation der Polarisation gilt, damit die Polarisationen im Gleichgewicht sind

$$\Phi + \Phi_\mathrm{i} = 0. \tag{8.3}$$

Diese Überlegungen gelten bei adiabatisch geführten Prozessen und unter der Bedingung, dass keine mechanische Energie zugeführt wird. Die Materie muss sich also in einem kräftefreien Zustand (Gleichgewicht $\mathbf{k} = \mathbf{0}$) befinden oder sie muss festgehalten werden. Damit folgt mit (B.62)

$$\delta U = \int \mathrm{d}^3 r\, \delta\rho_\mathrm{f}\, \Phi = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3 r\, \mathrm{div}\, \delta\mathbf{D}\, \Phi = -\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3 r \delta\mathbf{D}\cdot\, \mathrm{grad}\, \Phi = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3 r \mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}, \tag{8.4}$$

ähnlich zum materiefreien Fall (3.25). Damit gilt für die Energiedichte bei fester Massendichte ρ_m (wir nehmen hier an, dass außer dem elektrischen Feld nur die Massendichte die Energiedichte festlegt; tatsächlich wird im Allgemeinen der Verzerrungszustand wesentlich sein)

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{D}. \tag{8.5}$$

Falls $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, so folgt

$$u = u_0(\rho_\mathrm{m}) + \frac{1}{4\pi}\int \epsilon(\rho_\mathrm{m})\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{E} = u_0(\rho_\mathrm{m}) + \frac{1}{8\pi}\epsilon(\rho_\mathrm{m})E^2 = u_0(\rho_\mathrm{m}) + \frac{D^2}{8\pi\epsilon(\rho_\mathrm{m})}, \tag{8.6}$$

da die Dielektrizitätskonstante im Allgemeinen von der Massendichte abhängt.

8.a Electrostatic Energy

By displacing the charge densities $\delta\rho = \delta\rho_\mathrm{f} + \delta\rho_\mathrm{P}$ the electrostatic energy

will be added to the system. Simultaneously there are additional potentials Φ_i in the matter guaranteeing that the polarization is in equilibrium, i. e.

These potentials are so that $\delta U = 0$ holds for a variation of the polarization, so that the polarizations are in equilibrium

These considerations hold as long as the process is run adiabatically and under the condition that no mechanical energy is added. Thus the matter is in a force-free state (equilibrium $\mathbf{k} = \mathbf{0}$) or it has to be under rigid constraints. Then one obtains with (B.62)

similarly to the matter-free case (3.25). Then one obtains for the density of the energy at fixed density of matter ρ_m (we assume that apart from the electric field only the density of matter determines the energy-density; in general, however, the state of distortion will be essential)

If $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, then one obtains

since the dielectric constant depends in general on the density of mass.

8.b Kraftdichte im isotropen Dielektrikum

Wir können die Kraftdichte in einem Dielektrikum bestimmen, indem wir die Massen und freibeweglichen Ladungen von $\mathbf{r}$ nach $\mathbf{r} + \delta\mathbf{s}(\mathbf{r})$ verschieben und die Energieänderung δU bestimmen. Die dem System dabei zugeführte Energie ist

$$\delta U = \int \mathrm{d}^3 r\, \mathbf{k}_\mathrm{a}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{s}(\mathbf{r}), \tag{8.7}$$

wobei $\mathbf{k}_\mathrm{a}$ die von außen angreifende Kraftdichte ist. Im Gleichgewicht ist die entgegenwirkende innere elektrische und mechanische Kraftdichte $\mathbf{k}$

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = -\mathbf{k}_\mathrm{a}(\mathbf{r}), \tag{8.8}$$

so dass

$$\delta U = -\int \mathrm{d}^3 r\, \mathbf{k}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{s}(\mathbf{r}) \tag{8.9}$$

gelten muss. Wir bringen nun δU auf diese Form

$$\delta U = \int \mathrm{d}^3 r \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{D}} \cdot \delta\mathbf{D} + \left.\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}}\right|_\mathbf{D} \delta\rho_\mathrm{m} \right), \quad u = u(\mathbf{D}, \rho_\mathrm{m}). \tag{8.10}$$

Wegen $\partial u/\partial \mathbf{D} = \mathbf{E}/(4\pi)$ formen wir den ersten Term wie im vorhergehenden Abschnitt um in

$$\delta U = \int \mathrm{d}^3 r \left(\Phi(\mathbf{r}) \delta\rho_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + \left.\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}}\right|_\mathbf{D} \delta\rho_\mathrm{m} \right). \tag{8.11}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung $\partial\rho/\partial t = -\operatorname{div}\mathbf{j}$ leiten wir nun den Zusammenhang zwischen $\delta\rho$ und $\delta\mathbf{s}$ her. Man muss die Gleichung nur mit δt multiplizieren und berücksichtigen, dass $\mathbf{j}\delta t = \rho\mathbf{v}\delta t = \rho\delta\mathbf{s}$ gilt. Mit $(\partial\rho/\partial t)\delta t = \delta\rho$ erhalten wir

$$\delta\rho = -\operatorname{div}(\rho\delta\mathbf{s}). \tag{8.12}$$

Es folgt dann

$$\begin{aligned} \delta U &= -\int \mathrm{d}^3 r \left(\Phi(\mathbf{r}) \operatorname{div}(\rho_\mathrm{f}\delta\mathbf{s}) + \frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} \operatorname{div}(\rho_\mathrm{m}\delta\mathbf{s}) \right) \\ &= \int \mathrm{d}^3 r \left(\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r})\rho_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + \left(\operatorname{grad}\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} \right) \rho_\mathrm{m}(\mathbf{r}) \right) \cdot \delta\mathbf{s}(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{8.13}$$

wobei beim Übergang zur letzten Zeile der Gaussssche Satz (B.62) verwendet wurde. Daraus folgt

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \rho_\mathrm{f}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) - \rho_\mathrm{m}(\mathbf{r}) \operatorname{grad}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} \right). \tag{8.14}$$

Der erste Beitrag ist die Coulomb-Kraft auf die freien Ladungsträger. Den zweiten Beitrag formen wir noch um. Wir setzen (8.6) $u = u_0(\rho_\mathrm{m}) + D^2/(8\pi\epsilon(\rho_\mathrm{m}))$. Dann ist

$$\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}\rho_\mathrm{m}} + \frac{1}{8\pi} D^2 \frac{\mathrm{d}(1/\epsilon)}{\mathrm{d}\rho_\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}\rho_\mathrm{m}} - \frac{1}{8\pi} E^2 \frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}\rho_\mathrm{m}}. \tag{8.15}$$

8.b Force Density in Isotropic Dielectric Matter

We may determine the force density in a dielectric medium by moving the masses and free charges from $\mathbf{r}$ to $\mathbf{r} + \delta\mathbf{s}(\mathbf{r})$ and calculating the change of energy δU. The energy added to the system is

$$\delta U = \int \mathrm{d}^3 r\, \mathbf{k}_\mathrm{a}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{s}(\mathbf{r}), \tag{8.7}$$

where $\mathbf{k}_\mathrm{a}$ is an external force density. The internal electric and mechanical force density $\mathbf{k}$ acting against it in equilibrium is

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = -\mathbf{k}_\mathrm{a}(\mathbf{r}), \tag{8.8}$$

so that

$$\delta U = -\int \mathrm{d}^3 r\, \mathbf{k}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{s}(\mathbf{r}) \tag{8.9}$$

holds. We bring now δU into this form

$$\delta U = \int \mathrm{d}^3 r \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{D}} \cdot \delta\mathbf{D} + \left.\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}}\right|_\mathbf{D} \delta\rho_\mathrm{m} \right), \quad u = u(\mathbf{D}, \rho_\mathrm{m}). \tag{8.10}$$

Since $\partial u/\partial \mathbf{D} = \mathbf{E}/(4\pi)$ we rewrite the first term as in the previous section

$$\delta U = \int \mathrm{d}^3 r \left(\Phi(\mathbf{r}) \delta\rho_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + \left.\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}}\right|_\mathbf{D} \delta\rho_\mathrm{m} \right). \tag{8.11}$$

From the equation of continuity $\partial\rho/\partial t = -\operatorname{div}\mathbf{j}$ we derive the relation between $\delta\rho$ and $\delta\mathbf{s}$. The equation has to be multiplied by δt and one has to consider that $\mathbf{j}\delta t = \rho\mathbf{v}\delta t = \rho\delta\mathbf{s}$ holds. With $(\partial\rho/\partial t)\delta t = \delta\rho$ we obtain

$$\delta\rho = -\operatorname{div}(\rho\delta\mathbf{s}). \tag{8.12}$$

Then we obtain

$$\begin{aligned} \delta U &= -\int \mathrm{d}^3 r \left(\Phi(\mathbf{r}) \operatorname{div}(\rho_\mathrm{f}\delta\mathbf{s}) + \frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} \operatorname{div}(\rho_\mathrm{m}\delta\mathbf{s}) \right) \\ &= \int \mathrm{d}^3 r \left(\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r})\rho_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + \left(\operatorname{grad}\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} \right) \rho_\mathrm{m}(\mathbf{r}) \right) \cdot \delta\mathbf{s}(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{8.13}$$

where the divergence theorem (B.62) has been used by the derivation of the last line. This yields

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \rho_\mathrm{f}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) - \rho_\mathrm{m}(\mathbf{r}) \operatorname{grad}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} \right). \tag{8.14}$$

The first contribution is the Coulomb force on the free charges. The second contribution has to be rewritten. We substitute (8.6) $u = u_0(\rho_\mathrm{m}) + D^2/(8\pi\epsilon(\rho_\mathrm{m}))$. Then one has

$$\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}\rho_\mathrm{m}} + \frac{1}{8\pi} D^2 \frac{\mathrm{d}(1/\epsilon)}{\mathrm{d}\rho_\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}\rho_\mathrm{m}} - \frac{1}{8\pi} E^2 \frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}\rho_\mathrm{m}}. \tag{8.15}$$

Der erste Term kann geschrieben werden

The first term can be written

$$-\rho_\mathrm{m}\,\mathrm{grad}\,\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}\rho_\mathrm{m}} = -\,\mathrm{grad}\left(\rho_\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}\rho_\mathrm{m}} - u_0\right) = -\,\mathrm{grad}\,P_0(\rho_\mathrm{m}), \tag{8.16}$$

wobei wir verwenden, dass $(\mathrm{d}u_0/\mathrm{d}\rho_\mathrm{m})\,\mathrm{grad}\,\rho_m = \mathrm{grad}\,u_0$. Hierbei ist P_0 der hydrostatische Druck der Flüssigkeit ohne elektrisches Feld

where we use that $(\mathrm{d}u_0/\mathrm{d}\rho_\mathrm{m})\,\mathrm{grad}\,\rho_m = \mathrm{grad}\,u_0$. Here P_0 is the hydrostatic pressure of the liquid without electric field

$$\mathbf{k}_{0,\mathrm{hydro}} = -\,\mathrm{grad}\,P_0(\rho_\mathrm{m}(\mathbf{r})). \tag{8.17}$$

Die auf das Volumen V wirkende hydrostatische Kraft kann dann umgeformt werden in ein Oberflächenintegral

The hydrostatic force acting on the volume V can be written in terms of a surface integral

$$\mathbf{K}_0 = -\int_V \mathrm{d}^3 r\,\mathrm{grad}\,P_0(\rho_\mathrm{m}(\mathbf{r})) = -\int_{\partial V}\mathrm{d}\mathbf{f}P_0(\rho_\mathrm{m}(\mathbf{r})). \tag{8.18}$$

Dies ist eine Kraft, die auf die Oberfläche ∂V mit dem Druck P_0 wirkt. Es bleibt noch der elektrostriktive Anteil

This is a force which acts on the surface ∂V with the pressure P_0. There remains the electrostrictive contribution

$$\frac{1}{8\pi}\rho_\mathrm{m}\,\mathrm{grad}\left(E^2\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}\rho_\mathrm{m}}\right) = \frac{1}{8\pi}\,\mathrm{grad}\left(E^2\rho_\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}\rho_\mathrm{m}}\right) - \frac{1}{8\pi}E^2\,\mathrm{grad}\,\epsilon, \tag{8.19}$$

wobei $(\mathrm{d}\epsilon/\mathrm{d}\rho_\mathrm{m})\,\mathrm{grad}\,\rho_\mathrm{m} = \mathrm{grad}\,\epsilon$ verwendet wurde. Insgesamt ergibt sich dann die Kraftdichte zu

where $(\mathrm{d}\epsilon/\mathrm{d}\rho_\mathrm{m})\,\mathrm{grad}\,\rho_\mathrm{m} = \mathrm{grad}\,\epsilon$ has been used. Then the total force density is

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \rho_\mathrm{f}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathrm{grad}\left(-P_0(\rho_\mathrm{m}) + \frac{1}{8\pi}E^2\rho_\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}\rho_\mathrm{m}}\right) - \frac{1}{8\pi}E^2\,\mathrm{grad}\,\epsilon. \tag{8.20}$$

Anwendungen:

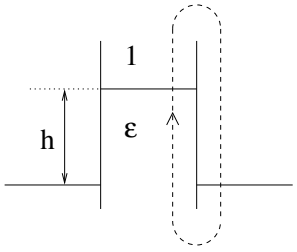
Dielektrische Flüssigkeit zwischen zwei senkrechten Kondensatorplatten.
Um welche Höhe h steht die Flüssigkeit zwischen den Kondensatorplatten höher als im feldfreien Raum? Wir führen dazu das Integral über einen geschlossenen Weg zwischen den Kondensatorplatten nach oben und außerhalb nach unten

Applications:

Dielectric fluid between two vertical capacitor plates. What is the difference h in height between between the surface of a fluid between the plates of the capacitor and outside the capacitor? For this purpose we introduce the integral along a closed path which goes up between the plates of the capacitor and outside down

$$\oint \mathbf{k}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \oint \mathrm{grad}\left(-P_0 + \frac{1}{8\pi}E^2\rho_\mathrm{m}\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho_\mathrm{m}}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} - \frac{1}{8\pi}\oint E^2\,\mathrm{grad}\,\epsilon\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{1}{8\pi}E^2(\epsilon-1). \tag{8.21}$$

Dabei verschwindet das Integral des Gradienten über den geschlossenen Weg, während das Integral über $E^2\,\mathrm{grad}\,\epsilon$ nur etwas an den beiden Punkten ergibt, an denen der Integrationsweg durch die Flüssigkeitsoberfläche tritt. Zusätzlich zu diesen Kräften kommt noch die Gravitationskraft. Beide müssen sich die Waage halten



The integral over the gradient along the closed path vanishes, whereas the integral of $E^2\,\mathrm{grad}\,\epsilon$ yields a contribution at the two points where the path of integration intersects the surface. In addition there is the gravitational force. Both have to compensate each other

$$\mathbf{k} + \mathbf{k}_\mathrm{grav} = \mathbf{0}, \tag{8.22}$$

also

that is

$$\oint \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}_\mathrm{grav} = -\rho_\mathrm{m}gh = -\oint \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}, \tag{8.23}$$

woraus sich die Höhe

from which one obtains the height

$$h = \frac{E^2(\epsilon - 1)}{8\pi\rho_\mathrm{m} g} \tag{8.24}$$

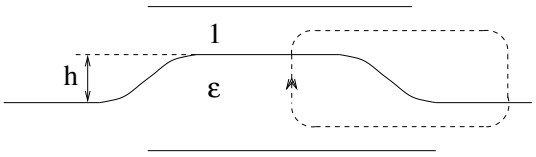
ergibt.

.

Dielektrische Flüssigkeit zwischen zwei waagrechten Kondensatorplatten

Dielectric fluid between two horizontal capacitor plates

Wie groß ist die Steighöhe einer dielektrischen Flüssigkeit zwischen zwei horizontalen Kondensatorplatten? Das Problem lässt sich ähnlich lösen wie zwischen zwei senkrechten Kondensatorplatten.



What is the elevation of a dielectric fluid between two horizontal capacitor plates? The problem can be solved in a similar way as between two vertical plates.

Allerdings ist es zweckmässig, die Umformung

It is useful, however, to use

$$-\frac{1}{8\pi}E^2 \operatorname{grad}\epsilon = \frac{1}{8\pi}D^2 \operatorname{grad}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \tag{8.25}$$

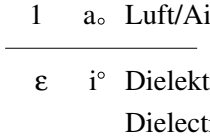
zu verwenden.

.

Hydrostatischer Druckunterschied an einer Grenzfläche

Hydrostatic pressure difference at a boundary

Durch Integration durch die Grenzfläche vom Dielektrikum zur Luft erhält man



Performing an integration through the boundary from the dielectric medium to air one obtains

$$0 = \int_\mathrm{i}^\mathrm{a} \mathbf{k}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int \operatorname{grad}\left(-P_0 + \frac{1}{8\pi}\rho_\mathrm{m}E^2\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}\rho_\mathrm{m}}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} - \frac{1}{8\pi}\int E_\mathrm{t}^2 \operatorname{grad}\epsilon\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} + \frac{1}{8\pi}\int D_\mathrm{n}^2 \operatorname{grad}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{8.26}$$

Daraus folgt der hydrostatische Druckunterschied auf beiden Seiten der Grenzfläche

This yields the difference in hydrostatic pressure at both sides of the boundary

$$P_{0,\mathrm{i}}(\rho_\mathrm{m}) - P_{0,\mathrm{a}} = \frac{1}{8\pi}\left(\rho_\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}\rho_\mathrm{m}}E^2 - (\epsilon-1)E_\mathrm{t}^2 + \left(\frac{1}{\epsilon}-1\right)D_\mathrm{n}^2\right) \tag{8.27}$$

Druckverlauf im praktisch inkompressiblen Dielektrikum

Pressure in a practically incompressible dielectric medium

Aus

From

$$\mathbf{k} + \mathbf{k}_\mathrm{grav} = -\operatorname{grad}(P_0(\rho_\mathrm{m})) + \rho_\mathrm{m}\operatorname{grad}\left(\frac{1}{8\pi}E^2\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}\rho_\mathrm{m}}\right) - \rho_\mathrm{m}\operatorname{grad}(gz) = \mathbf{0}. \tag{8.28}$$

erhält man für annähernd konstantes ρ_m

one obtains for approximately constant ρ_m

$$P_0 = \rho_\mathrm{m}\left(\frac{1}{8\pi}E^2\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}\rho_\mathrm{m}} - gz\right) + \text{const.} \tag{8.29}$$

8.c Maxwellscher Spannungstensor

Wir wollen nun die Kraftdichte **k** als Divergenz eines Tensors darstellen,

$$k_\alpha = \nabla_\beta T_{\alpha,\beta}. \tag{8.30}$$

Hat man eine derartige Darstellung, so ist die auf ein Volumen V wirkende Kraft gegeben durch

$$\mathbf{K} = \int_V \mathrm{d}^3 r \mathbf{k}(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}^3 r \mathbf{e}_\alpha \nabla_\beta T_{\alpha,\beta} = \int_{\partial V} \mathrm{d} f_\beta (\mathbf{e}_\alpha T_{\alpha,\beta}). \tag{8.31}$$

Die auf das Volumen wirkende Kraft wird also dargestellt durch eine auf die Oberfläche wirkende Kraft. Wäre sie isotrop $T_{\alpha,\beta} = -P\delta_{\alpha,\beta}$, so würden wir von einem Druck sprechen, der auf die Oberfläche einwirkt. Im hier vorliegenden allgemeineren Fall spricht man von einem Spannungstensor T, da der Druck anisotrop sein kann und Scherspannungen auftreten können.

Zur Berechnung von T gehen wir aus von

$$k_\alpha = \rho_\mathrm{f} E_\alpha - \rho_\mathrm{m} \nabla_\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} \right). \tag{8.32}$$

Wir formen um

$$\rho_\mathrm{f} E_\alpha = \frac{1}{4\pi} E_\alpha \nabla_\beta D_\beta = \frac{1}{4\pi} \left(\nabla_\beta (E_\alpha D_\beta) - (\nabla_\beta E_\alpha) D_\beta \right) \tag{8.33}$$

und verwenden $\nabla_\beta E_\alpha = \nabla_\alpha E_\beta$ wegen $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Damit folgt

$$k_\alpha = \nabla_\beta (\frac{1}{4\pi} E_\alpha D_\beta) - \rho_\mathrm{m} \nabla_\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} \right) - \frac{1}{4\pi} D_\beta \nabla_\alpha E_\beta. \tag{8.34}$$

Nun ist aber

$$\nabla_\alpha \left(u - \rho_\mathrm{m} \frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \right) = -\rho_\mathrm{m} \nabla_\alpha \frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} - \frac{1}{4\pi} D_\beta \nabla_\alpha E_\beta, \tag{8.35}$$

da $\partial u / \partial D_\beta = E_\beta / (4\pi)$. Damit folgt der Ausdruck für den Spannungstensor

$$T_{\alpha,\beta} = \frac{1}{4\pi} E_\alpha D_\beta + \delta_{\alpha,\beta} \left(u - \rho_\mathrm{m} \frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \right). \tag{8.36}$$

Speziell mit $u = u_0(\rho_\mathrm{m}) + D^2/(8\pi\epsilon(\rho_\mathrm{m}))$, (8.6) folgt

$$T_{\alpha,\beta} = \frac{1}{4\pi} E_\alpha D_\beta + \delta_{\alpha,\beta} \left(-P_0(\rho_\mathrm{m}) - \frac{1}{8\pi} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{8\pi} E^2 \rho_\mathrm{m} \frac{d\epsilon}{d\rho_\mathrm{m}} \right). \tag{8.37}$$

Im Vakuum ergibt sich der Maxwellsche Spannungstensor zu

$$T_{\alpha,\beta} = \frac{1}{4\pi} E_\alpha E_\beta - \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{8\pi} E^2. \tag{8.38}$$

8.c Maxwell's Stress Tensor

Now we represent the force density **k** as divergence of a tensor

If one has such a representation, then the force acting on a volume V is given by

The force acting on the volume is such represented by a force acting on the surface. If it were isotropic $T_{\alpha,\beta} = -P\delta_{\alpha,\beta}$, we would call P the pressure acting on the surface. In the general case we consider here one calls T the stress tensor, since the pressure is anisotropic and there can be shear stress.

In order to calculate T we start from

We transform

and use $\nabla_\beta E_\alpha = \nabla_\alpha E_\beta$ because of $\mathrm{curl}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}$. This yields

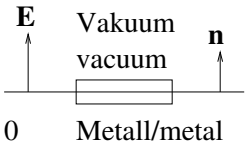
Now there is

since $\partial u / \partial D_\beta = E_\beta / (4\pi)$. This yields the expression for the stress tensor

In particular with $u = u_0(\rho_\mathrm{m}) + D^2/(8\pi\epsilon(\rho_\mathrm{m}))$, (8.6) one obtains

Maxwell's stress tensor reads in vacuum

Als Beispiel betrachten wir die elektrostatische Kraft auf ein ebenes Stück Metall der Fläche F. Wir haben auszuwerten



As an example we consider the electrostatic force on a plane piece of metal of area F. We have to evaluate

$$\mathbf{K} = \int df_\beta(\mathbf{e}_\alpha T_{\alpha,\beta}) = \left(\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}(\mathbf{En}) - \frac{1}{8\pi}\mathbf{n}E^2\right)F = \frac{1}{8\pi}E^2\mathbf{n}F. \tag{8.39}$$

Dies ist in Übereinstimmung mit dem Ergebnis aus (7.8).

This is in agreement with the result from (7.8).

C

Magnetostatik

Magnetostatics

©2003 Franz Wegner Universität Heidelberg

In diesem Kapitel behandeln wir die Magnetostatik ausgehend von den Gleichungen, die für zeitunabhängige Ströme am Anfang des Abschnittes (3.a) hergeleitet wurden.

In this chapter we consider magnetostatics starting from the equations, which were derived at the beginning of section (3.a) for time independent currents.

9 Magnetische Induktion und Vektorpotential

9 Magnetic Induction and Vector Potential

9.a Amperegesetz

Aus

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \tag{9.1}$$

folgt

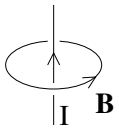
$$\int \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} \int \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}), \tag{9.2}$$

was mit Hilfe des Stokesschen Satzes (B.56)

$$\oint \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} I \tag{9.3}$$

geschrieben werden kann. Das Linienintegral der magnetischen Induktion **B** über eine geschlossene Kurve ergibt das $4\pi/c$ fache des Stromes I durch die Kurve. Dies ist das Amperesche Gesetz.

Dabei gilt die Korkenzieher-Regel: Der Strom ist in die Richtung zu messen, in die sich der Korkenzieher bei Drehung in die Richtung des Linienintegrals bewegt.



9.a Ampere's Law

From

one obtains

which can be written by means of Stokes' theorem (B.56)

. The line integral of the magnetic induction **B** along a closed line yields $4\pi/c$ times the current I through the line.

Here the corkscrew rule applies: If the current moves in the direction of the corkscrew, then the magnetic induction has the direction in which the corkscrew rotates.

9.b Magnetischer Fluss

Als magnetischen Fluss Ψ^{m} durch eine gerichtete Fläche F bezeichnet man das Integral

9.b Magnetic Flux

The magnetic flux Ψ^{m} through an oriented area F is defined as the integral

$$\Psi^{\mathrm{m}} = \int_F \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}). \tag{9.4}$$

Der magnetische Fluss hängt nur von der Berandung ∂F der Fläche ab. Zum Beweis bilden wir die Differenz des Flusses durch zwei Flächen F_1 und F_2 mit der gleichen Berandung und erhalten

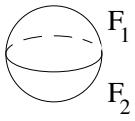
The magnetic flux depends only on the boundary ∂F of the area. To show this we consider the difference of the flux through two areas F_1 and F_2 with the same boundary and obtain

$$\Psi_1^{\mathrm{m}} - \Psi_2^{\mathrm{m}} = \int_{F_1} \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \int_{F_2} \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_F \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_V \mathrm{d}^3 r \,\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \tag{9.5}$$

mit Hilfe des Gaussschen Satzes (B.59) und $\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$.

by means of the divergence theorem (B.59) and $\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$.

Dabei seien F_1 und F_2 in die gleiche Richtung (zum Beispiel nach oben) orientiert. Die geschlossene Fläche F setzt sich aus F_1 und F_2 zusammen, wobei F_2 jetzt in der umgekehrten Richtung orientiert sei.



Dann hat F eine bestimmte Orientierung (zum Beispiel nach außen) und schließt das Volumen V ein.

Suppose F_1 and F_2 are oriented in the same direction (for example upwards). Then the closed surface F is composed of F_1 and F_2, where F_2 is now oriented in the opposite direction.

Then F has a definite orientation (for example outwards) and includes the volume V.

9.c Feld einer Stromverteilung

9.c Field of a Current Distribution

Aus $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (4\pi/c)\,\mathrm{rot}\,\mathbf{j}(\mathbf{r})$ folgt wegen (B.26)

From $\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (4\pi/c)\,\mathrm{curl}\,\mathbf{j}(\mathbf{r})$ due to (B.26)

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) - \triangle\mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{9.6}$$

und $\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$

and $\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$ one obtains

$$\triangle\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{c}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}) \tag{9.7}$$

mit der Lösung

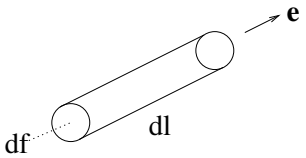
with the solution

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{rot}'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3 r' \Big(\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3 r' \frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}'), \tag{9.8}$$

wobei wir beim zweiten Gleichheitszeichen (B.63) verwendet haben. Der letzte Ausdruck wird als das Gesetz von Biot und Savart bezeichnet.

where we have used (B.63) at the second equals sign. The last expression is called the law of Biot and Savart.

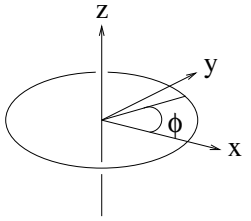
Ist die Ausdehnung eines Drahtes senkrecht zur Stromrichtung vernachlässigbar klein (Stromfaden), so kann man $\mathrm{d}^3 r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathrm{d}f' \mathrm{d}l'\, j(\mathbf{r}')\mathbf{e} = I\mathrm{d}\mathbf{r}'$ approximieren und erhält



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{c}\int \frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \times \mathrm{d}\mathbf{r}' \tag{9.9}$$

If the extension of a wire perpendicular to the direction of the current is negligible (filamentary wire) then one can approximate $\mathrm{d}^3 r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathrm{d}f' \mathrm{d}l'\, j(\mathbf{r}')\mathbf{e} = I\mathrm{d}\mathbf{r}'$ and obtains

Als Beispiel betrachten wir die Induktion in der Mittelachse eines Kreisstromes



As an example we consider the induction in the middle axis of a current along a circle

$$\mathbf{r} = z\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r}' = (R\cos\phi, R\sin\phi, z') \quad \mathrm{d}\mathbf{r}' = (-R\sin\phi, R\cos\phi, 0)\mathrm{d}\phi \tag{9.10}$$

$$(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times \mathrm{d}\mathbf{r}' = (R(z-z')\cos\phi, R(z-z')\sin\phi, R^2)\mathrm{d}\phi \tag{9.11}$$

$$\mathbf{B}(0,0,z) = \frac{2\pi I R^2 \mathbf{e}_z}{c(R^2 + (z-z')^2)^{3/2}}. \tag{9.12}$$

Davon ausgehend berechnen wir das Feld in der Mittelachse einer Spule. Sie habe N Windungen und reiche von $z' = -l/2$ bis $z' = +l/2$. Wir erhalten dann

Starting from this result we calculate the field in the axis of a coil. The number of windings be N and it extends from $z' = -l/2$ to $z' = +l/2$. Then we obtain

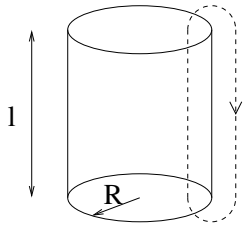
$$\mathbf{B}(0,0,z) = \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{N\mathrm{d}z'}{l} \frac{2\pi I R^2 \mathbf{e}_z}{c(R^2 + (z-z')^2)^{3/2}} = \frac{2\pi IN}{cl}\mathbf{e}_z \left(\frac{\frac{l}{2} - z}{\sqrt{R^2 + (\frac{l}{2} - z)^2}} + \frac{\frac{l}{2} + z}{\sqrt{R^2 + (\frac{l}{2} + z)^2}} \right). \tag{9.13}$$

Ist die Spule lang, $R \ll l$, dann kann man für hinreichend große Entfernung vom Spulenende das R^2 im Nenner vernachlässigen und erhält für das Innere der Spule

If the coil is long, $R \ll l$, then one may neglect R^2 and obtains inside the coil

$$\mathbf{B} = \frac{4\pi IN}{cl}\mathbf{e}_z. \tag{9.14}$$

An den Spulenenden ist das Feld auf die Hälfte des Wertes im Inneren abgefallen. Aus dem Ampereschen Gesetz folgt bei Integration längs des in der Figur angegebenen Weges



At the ends of the coil the field has decayed to one half of its intensity inside the coil. From Ampere's law one obtains by integration along the path described in the figure

$$\oint \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} IN. \tag{9.15}$$

Daher gilt im Innern näherungsweise der in (9.14) bestimmte Wert, während außerhalb die magnetische Induktion klein dagegen ist.

Thus inside the coil one obtains the induction (9.14), whereas the magnetic induction outside is comparatively small.

9.d Vektorpotential

Wir formen den Ausdruck für die magnetische Induktion um

9.d Vector Potential

We now rewrite the expression for the magnetic induction

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3 r' \left(\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3 r' \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}) \tag{9.16}$$

mit

with

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3 r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{9.17}$$

Man bezeichnet $\mathbf{A}$ als das Vektorpotential. Man betrachte den analogen Zusammenhang zwischen Ladungsdichte ρ und dem elektrischen Potential Φ in der Elektrostatik (3.14). Wir zeigen noch, dass $\mathbf{A}$ divergenzfrei ist

One calls $\mathbf{A}$ the vector potential. Consider the analog relation between charge density ρ and the electric potential ϕ in electrostatics (3.14). We show that $\mathbf{A}$ is divergence-free

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3 r' \left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3 r' \left(\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')$$

$$= \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla'\mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0. \tag{9.18}$$

Bei dem dritten Gleichheitszeichen haben wir partiell integriert (B.62). Am Schluss haben wir $\operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$ verwendet.

At the third equals sign we have performed a partial integration (B.62). Finally we have used $\operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$.

9.e Kraft zwischen zwei Stromkreisen

Wir betrachten noch die Kraft zwischen zwei Stromkreisen. Die Kraft, die der Stromkreis (1) auf den Stromkreis (2) ausübt, ist

9.e Force Between Two Circuits

Finally, we consider the force between two circuits. The force exerted by circuit (1) on circuit (2) is

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_2 &= \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r\mathbf{j}_2(\mathbf{r})\times\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{c^2}\int \mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3r'\mathbf{j}_2(\mathbf{r})\times\left(\left(\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\times\mathbf{j}_1(\mathbf{r}')\right)\\ &= \frac{1}{c^2}\int \mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3r'\Big(\mathbf{j}_1(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r})\Big)\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{c^2}\int \mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3r'\left(\left(\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r})\right)\mathbf{j}_1(\mathbf{r}')\end{aligned} \tag{9.19}$$

unter Verwendung von (B.14). Da wegen (B.62)

where (B.14) has been applied. Since due to (B.62)

$$\int \mathrm{d}^3r\Big(\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big)\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) = -\int \mathrm{d}^3r\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) \tag{9.20}$$

und $\operatorname{div}\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) = 0$, folgt schließlich für die Kraft

and $\operatorname{div}\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) = 0$, one obtains finally for the force

$$\mathbf{K}_2 = \frac{1}{c^2}\int \mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3r'\Big(\mathbf{j}_1(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r})\Big)\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{9.21}$$

Die auf den ersten Stromkreis wirkende Kraft erhält man durch Austauschen von 1 und 2. Gleichzeitig kann man $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ austauschen. Man sieht dann, dass

The force acting on circuit (1) is obtained by exchanging 1 and 2. Simultaneously, one can exchange $\mathbf{r}$ and $\mathbf{r}'$. One sees then that

$$\mathbf{K}_1 = -\mathbf{K}_2 \tag{9.22}$$

gilt.

holds.

Aufgabe Berechne die Kraft zwischen zwei von Strömen I_1 und I_2 durchlaufenen Drähten, die über die Länge l parallel im Abstand r ($r \ll l$) laufen. Hieraus bestimmten Kohlrausch und Weber die Lichtgeschwindigkeit.

Exercise Calculate the force between two wires of length l carrying currents I_1 and I_2 which run parallel in a distance r ($r \ll l$). Kohlrausch and Weber measured this force in order to determine the velocity of light.

10 Ringströme als magnetische Dipole

10.a Lokalisierte Stromverteilung und magnetischer Dipol

Wir betrachten eine Stromverteilung, die außerhalb einer Kugel vom Radius R verschwindet ($\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathbf{0}$ für $r' > R$) und fragen nach der magnetischen Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ für $r > R$. Wir können dann das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (9.17) ähnlich wie das elektrische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ in Abschnitt (4) entwickeln

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{cr}\int \mathrm{d}^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \frac{x_\alpha}{cr^3}\int \mathrm{d}^3r' x'_\alpha \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \ldots \tag{10.1}$$

Da durch die Kugeloberfläche kein Strom fließt, folgt

$$0 = \int \mathrm{d}\mathbf{f}\cdot g(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}^3r \,\mathrm{div}\,(g(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r})) = \int \mathrm{d}^3r \,\mathrm{grad}\, g(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}) + \int \mathrm{d}^3r g(\mathbf{r})\,\mathrm{div}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}), \tag{10.2}$$

wobei die Integrale über die Oberfläche beziehungsweise das Volumen der Kugel erstreckt werden. Aus der Kontinuitätsgleichung (1.12,3.1) folgt also

$$\int \mathrm{d}^3r \,\mathrm{grad}\, g(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0. \tag{10.3}$$

Dies verwenden wir, um die Integrale in der Entwicklung (10.1) zu vereinfachen. Mit $g(\mathbf{r}) = x_\alpha$ folgt

$$\int \mathrm{d}^3r\, j_\alpha(\mathbf{r}) = 0. \tag{10.4}$$

Damit fällt der erste Term der Entwicklung weg. Es gibt keinen mit $1/r$ abfallenden Beitrag im Vektorpotential für die Magnetostatik, das heißt keinen magnetischen Monopol. Mit $g(\mathbf{r}) = x_\alpha x_\beta$ folgt

$$\int \mathrm{d}^3r\Big(x_\alpha j_\beta(\mathbf{r}) + x_\beta j_\alpha(\mathbf{r})\Big) = 0. \tag{10.5}$$

Damit können wir umformen

$$\int \mathrm{d}^3r x_\alpha j_\beta = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r(x_\alpha j_\beta - x_\beta j_\alpha) + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r(x_\alpha j_\beta + x_\beta j_\alpha). \tag{10.6}$$

Das zweite Integral verschwindet, wie wir gerade gesehen haben. Das erste ändert sein Vorzeichen bei Austausch der Indices α und β. Man führt ein

$$\int \mathrm{d}^3r x_\alpha j_\beta = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r(x_\alpha j_\beta - x_\beta j_\alpha) = c\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}m_\gamma \tag{10.7}$$

und bezeichnet den sich daraus ergebenden Vektor

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\int \mathrm{d}^3r'(\mathbf{r}'\times\mathbf{j}(\mathbf{r}')) \tag{10.8}$$

10 Loops of Current as Magnetic Dipoles

10.a Localized Current Distribution and Magnetic Dipole

We consider a distribution of currents which vanishes outside a sphere of radius R ($\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathbf{0}$ for $r' > R$) and determine the magnetic induction $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ for $r > R$. We may expand the vector potential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (9.17) similar to the electric potential $\Phi(\mathbf{r})$ in section (4)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{cr}\int \mathrm{d}^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \frac{x_\alpha}{cr^3}\int \mathrm{d}^3r' x'_\alpha \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \ldots \tag{10.1}$$

Since no current flows through the surface of the sphere one obtains

$$0 = \int \mathrm{d}\mathbf{f}\cdot g(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}^3r \,\mathrm{div}\,(g(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r})) = \int \mathrm{d}^3r \,\mathrm{grad}\, g(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}) + \int \mathrm{d}^3r g(\mathbf{r})\,\mathrm{div}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}), \tag{10.2}$$

where the integrals are extended over the surface and the volume of the sphere, respectively. From the equation of continuity (1.12,3.1) it follows that

$$\int \mathrm{d}^3r \,\mathrm{grad}\, g(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0. \tag{10.3}$$

This is used to simplify the integral in the expansion (10.1). With $g(\mathbf{r}) = x_\alpha$ one obtains

$$\int \mathrm{d}^3r\, j_\alpha(\mathbf{r}) = 0. \tag{10.4}$$

Thus the first term in the expansion vanishes. There is no contribution to the vector potential decaying like $1/r$ in magnetostatics, i.e. there is no magnetic monopole. With $g(\mathbf{r}) = x_\alpha x_\beta$ one obtains

$$\int \mathrm{d}^3r\Big(x_\alpha j_\beta(\mathbf{r}) + x_\beta j_\alpha(\mathbf{r})\Big) = 0. \tag{10.5}$$

Thus we can rewrite

$$\int \mathrm{d}^3r x_\alpha j_\beta = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r(x_\alpha j_\beta - x_\beta j_\alpha) + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r(x_\alpha j_\beta + x_\beta j_\alpha). \tag{10.6}$$

The second integral vanishes, as we have seen. The first one changes its sign upon exchanging the indices α and β. One introduces

$$\int \mathrm{d}^3r x_\alpha j_\beta = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r(x_\alpha j_\beta - x_\beta j_\alpha) = c\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}m_\gamma \tag{10.7}$$

and calls the resulting vector

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\int \mathrm{d}^3r'(\mathbf{r}'\times\mathbf{j}(\mathbf{r}')) \tag{10.8}$$

als das magnetische Dipolmoment. Damit folgt dann

$$A_\beta(\mathbf{r}) = \frac{x_\alpha}{cr^3} c\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} m_\gamma + ... \tag{10.9}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3} + ... \tag{10.10}$$

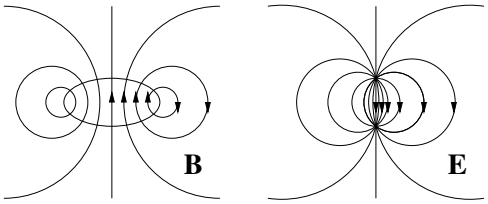
Mit $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r})$ folgt

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{m}r^2}{r^5} + ... \tag{10.11}$$

Dies ist das Feld eines magnetischen Dipols. Es hat die gleiche Form wie das elektrische Feld des elektrischen Dipols (4.12)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad}\Big(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\Big) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{p}r^2}{r^5}, \tag{10.12}$$

aber es besteht ein Unterschied am Ort des Dipols. Anschaulich entnimmt man das der nebenstehenden Figur. Man berechne den $\delta^3(\mathbf{r})$-Beitrag zu den beiden Dipolmomenten. Vergleiche (B.71).



10.b Magnetisches Dipolmoment eines Ringstroms

Für das Dipolmoment eines Stromes auf einer geschlossenen Kurve erhält man

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2c}\int \mathbf{r}\times\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{I}{c}\mathbf{f}, \tag{10.13}$$

zum Beispiel

$$m_z = \frac{I}{2c}\int (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) = \frac{I}{c} f_z. \tag{10.14}$$

Dabei ist f_α die Projektion der vom Leiter eingeschlossenen Fläche auf die von den beiden anderen Achsen aufgespannte Ebene

$$\mathrm{d}\mathbf{f} = \frac{1}{2}\mathbf{r}\times\mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{10.15}$$

Falls $\mathbf{j} = \sum_i q_i\mathbf{v}_i\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)$, dann folgt für das magnetische Moment aus (10.8)

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\sum_i q_i\mathbf{r}_i\times\mathbf{v}_i = \sum_i \frac{q_i}{2m_i c}\mathbf{l}_i, \tag{10.16}$$

wobei m_i für die Masse und $\mathbf{l}_i$ für den Drehimpuls steht. Haben wir es mit einer Sorte Ladungsträger zu tun, dann gilt

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2mc}\mathbf{l}. \tag{10.17}$$

10.b Magnetic Dipolar Moment of a Current Loop

The magnetic dipolar moment of a current on a closed curve yields

e.g.

Here f_α is the projection of the area inside the loop onto the plane spanned by the two other axes

If $\mathbf{j} = \sum_i q_i\mathbf{v}_i\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)$, then using (10.8) the magnetic moment reads

where m_i is the mass and $\mathbf{l}_i$ the angular momentum. If only one kind of charges is dealt with, then one has

Dies gilt für Orbitalströme. Für Spins hat man dagegen

This applies for orbital currents. For spins, however, one has

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2mc} g\mathbf{s}, \tag{10.18}$$

wobei $\mathbf{s}$ der Drehimpuls des Spins ist. Für Elektronen ist der gyromagnetische Faktor $g = 2.0023$ und die Komponenten des Spins $\mathbf{s}$ nehmen die Werte $\pm\hbar/2$ an. Da der Bahndrehimpuls quantenmechanisch ganzzahlige Vielfache von $\hbar$ annimmt, führt man als Einheit des magnetischen Moments des Elektrons das Bohrsche Magneton ein, $\mu_B = \frac{e_0\hbar}{2m_0c} = 0.927 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^2$.

where $\mathbf{s}$ is the angular momentum of the spin. The gyromagnetic factor for electrons is $g = 2.0023$ and the components of the spin $\mathbf{s}$ are $\pm\hbar/2$. Since in quantum mechanics the orbital angular momentum assumes integer multiples of $\hbar$, one introduces as unit for the magnetic moment of the electron Bohr's magneton, $\mu_B = \frac{e_0\hbar}{2m_0c} = 0.927 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^2$.

10.c Kraft und Drehmoment auf einen Dipol im äußeren magnetischen Feld

10.c Force and Torque on a Dipole in an External Magnetic Field

10.c.α Kraft

Eine äußere magnetische Induktion $\mathbf{B}_\mathrm{a}$ übt auf einen Ringstrom die Lorentz-Kraft

$$\mathbf{K} = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3 r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}_\mathrm{a}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c}\mathbf{B}_\mathrm{a}(0) \times \int \mathrm{d}^3 r \mathbf{j}(\mathbf{r}) - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha} \times \int \mathrm{d}^3 r x_\alpha j_\beta(\mathbf{r}) \mathbf{e}_\beta - \ldots = -\frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha} \times \mathbf{e}_\beta \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} m_\gamma \tag{10.19}$$

aus. Wir formen $m_\gamma \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \mathbf{e}_\beta = m_\gamma \mathbf{e}_\gamma \times \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{m} \times \mathbf{e}_\alpha$ um und finden

. We rewrite $m_\gamma \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \mathbf{e}_\beta = m_\gamma \mathbf{e}_\gamma \times \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{m} \times \mathbf{e}_\alpha$ and find

$$\mathbf{K} = -\frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{e}_\alpha) = (\mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha})\mathbf{e}_\alpha - (\mathbf{e}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha})\mathbf{m}. \tag{10.20}$$

Der letzte Term verschwindet wegen $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$. Für den ersten Term der rechten Seite erhalten wir $(\mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha})\mathbf{e}_\alpha = m_\gamma \frac{\partial B_{\mathrm{a},\gamma}}{\partial x_\alpha}\mathbf{e}_\alpha = m_\gamma \frac{\partial B_{\mathrm{a},\alpha}}{\partial x_\gamma}\mathbf{e}_\alpha = (\mathbf{m}\nabla)\mathbf{B}_\mathrm{a}$, wobei wir $\operatorname{rot}\mathbf{B}_\mathrm{a} = \mathbf{0}$ in der Gegend des Dipols verwendet haben. Daher bleibt

The last term vanishes because of $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$. The first term on the right hand side can be written $(\mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha})\mathbf{e}_\alpha = m_\gamma \frac{\partial B_{\mathrm{a},\gamma}}{\partial x_\alpha}\mathbf{e}_\alpha = m_\gamma \frac{\partial B_{\mathrm{a},\alpha}}{\partial x_\gamma}\mathbf{e}_\alpha = (\mathbf{m}\nabla)\mathbf{B}_\mathrm{a}$, where we have used $\operatorname{curl}\mathbf{B}_\mathrm{a} = \mathbf{0}$ in the region of the dipole. Thus we obtain the force

$$\mathbf{K} = (\mathbf{m}\operatorname{grad})\mathbf{B}_\mathrm{a} \tag{10.21}$$

als Kraft auf den magnetischen Dipol ausgedrückt durch den Vektorgradienten (B.18). Dies ist in Analogie zu (4.35), wo wir als Kraft auf den elektrischen Dipol $(\mathbf{p}\operatorname{grad})\mathbf{E}_\mathrm{a}$ erhielten.

acting on the magnetic dipole expressed by the vector gradient (B.18). This is in analogy to (4.35), where we obtained the force $(\mathbf{p}\operatorname{grad})\mathbf{E}_\mathrm{a}$ acting on an electric dipole.

10.c.β Drehmoment

Das mechanische Drehmoment auf den magnetischen Dipol ergibt sich zu

10.c.β Torque

The torque on a magnetic dipole is given by

$$\mathbf{M}_\mathrm{mech} = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3 r \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}_\mathrm{a}) = -\frac{1}{c}\mathbf{B}_\mathrm{a}\int \mathrm{d}^3 r(\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) + \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3 r(\mathbf{B}_\mathrm{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{j}. \tag{10.22}$$

Das erste Integral verschwindet, was man mit (10.3) und $g = r^2/2$ leicht sieht. Das zweite Integral ergibt

The first integral vanishes, which is easily seen from (10.3) and $g = r^2/2$. The second integral yields

$$\mathbf{M}_\mathrm{mech} = \frac{1}{c}\mathbf{e}_\beta B_{\mathrm{a},\alpha}\int \mathrm{d}^3 r x_\alpha j_\beta = B_{\mathrm{a},\alpha}\mathbf{e}_\beta \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} m_\gamma = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_\mathrm{a} \tag{10.23}$$

Analog war das Drehmoment auf einen elektrischen Dipol $\mathbf{p} \times \mathbf{E}_\mathrm{a}$, (4.36).

Analogously the torque on an electric dipole was $\mathbf{p} \times \mathbf{E}_\mathrm{a}$, (4.36).

Aus dem Kraftgesetz schließt man auf die Energie eines magnetischen Dipols im äußeren Feldes zu

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_\mathrm{a}. \tag{10.24}$$

Das ist korrekt für permanente magnetische Dipole. Aber das genaue Zustandekommen dieses Ausdrucks wird erst bei Behandlung des Induktionsgesetzes klar (Abschnitt 13).

From the law of force one concludes the energy of a magnetic dipole in an external field as

This is correct for permanent magnetic moments. However, the precise derivation of this expression becomes clear only when we treat the law of induction (section 13).

11 Magnetismus in Materie. Feld einer Spule

11.a Magnetismus in Materie

Ähnlich wie wir die Polarisationsladungen in der Elektrostatik von den freibeweglichen Ladungen separiert haben, zerlegen wir die Stromdichte in eine freibewegliche Ladungsstromdichte $\mathbf{j}_\mathrm{f}$ und in die Magnetisierungsstromdichte $\mathbf{j}_\mathrm{M}$, die etwa von Orbitalströmen der Elektronen herrührt

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_\mathrm{M}(\mathbf{r}). \tag{11.1}$$

Wir führen dazu die Magnetisierung als magnetische Dipoldichte ein

$$\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{m}_i}{\Delta V} \tag{11.2}$$

und führen wieder den Grenzübergang zum Kontinuum durch

$$\sum_i \mathbf{m}_i f(\mathbf{r}_i) \to \int \mathrm{d}^3 r' \mathbf{M}(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}'). \tag{11.3}$$

Dann erhalten wir für das Vektorpotential unter Verwendung von (10.10)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{11.4}$$

Das zweite Integral lässt sich umformen in

$$\int \mathrm{d}^3 r' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}'), \tag{11.5}$$

so dass man

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} (\mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}') + c \operatorname{rot}' \mathbf{M}(\mathbf{r}')) \tag{11.6}$$

erhält. Es liegt nahe,

$$\mathbf{j}_\mathrm{M}(\mathbf{r}') = c \operatorname{rot}' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \tag{11.7}$$

als Magnetisierungsstromdichte zu interpretieren. Damit folgt dann für die magnetische Induktion

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r}). \tag{11.8}$$

Man führt nun die magnetische Feldstärke

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) := \mathbf{B}(\mathbf{r}) - 4\pi \mathbf{M}(\mathbf{r}) \tag{11.9}$$

ein, für die dann die Maxwellgleichung

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) \tag{11.10}$$

11 Magnetism in Matter. Field of a Coil

11.a Magnetism in Matter

In a similar way as we separated the polarization charges from freely accessible charges, we divide the current density into a freely moving current density $\mathbf{j}_\mathrm{f}$ and the density of the magnetization current $\mathbf{j}_\mathrm{M}$, which may come from orbital currents of electrons

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_\mathrm{M}(\mathbf{r}). \tag{11.1}$$

We introduce the magnetization as the density of magnetic dipoles

$$\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{m}_i}{\Delta V} \tag{11.2}$$

and conduct the continuum limit

$$\sum_i \mathbf{m}_i f(\mathbf{r}_i) \to \int \mathrm{d}^3 r' \mathbf{M}(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}'). \tag{11.3}$$

Then using (10.10) we obtain for the vector potential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{11.4}$$

The second integral can be rewritten

$$\int \mathrm{d}^3 r' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}'), \tag{11.5}$$

so that one obtains

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} (\mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}') + c \operatorname{rot}' \mathbf{M}(\mathbf{r}')) \tag{11.6}$$

. Thus one interprets

$$\mathbf{j}_\mathrm{M}(\mathbf{r}') = c \operatorname{rot}' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \tag{11.7}$$

as the density of the magnetization current. Then one obtains for the magnetic induction

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r}). \tag{11.8}$$

Now one introduces the magnetic field strength

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) := \mathbf{B}(\mathbf{r}) - 4\pi \mathbf{M}(\mathbf{r}) \tag{11.9}$$

for which Maxwell's equation

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) \tag{11.10}$$

gilt. An der anderen Maxwellgleichung $\operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$ ändert sich dadurch nichts.

holds. Maxwell's equation $\operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$ remains unchanged.

Für para- und diamagnetische Substanzen ist für nicht zu große Feldstärken

One obtains for paramagnetic and diamagnetic materials in not too strong fields

$$\mathbf{M} = \chi_\mathrm{m}\mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mu = 1 + 4\pi\chi_\mathrm{m}, \tag{11.11}$$

wobei χ_m als magnetische Suszeptibilität und μ als relative Permeabilität bezeichnet werden. Im Supraleiter erster Art ist $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ (vollständiger Diamagnetismus). Die magnetische Induktion wird dort durch Oberflächenströme vollständig aus dem Material verdrängt.

where χ_m is the magnetic susceptibility and μ the permeability. In superconductors (of first kind) one finds complete diamagnetism $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. There the magnetic induction is completely expelled from the interior by surface currents.

Als Randbedingungen folgt analog zur Argumentation für die dielektrische Verschiebung und die elektrische Feldstärke die Stetigkeit der Normalkomponente B_n und bei Abwesenheit von Leitungsströmen die Stetigkeit der Tangentialkomponenten $\mathbf{H}_\mathrm{t}$.

In analogy to the arguments for the dielectric displacement and the electric field one obtains that the normal component B_n is continuous, and in the absence of conductive currents also the tangential components $\mathbf{H}_\mathrm{t}$ are continuous across the boundary.

Im Gaussschen Maßsystem werden $\mathbf{M}$ und $\mathbf{H}$ genau so wie $\mathbf{B}$ in $\mathrm{dyn}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{-1}$ gemessen, während im SI-System $\mathbf{B}$ in $\mathrm{Vs/m^2}$, $\mathbf{H}$ und $\mathbf{M}$ in A/m gemessen werden. Dabei bestehen für $\mathbf{H}$ und $\mathbf{M}$ Umrechnungsfaktoren, die sich durch einen Faktor 4π unterscheiden. Genaueres siehe Anhang A.

In the Gaussian system of units the fields $\mathbf{M}$ and $\mathbf{H}$ are measured just as $\mathbf{B}$ in $\mathrm{dyn}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{-1}$, whereas in SI-units $\mathbf{B}$ is measured in $\mathrm{Vs/m^2}$, $\mathbf{H}$ and $\mathbf{M}$ in A/m. The conversion factors for $\mathbf{H}$ and $\mathbf{M}$ differ by a factor 4π. For more information see appendix A.

11.b Feld einer Spule

11.b Field of a coil

Das Feld einer Spule längs ihrer Achse haben wir in (9.13) bestimmt. Wir wollen nun generell das Feld einer zylindrischen Spule bestimmen. Dabei wollen wir zunächst ein elektrisches Analogon einführen. Das Feld zweier Ladungen q und $-q$ an den Orten $\mathbf{r}_2$ und $\mathbf{r}_1$ ist äquivalent zum Feld einer Linie elektrischer Dipole $\mathrm{d}\mathbf{p} = q\mathrm{d}\mathbf{r}'$ von $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_1$ bis $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_2$. In der Tat finden wir für das Potential

The field of a coil along its axis was determined in (9.13). We will now determine the field of a cylindrical coil in general. In order to do so we firstly consider an electric analogy. The field between two charges q and $-q$ at $\mathbf{r}_2$ and $\mathbf{r}_1$ is equivalent to a line of electric dipoles $\mathrm{d}\mathbf{p} = q\mathrm{d}\mathbf{r}'$ from $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_1$ to $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_2$. Indeed we obtain for the potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\mathrm{d}\mathbf{p}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{q(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = -\frac{q}{2}\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{\mathrm{d}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|} - \frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} \tag{11.12}$$

und damit das Feld

and thus for the field

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = q\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^3} - \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3}\right). \tag{11.13}$$

Das magnetische Analogon besteht nun darin, sich eine lange dünne Spule aus magnetischen Dipolen

The magnetic analogy is to think of a long thin coil as consisting of magnetic dipoles

$$\mathrm{d}\mathbf{m} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}l}\frac{f}{c}\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{NIf}{lc}\mathrm{d}\mathbf{r} \tag{11.14}$$

zusammengesetzt zu denken. Berücksichtigen wir, dass das Feld des elektrischen und des magnetischen Dipols die gleiche Form haben (10.11, 10.12) ausser am Ort des Dipols, so folgt, in dem wir q durch $q_\mathrm{m} = NIf/(lc)$ ersetzen, die magnetische Induktion

. If we consider that the field of the electric and the magnetic dipole have the same form (10.11, 10.12) except at the point of the dipole, then it follows that we may replace q by $q_\mathrm{m} = NIf/(lc)$ in order to obtain the magnetic induction

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = q_\mathrm{m}\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^3} - \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3}\right). \tag{11.15}$$

Das Feld hat also eine Form, die man durch zwei magnetische Monopole der Polstärke q_m und $-q_\mathrm{m}$ beschreiben kann. Allerdings ist am Ort der Dipole das Feld im magnetischen Fall ein anderes. Dort, das heißt im Inneren der Spule, muss nämlich wegen der Divergenzfreiheit des Feldes bzw. um das Amperesche Gesetz zu erfüllen ein zusätzliches Feld $B = 4\pi NI/(lc)$ zurückfließen.

Thus the field has a form which can be described by two magnetic monopoles with strengths q_m und $-q_\mathrm{m}$. However, at the positions of the dipoles the field differs in the magnetic case. There, i.e. inside the coil an additional field $B = 4\pi NI/(lc)$ flows back so that the field is divergency free and fulfills Ampere's law.

Etwas genauer bekommt man das mit folgender Überlegung: Wir stellen die Stromdichte in Analogie zu (11.7) als Rotationen einer fiktiven Magnetisierung $\mathbf{j}_\mathrm{f} = c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M}_\mathrm{f}(\mathbf{r})$ dar. Für ein zylindrische Spule (der Querschnitt muss nicht kreisförmig zu sein) parallel zur z-Achse setzt man einfach $\mathbf{M}_\mathrm{f} = NI\mathbf{e}_z/(cl)$ im Inneren der Spule, außerhalb $\mathbf{M}_\mathrm{f} = \mathbf{0}$. Dann folgt aus

In order to obtain the result in a more precise way one uses the following consideration: We represent the current density in analogy to (11.7) as curl of a fictitious magnetization $\mathbf{j}_\mathrm{f} = c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M}_\mathrm{f}(\mathbf{r})$ inside the coil, outside $\mathbf{M}_\mathrm{f} = \mathbf{0}$. For a cylindrical (its cross-section needs not be circular) coil parallel to the z-axis one puts simply $\mathbf{M}_\mathrm{f} = NI\mathbf{e}_z/(cl)$. Then one obtains from

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) = 4\pi\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M}_\mathrm{f} \tag{11.16}$$

die Induktion $\mathbf{B}$ in der Form

the induction $\mathbf{B}$ in the form

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 4\pi\mathbf{M}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) - \mathrm{grad}\,\Psi(\mathbf{r}). \tag{11.17}$$

Die Funktion Ψ bestimmt sich aus

The function Ψ is determined from

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 4\pi\,\mathrm{div}\,\mathbf{M}_\mathrm{f} - \triangle\Psi = 0 \tag{11.18}$$

zu

as

$$\Psi(\mathbf{r}) = -\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\mathrm{div}'\mathbf{M}_\mathrm{f}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{11.19}$$

Im vorliegenden Fall einer zylindrischen Spule ergibt die Divergenz einen Beitrag $\delta(z-z_1)NI/(cl)$ an der Grundfläche und einen Beitrag $-\delta(z-z_2)NI/(cl)$ an der Deckfläche der Spule, da die Normalkomponente von $\mathbf{B}$ auf diesen Flächen um $NI/(cl)$ springt, so dass

The divergency yields in the present case of a cylindrical coil a contribution $\delta(z-z_1)NI/(cl)$ at the covering and a contribution $-\delta(z-z_2)NI/(cl)$ at the basal surface of the coil, since the component of $\mathbf{B}$ normal to the surface jumps by $NI/(cl)$, which yields

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{NI}{cl}\left(\int_{F_2}\frac{\mathrm{d}^2r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \int_{F_1}\frac{\mathrm{d}^2r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \tag{11.20}$$

bleibt, wobei F_2 die Deckfläche und F_1 die Grundfläche ist. Man erhält also daraus eine magnetische Induktion, als ob auf der Deckfläche und der Grundfläche der Spule eine magnetische Ladung der Flächenladungsdichte $\pm NI/(cl)$ vorhanden wäre. Dieser Beitrag führt zu einem Sprung in der Induktion an Deck- und Grundfläche, die aber durch den zusätzlichen Beitrag $4\pi\mathbf{M}_\mathrm{f}$ in der Spule kompensiert wird. Die gesamte Polstärke ergibt sich als Deck-(Grund-)fläche mal Flächenladungsdichte zu $\pm q_\mathrm{m}$.
Man bezeichnet $\Psi(\mathbf{r})$ als magnetisches Potential. Wegen des zusätzlichen Beitrags $4\pi\mathbf{M}_\mathrm{f}(\mathbf{r})$ in (11.17) ist es im Gegensatz zu den Potentialen $\Phi(\mathbf{r})$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ nur von bedingtem Nutzen. Wir werden es im Weiteren nicht verwenden.

, where F_2 is the covering and F_1 the basal surface. Thus one obtains an induction, as if there were magnetic charge densities $\pm NI/(cl)$ per area at the covering and the basal surface. This contribution yields a discontinuity of the induction at these parts of the surface which is compensated by the additional contribution $4\pi\mathbf{M}_\mathrm{f}$ inside the coil. The total strength of pole $\pm q_\mathrm{m}$ is the area of the basal (ground) surface times the charge density per area.

One calls $\Psi(\mathbf{r})$ the magnetic potential. In view of the additional contribution $4\pi\mathbf{M}_\mathrm{f}(\mathbf{r})$ in (11.17) it is in contrast to the potentials $\Phi(\mathbf{r})$ and $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ only of limited use. We will not use it in the following.

Aufgabe Man berechne Magnetfeld und magnetische Induktion für den Fall, dass die Spule mit einem Kern der Permeabilität μ gefüllt ist.

Exercise Calculate magnetic field and magnetic induction for the coil filled by a core of permeability μ.

Aufgabe Man zeige, dass die z-Komponente der magnetischen Induktion proportional zur Differenz des Raumwinkels ist, unter dem vom jeweiligen Ort die (durchsichtig gedachte) Windungsfläche von außen und von innen erscheint.

Exercise Show that the z-component of the magnetic induction is proportional to the difference of the solid angles under which the (transparently thought) coil appears from outside and from inside.

D

Induktionsgesetz

Law of Induction

©2003 Franz Wegner Universität Heidelberg

12 Faradaysches Induktionsgesetz

Die Kraft auf Ladungsträger ist $q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}/c)$. Dabei ist es für die Ladungsträger einerlei, ob die Kraft vom elektrischen oder vom magnetischen Feld herrührt. Sie spüren also in einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld eine effektive Feldstärke

$$\mathbf{E}^{(\mathrm{ind})} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B} \tag{12.1}$$

mit $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}/c$. Die längs einer Leiterschleife induzierte Spannung beträgt daher

$$V^{(\mathrm{ind})} = \oint \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} + \oint(\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B})\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{12.2}$$

Das erste Integral ergibt einen Beitrag auf Grund der Magnetfeldveränderung. Für eine raumfeste Leiterschleife und veränderliches $\mathbf{B}$ folgt (da $\mathbf{v}\parallel\mathrm{d}\mathbf{r}$)

$$V^{(\mathrm{ind})} = \oint \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int \operatorname{rot}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{f} = -\frac{1}{c}\int\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{f} = -\frac{1}{c}\left.\frac{\mathrm{d}\Psi^{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{Schleife fest}\ \text{loop fixed}}. \tag{12.3}$$

Das zweite Integral in (12.2) bringt einen Beitrag auf Grund der Bewegung der Leiterschleife. Um eine Leiterschleife zu untersuchen, die sich bewegt (und verbiegt), verwenden wir eine Parameterdarstellung der Leiterschleife $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t,p)$ mit dem körperfesten Parameter p. Für festes t gilt dann $\mathrm{d}\mathbf{r} = (\partial\mathbf{r}/\partial p)\mathrm{d}p$ und

$$\mathbf{v} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} + \lambda(p,t)\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p} \tag{12.4}$$

mit einem $\lambda = \mathrm{d}p/\mathrm{d}t$, das von der Bewegung der Ladungen auf dem Leiter abhängt. Es folgt dann

$$\mathrm{d}t\oint\Big(\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\Big)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = -\frac{1}{c}\int\Big(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p}\Big)\cdot\mathbf{B}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{c}\int\mathrm{d}\mathbf{f}\cdot\mathbf{B}, \tag{12.5}$$

da $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}t$ gerade das Flächenelement ist, das in der Zeit $\mathrm{d}t$ vom Leiterelement $\mathrm{d}p$ überstrichen wird. Wir finden daher

12 Faraday's Law of Induction

The force acting on charges is $q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}/c)$. It does not matter for the charges, whether the force is exerted by the electric field or by the magnetic induction. Thus they experience in a time-dependent magnetic field an effective electric field

$$\mathbf{E}^{(\mathrm{ind})} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B} \tag{12.1}$$

with $\operatorname{curl}\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}/c$. Therefore the voltage along a loop of a conductor is given by

$$V^{(\mathrm{ind})} = \oint \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} + \oint(\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B})\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{12.2}$$

The first integral gives a contribution due to the variation of the magnetic induction. For a fixed loop and varying $\mathbf{B}$ one obtains (since $\mathbf{v}\parallel\mathrm{d}\mathbf{r}$)

$$V^{(\mathrm{ind})} = \oint \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int \operatorname{rot}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{f} = -\frac{1}{c}\int\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{f} = -\frac{1}{c}\left.\frac{\mathrm{d}\Psi^{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{Schleife fest}\ \text{loop fixed}}. \tag{12.3}$$

The second integral in (12.2) gives a contribution due to the motion of the loop. In order to investigate a loop which moves (and is distorted) we use a parameter representation of the loop $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t,p)$ with the body-fixed parameter p. For fixed t we have $\mathrm{d}\mathbf{r} = (\partial\mathbf{r}/\partial p)\mathrm{d}p$ and

$$\mathbf{v} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} + \lambda(p,t)\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p} \tag{12.4}$$

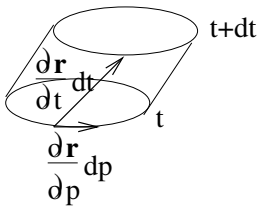
with a $\lambda = \mathrm{d}p/\mathrm{d}t$ which depends on the motion of the charges in the conductor. This yields

$$\mathrm{d}t\oint\Big(\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\Big)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = -\frac{1}{c}\int\Big(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p}\Big)\cdot\mathbf{B}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{c}\int\mathrm{d}\mathbf{f}\cdot\mathbf{B}, \tag{12.5}$$

since $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}t$ is the element of the area which in time $\mathrm{d}t$ is swept over by the conductor element $\mathrm{d}p$. Therefore we obtain

$$\oint (\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \left.\frac{\mathrm{d}\Psi^m}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathbf{B}_{\text{fest}}\ \text{fixed}} . \tag{12.6}$$

Die gesamte induzierte Spannung setzt sich aus der Änderung des Magnetflusses durch Änderung der magnetischen Induktion (12.3) und der Änderung der Leiterschleife (12.6) zusammen



The total induced voltage is composed by the change of the magnetic flux due to the change of the magnetic induction (12.3) and by the motion of the loop (12.6)

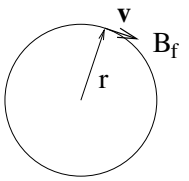
$$V^{(\text{ind})} = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\Psi^{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}, \tag{12.7}$$

ist also durch die totale Änderung des magnetischen Flusses durch die Leiterschleife gegeben.
Es ist für einen Generator gleichgültig, ob das erzeugende magnetische Feld rotiert oder die Spule, in der die Spannung induziert wird.

and is thus given by the total change of the magnetic flux through the loop.
Thus it does not matter for a generator whether the generating magnetic field rotates or whether the coil is rotating.

Das Betatron (nicht relativistisch)

Die Elektronen bewegen sich auf einer Kreisbahn und werden auf dieser durch die Lorentz-Kraft, die vom Führungsfeld B_f ausgeht, gehalten. Dann müssen sich Zentrifugal-Kraft und Lorentz-Kraft kompensieren



The betatron (non-relativistic)

The electrons move along circular orbits and are kept on these by the Lorentz force exerted by the guide field B_f. Thus the centrifugal force and the Lorentz force have to compensate each other

$$\frac{mv^2}{r} = e_0\frac{v}{c}B_\mathrm{f} \quad \rightarrow \quad mv = \frac{e_0}{c}B_\mathrm{f} r. \tag{12.8}$$

Beschleunigt werden die Elektronen durch die Induktion

The electrons are accelerated by the induction

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv) = -e_0 E = \frac{e_0}{2\pi r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{c}\int B\mathrm{d}f = \frac{e_0}{2\pi r c} r^2 \pi \frac{\mathrm{d}\bar{B}}{\mathrm{d}t}. \tag{12.9}$$

Dabei ist $\bar{B}$ die mittlere magnetische Induktion innerhalb des Kreises. Man hat also

Here $\bar{B}$ is the averaged magnetic induction inside the circle. Thus one has

$$mv = \frac{e_0}{2}\bar{B}\frac{r}{c} = \frac{e_0}{c}B_\mathrm{f} r, \tag{12.10}$$

woraus die Wideröesche Bedingung $B_\mathrm{f} = \bar{B}/2$ folgt.

from which the betatron condition $B_\mathrm{f} = \bar{B}/2$ follows.

13 Induktivitäten und Stromkreise

13.a Induktivitäten

Der magnetische Fluss durch eine Spule beziehungsweise den Stromkreis $\#j$ ist gegeben durch

$$\Psi_j^{\mathrm{m}} = \int \mathrm{d}\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_j) = \int \mathrm{d}\mathbf{f}_j \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}_j) = \oint \mathrm{d}\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_j). \tag{13.1}$$

Mehrere Stromkreise erzeugen das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_k \frac{I_k}{c} \oint \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|}. \tag{13.2}$$

Daher lässt sich der magnetische Fluss ausdrücken durch

$$\frac{1}{c}\Psi_j^{\mathrm{m}} = \sum_k L_{j,k} I_k \tag{13.3}$$

mit

$$L_{j,k} = \frac{1}{c^2} \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_j \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|}. \tag{13.4}$$

Es gilt daher $L_{j,k} = L_{k,j}$. Ist $j \neq k$, so spricht man von Gegeninduktivitäten, bei $j = k$ von Selbstinduktivitäten. Bei der Berechnung der Selbstinduktivitäten nach (13.4) tritt eine logarithmische Divergenz auf, wenn man die Stromverteilung über den Querschnitt nicht berücksichtigt. Bei einem Drahtradius r_0 muss man $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k| < r_0/(2\mathrm{e}^{1/4})$ ausschließen (vgl. Becker-Sauter), falls der Strom gleichmäßig über den kreisförmigen Querschnitt verteilt ist.

Die Dimension der Induktivitäten ergibt sich zu s^2/cm. Die Umrechnung in das SI-System ist gegeben durch $1\mathrm{s}^2/\mathrm{cm} \,\hat{=}\, 9 \cdot 10^{11}\mathrm{Vs/A} = 9 \cdot 10^{11}$ H (Henry).

Sind die Bereiche des wesentlichen magnetischen Flusses mit einem Material der Permeabilität μ ausgefüllt, so folgt aus $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}_{\mathrm{f}}/c$ der Zusammenhang $\operatorname{rot}(\mathbf{B}/\mu) = 4\pi\mathbf{j}_{\mathrm{f}}/c$, so dass

$$L_{j,k}^{\mathrm{Mat}} = \mu L_{j,k}^{\mathrm{Vak}}. \tag{13.5}$$

gilt. Man erhält also hohe Induktivitäten durch Kerne hoher Permeabilität $\mu \approx 10^3 ... 10^4$ im Joch.

13.a Inductances

The magnetic flux through a coil and a circuit $\#j$, resp. is given by

Several circuits generate the vector-potential

Therefore the magnetic flux can be expressed by

with

Therefore one has $L_{j,k} = L_{k,j}$. For $j \neq k$ they are called mutual inductances, for $j = k$ self-inductances. In calculating the self-inductances according to (13.4) logarithmic divergencies appear, when $\mathbf{r}_j$ approaches $\mathbf{r}_k$, if the current distribution across the cross-section is not taken into account. The contributions $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r} - k| < r_0/(2\mathrm{e}^{1/4})$ have to be excluded from the integral, where r_0 is the radius of the circular cross-section of the wire (compare Becker-Sauter).

The dimension of the inductances is given by s^2/cm. The conversion into the SI-system is given by $1\mathrm{s}^2/\mathrm{cm}$ $\hat{=} 9 \cdot 10^{11}\mathrm{Vs/A} = 9 \cdot 10^{11}$ H (Henry).

If the regions in which the magnetic flux is of appreciable strength is filled with a material of permeability μ, then from $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}_{\mathrm{f}}/c$ one obtains $\operatorname{rot}(\mathbf{B}/\mu) = 4\pi\mathbf{j}_{\mathrm{f}}/c$, so that

holds. Thus one obtains large inductances by cores of high permeability $\mu \approx 10^3 ... 10^4$ in the yoke.

Induktivität einer langen Spule
Ist ein geschlossenes magnetisches Joch der Länge l und des Querschnitts f mit N Drahtwindungen umwickelt, die ein Strom I durchfliesst, so folgt aus dem Ampereschen Gesetz $Hl = 4\pi IN/c$ und daraus die magnetische Induktion $B = 4\pi IN\mu/(cl)$. Der magnetische Fluss lässt sich dann $Bf = cL_0NI$ mit $L_0 = 4\pi\mu f/c^2 l$ schreiben. Für N Windungen ist der magnetische Fluss mit N zu multiplizieren, was auf die Selbstinduktion $L = L_0N^2$ führt. Für die Gegeninduktivität zwischen zwei Schleifen mit N_1 und N_2 Windungen ergibt sich dann $L_{1,2} = L_0N_1N_2$. Es gilt dann also generell

Inductance of a long coil
If a closed magnetic yoke of length l and cross-section f is surrounded by N windings of wire, through which a current I flows, then from Ampere's law $Hl = 4\pi IN/c$ one obtains the magnetic induction $B = 4\pi IN\mu/(cl)$. The magnetic flux can then be written $Bf = cL_0NI$ with $L_0 = 4\pi\mu f/c^2 l$. For N turns the magnetic flux is to be multiplied by N, which yields the self-induction $L = L_0N^2$. For mutual inductances between two circuits with N_1 and N_2 turns one obtains $L_{1,2} = L_0N_1N_2$. Thus we obtain in general

$$L_{i,j} = L_0N_iN_j, \quad L_0 = \frac{4\pi\mu f}{c^2 l}. \tag{13.6}$$

13.b Stromkreis-Elemente

Wir wollen nun Stromkreise betrachten, die folgende Elemente enthalten: Spannungsquellen, Ohmsche Widerstände, Induktivitäten und Kapazitäten. Während wir Induktivitäten und Kapazitäten bereits eingeführt haben, ist noch kurz etwas zu den beiden anderen Elementen zu sagen:

Spannungsquellen Eine Spannungsquelle habe eine Spannung oder elektromotorische Kraft $V^{(e)}(t)$. Sie führt dem System die Leistung $V^{(e)}I$ zu. Ein Beispiel stellt eine Batterie dar, die chemische Energie in elektromagnetische umwandelt. Auch die Spannungen $V^{(ind)}$ der Induktivitäten zählt man zu den elektromotorischen Kräften.

Ohmsche Widerstände Für viele Materialien ist bei nicht zu großen elektrischen Feldstärken die Stromdichte der Feldstärke proportional. Der Proportionalitätskoeffizient σ heißt Leitfähigkeit

13.b Elements of Circuits

We consider now circuits, which contain the following elements: voltage sources, ohmic resistors, inductances, and capacitors. Whereas we have already introduced inductances and capacitors, we have to say a few words on the two other elements.

Voltage sources A voltage source or electromotive force with voltage $V^{(e)}(t)$ feeds the power $V^{(e)}I$ into the system. An example is a battery which transforms chemical energy into electromagnetic one. The voltages $V^{(ind)}$ of the inductances are also called electromotive forces.

Ohmic resistors In many materials the current density and the electric field are proportional if the field is not too strong. The coefficient of proportionality σ is called conductivity

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}. \tag{13.7}$$

Für einen Draht der Länge l und des Querschnitts f folgt

For a wire of length l and cross-section f one obtains

$$I = jf = \sigma fE = \sigma\frac{f}{l}V^{(R)}. \tag{13.8}$$

Dabei ist $V^{(R)}$ der Ohmsche Spannungsabfall längs des Leiters. Man hat also das Gesetz

Here $V^{(R)}$ is the ohmic voltage drop along the conductor. Thus one has

$$V^{(R)} = RI, \quad R = \frac{l}{\sigma f} \tag{13.9}$$

mit dem Ohmschen Widerstand R. Im Gausssschen Maßsystem wird die Leitfähigkeit σ in 1/s und der Widerstand R in s/cm gemessen. Die Umrechnung in das SI-System erfolgt durch $c^{-1}\hat{=}30\Omega$. In einem Ohmschen Widerstand wird pro Zeiteinheit $V^{(R)}I$ an elektromagnetischer Energie in Wärme umgewandelt.

with the ohmic resistance R. In Gaussian units the conductivity σ is measured in 1/s and the resistance R in s/cm. The conversion into the SI-system is obtained by $c^{-1}\hat{=}30\Omega$. The electromagnetic energy is dissipated in an ohmic resistor into heat at the rate $V^{(R)}I$.

13.c Kirchhoffsche Regeln

1. Kirchhoffsche Regel (Knotenpunktsgesetz für die Ströme)

Das erste Kirchhoffsche Gesetz besagt, dass an jedem Knoten, an dem mehrere Leiter enden, die Summe der einlaufenden Ströme gleich der der auslaufenden ist

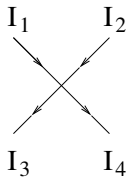
13.c Kirchhoff's Rules

Kirchhoff's first Law (Current Law)

Kirchhoff's first law states that at each electrical contact, where several wires are joined, the sum of the incoming currents equals the sum of the outgoing currents

$$\sum I_{\substack{\text{einlaufend}\\ \text{incoming}}} = \sum I_{\substack{\text{auslaufend}\\ \text{outgoing}}}. \tag{13.10}$$

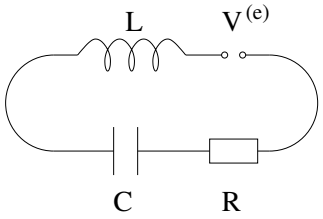
Diese Regel stellt also die makroskopische Form von $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ dar. Im nebenstehenden Fall beinhaltet sie $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$.



This rule is the macroscopic form of $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$. In the figure aside it implies $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$.

2. Kirchhoffsche Regel (Maschengesetz für die Spannungen)

Diese Regel besagt, dass längs eines Maschenumlaufs die Summe der elektromotorischen Kräfte gleich der übrigen Spannungsabfälle ist



Kirchhoff's second Law (Voltage Law)

The second law says that along a closed path the sum of electromotive forces equals the sum of the other voltage drops

$$\sum \left(V^{(\mathrm{e})} + V^{(\mathrm{ind})}\right) = \sum \left(V^{(\mathrm{R})} + V^{(\mathrm{C})}\right), \tag{13.11}$$

wobei

where

$$V^{(\mathrm{ind})} = -\mathrm{d}(LI)/\mathrm{d}t, \quad V^{(\mathrm{C})} = q/C, \quad \mathrm{d}V^{(\mathrm{C})}/\mathrm{d}t = I/C. \tag{13.12}$$

Diese Regel ist also das Faradaysche Induktionsgesetz in makroskopischer Form.

This rule is Faraday's induction law in macroscopic form.

13.d Energie von Induktivitäten

Um die Energie von Induktivitäten zu bestimmen, betrachten wir Stromkreise mit eingeprägten Spannungen, ohmschen Widerständen und induktiven Kopplungen

13.d Energy of Inductances

In order to determine the energies of inductances we consider circuits with electromotive forces, ohmic resistors and inductive couplings

$$V_j^{(\mathrm{e})} + V_j^{(\mathrm{ind})} = R_j I_j. \tag{13.13}$$

Die zeitliche Änderung der elektromagnetischen Energie des Systems ergibt sich dann zu

The variation of the electromagnetic energy as a function of time is then given by

$$\dot{U}_{\mathrm{em}} = \sum_j I_j V_j^{(\mathrm{e})} - \sum_j R_j I_j^2 + L_{\mathrm{mech}} = -\sum_j I_j V_j^{(\mathrm{ind})} + L_{\mathrm{mech}} \tag{13.14}$$

mit

$$V_j^{(\mathrm{ind})} = -\frac{1}{c}\dot{\Psi}_j^{\mathrm{m}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sum_k L_{j,k}I_k). \tag{13.15}$$

Dabei ist L_{mech} die an dem System verrichtete mechanische Leistung.

Wir betrachten nun mehrere Fälle:

with

Here L_{mech} is the mechanical power fed into the system.

Now we consider various cases:

13.d.α Konstante Induktivitäten

Wir halten die Stromkreise fest, dann gilt $L_{j,k} = \mathrm{const}$, $L_{\mathrm{mech}} = 0$. Dann folgt

$$\dot{U}_{\mathrm{em}} = \sum_{j,k} I_j L_{j,k} \dot{I}_k, \tag{13.16}$$

woraus sich die Energie der Induktivitäten zu

$$U_{\mathrm{em}} = \frac{1}{2}\sum_{j,k} I_j L_{j,k} I_k \tag{13.17}$$

ergibt.

13.d.α Constant Inductances

We keep the circuits fixed, then $L_{j,k} = \mathrm{const}$, $L_{\mathrm{mech}} = 0$ holds. From this it follows that

from which we obtain the energies of the inductances

.

13.d.β Gegeneinander bewegte Stromkreise

Wir bewegen nun die Stromkreise gegeneinander. Dann folgt

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{mech}} &= \dot{U}_{\mathrm{em}} + \sum_j I_j V_j^{(\mathrm{ind})} = \sum_{j,k}(I_j L_{j,k}\dot{I}_k + \frac{1}{2} I_j \dot{L}_{j,k} I_k) - \sum_{j,k}(I_j \dot{L}_{j,k} I_k + I_j L_{j,k}\dot{I}_k) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{j,k} I_j \dot{L}_{j,k} I_k = -\left.\frac{\partial U_{\mathrm{em}}}{\partial t}\right|_I . \end{aligned} \tag{13.18}$$

Die mechanische Arbeit, die zu verrichten ist, wird also nicht durch die Veränderung der elektromagnetischen Energie U_{em} bei konstanten Strömen I gegeben, sondern durch ihr Negatives.

13.d.β Moving Loops of Currents

Now we move the circuits against each other. This yields

Thus the mechanical work to be done is not given by the change of the electromagnetic energy U_{em} at constant currents I, but by its negative.

13.d.γ Konstante magnetische Flüsse

Falls wir keine eingeprägten Spannungen $V_j^{(\mathrm{e})} = 0$ haben und keine Widerstände $R_j = 0$, dann gilt nach (13.13) $V^{(\mathrm{ind})} = 0$, woraus folgt, dass die magnetischen Flüsse Ψ_j^{m} unverändert bleiben. Die Induktion ist also bestrebt, die Magnetflüsse aufrecht zu erhalten (Beispiel supraleitende Ringströme). Drücken wir U_{em} durch die Flüsse aus,

$$U_{\mathrm{em}} = \frac{1}{2c^2}\sum_{j,k} \Psi_j^{\mathrm{m}} (L^{-1})_{j,k} \Psi_k^{\mathrm{m}}, \tag{13.19}$$

so folgt mit der Matrix-Identität $\dot{L}^{-1} = -L^{-1}\dot{L}L^{-1}$ (die Identität erhält man durch Ableiten von $LL^{-1} = 1$ und Auflösen nach $\dot{L}^{-1}$)

$$\left.\frac{\partial U_{\mathrm{em}}}{\partial t}\right|_{\Psi^{\mathrm{m}}} = -\frac{1}{2}\sum_{j,k} I_j \dot{L}_{j,k} I_k = L_{\mathrm{mech}}. \tag{13.20}$$

13.d.γ Constant Magnetic Fluxes

In case there are no electromotive forces $V_j^{(\mathrm{e})} = 0$ and no resistors $R_j = 0$ in the loops, then according to (13.13) we have $V^{(\mathrm{ind})} = 0$, from which we conclude that the magnetic fluxes Ψ_j^{m} remain unchanged. Thus the induction tries to keep the magnetic fluxes unaltered (example superconducting loop-currents). If we express the energy U_{em} in terms of the fluxes

and use the matrix identity $\dot{L}^{-1} = -L^{-1}\dot{L}L^{-1}$ then we obtain (the identity can be obtained by differentiating $LL^{-1} = 1$ and solving for $\dot{L}^{-1}$)

Die mechanische Leistung ist daher die zeitliche Ableitung der elektromagnetischen Energie bei konstanten magnetischen Flüssen.

The mechanical power is thus the rate by which the electromagnetic energy changes at constant magnetic fluxes.

13.d.δ Kraft zwischen zwei Stromkreisen

Nach diesen Betrachtungen kommen wir auf die Kraft zwischen zwei Stromkreisen zurück. Wir hatten im Abschnitt (9.e) die Kraft des Stromkreises 1 auf den Stromkreis 2 zu (9.21)

13.d.δ Force between two Electric Circuits

After these considerations we return to the force between two electric circuits. In section (9.e) we calculated the force from circuit 1 on circuit 2 as (9.21)

$$\mathbf{K}_2 = \frac{1}{c^2}\int \mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3r'(\mathbf{j}_1(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{j}_2(\mathbf{r}))\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{13.21}$$

berechnet. Gehen wir nun zu zwei Stromfäden über

. Now if we consider two filamentary wires

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a} \qquad \mathbf{r}' = \mathbf{r}_1 \tag{13.22}$$

$$\mathrm{d}^3r'\mathbf{j}_1(\mathbf{r}') \to \mathrm{d}\mathbf{r}_1 I_1, \qquad \mathrm{d}^3r\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) \to \mathrm{d}\mathbf{r}_2 I_2, \tag{13.23}$$

so folgt

we obtain

$$\mathbf{K}_2 = \frac{I_1 I_2}{c^2}\int(\mathrm{d}\mathbf{r}_1\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}_2)\nabla_2\frac{1}{|\mathbf{r}_2+\mathbf{a}-\mathbf{r}_1|} = I_1 I_2\nabla_a L_{1,2}(\mathbf{a}). \tag{13.24}$$

Daher ist

Thus

$$L_{\mathrm{mech}} = -\mathbf{K}_2\cdot\dot{\mathbf{a}} = -I_1 I_2\dot{L}_{1,2} \tag{13.25}$$

in Übereinstimmung mit (13.18).

is in agreement with (13.18).

13.d.ϵ Energie eines magnetischen Dipols im äußeren Magnetfeld

Wir können andererseits die Wechselwirkungsenergie eines magnetischen Dipols erzeugt durch eine Stromdichte $\mathbf{j}$ in einem äußeren Feld $\mathbf{B}_\mathrm{a}$ erzeugt durch eine Stromverteilung $\mathbf{j}_\mathrm{a}$ jetzt schreiben als

13.d.ϵ Energy of a Magnetic Dipole in an External Magnetic Induction

On the other hand we may now write the interaction energy between a magnetic dipole generated by a density of current $\mathbf{j}$ in an external magnetic field $\mathbf{B}_\mathrm{a}$ generated by a density of current $\mathbf{j}_\mathrm{a}$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{c^2}\int \mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3r'(\mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}_\mathrm{a}(\mathbf{r}'))\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{c^2}\int \mathrm{d}^3r\mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot\int \mathrm{d}^3r'\frac{\mathbf{j}_\mathrm{a}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r\mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{A}_\mathrm{a}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r\mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot(\mathbf{A}_\mathrm{a}(0)+x_\alpha\nabla_\alpha\mathbf{A}_\mathrm{a}|_{r=0}+\ldots) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r x_\alpha j_\beta\nabla_\alpha A_{\mathrm{a},\beta} \\ &= \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}m_\gamma\nabla_\alpha A_{\mathrm{a},\beta} = \mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_\mathrm{a}. \end{aligned} \tag{13.26}$$

Dies ist jetzt der korrekte Ausdruck für die Wechselwirkungsenergie eines magnetischen Dipols $\mathbf{m}$ in einer äußeren magnetischen Induktion $\mathbf{B}_\mathrm{a}$.

This is the correct expression for the interaction energy of a magnetic dipole $\mathbf{m}$ in an external magnetic induction $\mathbf{B}_\mathrm{a}$.

13.d.ζ Permanente magnetische Momente

Permanente magnetische Momente kann man als Stromkreise mit sehr großer Selbstinduktivität $L_{j,j}$ und konstantem Fluss Ψ^m_j auffassen. Zur weiteren Berechnung lösen wir (13.3) nach I_j auf

13.d.ζ Permanent Magnetic Moments

Permanent magnetic moments may be considered as loop currents with large self inductance $L_{j,j}$ and constant flux Ψ^m_j. For further calculation we first solve (13.3) for I_j

$$I_j = \frac{\Psi^\mathrm{m}_j}{cL_{j,j}} - \sum_{k\neq j}\frac{L_{j,k}I_k}{L_{j,j}}. \tag{13.27}$$

Bei Verschiebung der magnetischen Momente verändern sich die Gegeninduktivitäten und man erhält

$$\dot{I}_j = -\frac{1}{L_{j,j}}\Big(\sum_{k\neq j} \dot{L}_{j,k} I_k + \sum_{k\neq j} L_{j,k}\dot{I}_k\Big). \tag{13.28}$$

Falls die Selbstinduktivitäten $L_{j,j}$ sehr groß gegen die Gegeninduktivitäten sind, ändern sich die Ströme nur wenig und die zweite Summe ist vernachlässigbar. Dann erhält man für den Selbst-Induktions-Beitrag aus der Energie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L_{j,j}I_j^2\right) = L_{j,j}I_j\dot{I}_j = -I_j\sum_{k\neq j}\dot{L}_{j,k}I_k. \tag{13.29}$$

Daher erhält man durch eine Änderung von $L_{j,k}$ den Beitrag $\dot{L}_{j,k}I_jI_k$ direkt aus der Wechselwirkung zwischen den Strömen I_j und I_k, die einen Beitrag der Form (13.26) zu U_{em} liefern, und zwei Beiträge mit dem umgekehrten Vorzeichen aus $\frac{1}{2}L_{j,j}I_j^2$ und $\frac{1}{2}L_{k,k}I_k^2$. Dies erklärt den Unterschied zwischen (10.24) und (13.26).

Upon moving the magnetic moments the mutual inductances change, and one obtains

If the self-inductances $L_{j,j}$ are very large in comparison to the mutual inductances, the currents vary only a little bit, and the second sum is negligible. Then one obtains from the self-inductance contribution of the energy

Thus one obtains from a change of $L_{j,k}$ a contribution $\dot{L}_{j,k}I_jI_k$ directly from the interaction between the currents I_j and I_k, which yields a contribution of the form (13.26) to U_{em} and two contributions with the opposite sign from $\frac{1}{2}L_{j,j}I_j^2$ and $\frac{1}{2}L_{k,k}I_k^2$. This explains the difference between (10.24) and (13.26).

E

MAXWELL-Gleichungen

MAXWELL's Equations

©2003 Franz Wegner Universität Heidelberg

14 Vollständige MAXWELL-Gleichungen

14.a Widerspruchsfreiheit der MAXWELL-Gleichungen

Im Abschnitt (1) haben wir die vier MAXWELL-Gleichungen (1.13-1.16)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{c\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) && (14.1)\\ \operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= 4\pi\rho(\mathbf{r},t) && (14.2)\\ \operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{c\partial t} &= \mathbf{0} && (14.3)\\ \operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= 0 && (14.4) \end{aligned}$$

angegeben. Es sind dies acht Komponentengleichungen für die insgesamt sechs Komponenten B_α und E_α. Die Gleichungen können daher nicht unabhängig voneinander sein. In der Tat bilden wir die Divergenz der ersten Gleichung und vergleichen mit der zweiten Gleichung, so finden wir

$$-\frac{1}{c}\operatorname{div}\dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\mathbf{j} = -\frac{4\pi}{c}\dot{\rho}, \qquad (14.5)$$

woraus wir sehen, dass in diesen beiden Gleichungen die Kontinuitätsgleichung (1.12) enthalten ist, und diese auch nur erfüllt werden können, wenn die Ladung erhalten ist. Zum anderen folgt daraus aber auch

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\mathbf{E} - 4\pi\rho) = 0. \qquad (14.6)$$

Wenn also zu einer Zeit die Gleichung (14.2) und zu allen Zeiten die Kontinuitäts-Gleichung erfüllt sind, so garantiert (14.1) dafür, dass (14.2) zu allen Zeiten erfüllt ist.

14 Complete Set of MAXWELL's Equations

14.a Consistency of MAXWELL's Equations

In section (1) we have introduced the four MAXWELL's equations (1.13-1.16)

. These are eight component equations for six components B_α and E_α. Thus the equations cannot be independent from each other. Indeed calculating the divergence of the first equation and comparing it with the second equation we find

from which we see that the equation of continuity (1.12) is contained in both equations, and these equations can only be fulfilled if charge is conserved. But it also follows that

Thus if at a certain time equation (14.2) and at all times the equation of continuity is fulfilled, then equation (14.1) guarantees that (14.2) is fulfilled at all times.

Ähnlich folgt aus der Divergenz von (14.3)

Similarly, it follows from the divergence of (14.3) that

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\mathbf{B}) = 0. \tag{14.7}$$

Wenn also (14.4) zu einer Zeit erfüllt ist, so ist sie auf Grund von (14.3) zu allen Zeiten erfüllt.

Thus if (14.4) is fulfilled at a certain time, then due to equation (14.3) it is fulfilled at all times.

Die Gleichungen (14.1) und (14.3) erlauben die Berechnung von **B** und **E**, falls **j** zu allen Zeiten gegeben ist und **B** und **E** zu einer Zeit t_0 gegeben sind und zu dieser Zeit (14.2) und (14.4) erfüllt sind. ρ ergibt sich dann aus der Kontinuitätsgleichung.

Equations (14.1) and (14.3) allow the calculation of **B** and **E** if **j** is given at all times and **B** and **E** are given at a time t_0 and (14.2) and (14.4) are fulfilled at that time. Then ρ is determined by the equation of continuity.

Der einzige Beitrag, den wir bisher nicht betrachtet haben, ist der Beitrag proportional zu $\dot{\mathbf{E}}$ in (14.1). Er wurde von MAXWELL gefunden. Er hat $\dot{\mathbf{E}}/(4\pi)$ als Verschiebungsstrom bezeichnet, da (14.1) in der Form

The only contribution we have not yet considered is the contribution proportional to $\dot{\mathbf{E}}$ in (14.1). It was found by MAXWELL. He called $\dot{\mathbf{E}}/(4\pi)$ displacement current, since (14.1) may be rewritten

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi}\dot{\mathbf{E}}) \tag{14.8}$$

geschrieben werden kann. Mit der Einführung dieses Terms wurde das Gleichungssystem (14.1-14.4) widerspruchsfrei. Gleichzeitig erlaubt dieses System dann die Beschreibung elektromagnetischer Wellen.

. With the introduction of this term the system of equations (14.1-14.4) became consistent. Simultaneously this system allowed the description of electromagnetic waves.

14.b MAXWELL-Gleichungen für freibewegliche Ladungen und Ströme

14.b MAXWELL's Equations for Freely Moving Charges and Currents

Die Ladungsdichte und die Stromdichte werden zerlegt (vgl. Abschnitt 6.a und 11)

The density of the charges and currents are separated into (compare sections 6.a and 11)

$$\rho = \rho_\mathrm{f} + \rho_\mathrm{P} \tag{14.9}$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_\mathrm{f} + \mathbf{j}_\mathrm{P} + \mathbf{j}_\mathrm{M}. \tag{14.10}$$

Dabei waren ρ_f und $\mathbf{j}_\mathrm{f}$ die freibeweglichen Anteile, während ρ_P und das hier eingeführte $\mathbf{j}_\mathrm{P}$ die Polarisations-Anteile sind. Wir hatten für das elektrische Dipolmoment im Volumen ΔV ausgedrückt durch die Dipolmomente $\mathbf{p}_i$, die wieder durch Ladungspaare $\pm q_i$ im Abstand $\mathbf{a}_i$ dargestellt werden

Here ρ_f and $\mathbf{j}_\mathrm{f}$ are the freely moving contributions, whereas ρ_P and the newly introduced $\mathbf{j}_\mathrm{P}$ are the polarization contributions. We expressed the electric dipole moment in the volume ΔV by the dipole moments $\mathbf{p}_i$, and those by the pairs of charges $\pm q_i$ at distance $\mathbf{a}_i$

$$\mathbf{P}\Delta V = \sum \mathbf{p}_i = \sum q_i \mathbf{a}_i \tag{14.11}$$

$$\mathbf{j}_\mathrm{P}\Delta V = \sum \dot{\mathbf{p}}_i = \sum q_i \dot{\mathbf{a}}_i \tag{14.12}$$

mit $\mathbf{j}_\mathrm{P} = \dot{\mathbf{P}}$ (in ruhender Materie). Dazu kommt dann noch die in Abschnitt 11 eingeführte Magnetisierungsstromdichte

with $\mathbf{j}_\mathrm{P} = \dot{\mathbf{P}}$ (in matter at rest). In addition, there is a current density from the magnetization as introduced in section 11

$$\mathbf{j}_\mathrm{M} = c \operatorname{rot}\mathbf{M}. \tag{14.13}$$

Für diese Ladungs- und Stromdichten gilt

For these charge and current densities one obtains

$$\frac{\partial \rho_\mathrm{f}}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j}_\mathrm{f} = 0 \tag{14.14}$$

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{P}}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{\mathrm{P}} = 0 \tag{14.15}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_{\mathrm{M}} = 0. \tag{14.16}$$

Durch Einsetzen dieser Ladungs- und Stromdichten in (14.1) ergibt sich

By inserting these charge and current densities into (14.1) one obtains

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}_{\mathrm{f}} + \dot{\mathbf{P}} + c \operatorname{rot} \mathbf{M}), \tag{14.17}$$

woraus

from which it follows that

$$\operatorname{rot} (\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}) - \frac{\partial}{c\partial t}(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\mathrm{f}} \tag{14.18}$$

folgt. Führen wir wieder wie in (11.9) und (6.6) das magnetische Feld $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ und die dielektrische Verschiebung $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ ein, so wird (11.10) erweitert zu

. If we now introduce the magnetic field $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ and the dielectric displacement $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ in (11.9) and (6.6), eq. (11.10) becomes

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{D}} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\mathrm{f}}. \tag{14.19}$$

Entsprechend folgt aus (14.2) wie in (6.7)

Similarly, one obtains from (14.2) as in (6.7)

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_{\mathrm{f}}. \tag{14.20}$$

Die Maxwell-Gleichungen (14.3) und (14.4) bleiben unverändert. Man bezeichnet die Gleichungen (14.19,14.20) auch als die Maxwell-Gleichungen in Materie.

Maxwell's equations (14.3) and (14.4) remain unchanged. Equations (14.19, 14.20) are called Maxwell's equations in matter.

15 Energie- und Impuls-Bilanz

15.a Energie

Wir betrachten ein Volumen eines Systems mit freibeweglichen Ladungen und festgehaltener Materie. Auf die freibeweglichen Ladungen wirkt die Kraftdichte $\mathbf{k} = \rho_\mathrm{f}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c)$. Bewegen wir die Ladungen mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$, so müssen wir dem System gegen diese Kraftdichte die Leistung $-\int \mathrm{d}^3 r \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = -\int \mathrm{d}^3 r \mathbf{j}_\mathrm{f} \cdot \mathbf{E}$ zuführen. Wir formen nun mittels (14.19), (B.30) und (14.3) um

$$\begin{aligned} -\mathbf{j}_\mathrm{f} \cdot \mathbf{E} &= -\frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{H} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) - \frac{c}{4\pi}\mathbf{H} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}} \\ &= \frac{c}{4\pi}\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{H}\cdot\dot{\mathbf{B}} + \mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}}). \end{aligned} \tag{15.1}$$

Diese Beiträge interpretiert man folgendermaßen: In ruhender Materie stellt der zweite Beitrag die zeitliche Änderung der Energiedichte $u(\rho_\mathrm{m}, \mathbf{D}, \mathbf{B})$ dar mit

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}}\mathrm{d}\rho_\mathrm{m} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{D} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{B}. \tag{15.2}$$

Wir gehen der Einfachheit halber davon aus, dass die Energie der Materie von ihrer Massendichte ρ_m, aber nicht vom vollständigen Verzerrungszustand abhängt. Wir hatten schon früher gesehen, dass $\partial u/\partial \mathbf{D} = \mathbf{E}/(4\pi)$ gilt. Ähnlich kann man aus dem Induktionsgesetz zeigen, dass $\partial u/\partial \mathbf{B} = \mathbf{H}/(4\pi)$ für starre Materie gilt. Hier die Herleitung in Kurzform

$$\begin{aligned} \delta U_\mathrm{em} &= -\sum_j V_j^{(\mathrm{ind})}\delta t I_j = \frac{1}{c}\sum_j I_j \delta\Psi_j^\mathrm{m} = \frac{1}{c}\sum_j I_j \int \mathrm{d}\mathbf{f}_j \cdot \delta\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\sum_j I_j \int \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3 r \mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r})\cdot\delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3 r \operatorname{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r})\cdot\delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3 r \mathbf{H}(\mathbf{r})\cdot\operatorname{rot}\delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3 r \mathbf{H}(\mathbf{r})\cdot\delta\mathbf{B}(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{15.3}$$

Da die Materie festgehalten wird, trägt $\partial u/\partial\rho_\mathrm{m}\dot{\rho}_\mathrm{m}$ nichts bei. Wir setzen daher für die Energie des Volumens V

$$U(V) = \int_V \mathrm{d}^3 r\, u(\rho_\mathrm{m}(\mathbf{r}), \mathbf{D}(\mathbf{r}), \mathbf{B}(\mathbf{r})) \tag{15.4}$$

und führen den POYNTING-Vektor

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H} \tag{15.5}$$

15 Energy and Momentum Balance

15.a Energy

We consider a volume of a system with freely moving charges and matter at rest. The force density on the freely moving charges is given by $\mathbf{k} = \rho_\mathrm{f}(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}/c)$. If the charges are moved with velocity $\mathbf{v}$, the power $-\int \mathrm{d}^3 r \mathbf{k}\cdot\mathbf{v} = -\int \mathrm{d}^3 r \mathbf{j}_\mathrm{f}\cdot\mathbf{E}$ has to be fed into the system against the force density. We rewrite this expression by using (14.19), (B.30) and (14.3)

These contributions are interpreted in the following way: In matter at rest the second contribution is the temporal change of the energy density $u(\rho_\mathrm{m}, \mathbf{D}, \mathbf{B})$ with

For simplicity we assume that the energy of the matter depends on its density ρ_m, but not on the complete state of strain. We have seen earlier that $\partial u/\partial\mathbf{D} = \mathbf{E}/(4\pi)$ holds. Similarly, one can show from the law of induction that $\partial u/\partial\mathbf{B} = \mathbf{H}/(4\pi)$ holds for rigid matter. We give a short account of the derivation

Since the matter is pinned, $\partial u/\partial\rho_\mathrm{m}\dot{\rho}_\mathrm{m}$ does not contribute. Therefore we write the energy of volume V as

and introduce the POYNTING vector

ein. Es gilt dann

. Then one has

$$-\int_V \mathrm{d}^3 r \mathbf{j}_\mathrm{f} \cdot \mathbf{E} = \dot{U}(V) + \int_V \mathrm{d}^3 r \,\mathrm{div}\,\mathbf{S} = \dot{U}(V) + \int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}). \tag{15.6}$$

Die dem Volumen V zugeführte Energie wird zum Teil im Volumen gespeichert ($\dot{U}$), zum anderen Teil aber durch die Oberfläche des Systems transportiert. Dieser Energietransport ist durch die Energiestromdichte $\mathbf{S}$ gegeben. Ähnlich wie durch eine Fläche pro Zeiteinheit die Ladung $\int \mathrm{d}\mathbf{f}\cdot\mathbf{j}_\mathrm{f}$ transportiert wird, wird (in ruhender Materie) die Energie $\int \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{S}$ transportiert. Der POYNTING-Vektor gibt daher die elektromagnetische Energiestromdichte an.

The energy added to volume V is partially stored in the volume. This stored part is given by ($\dot{U}$). Another part is transported through the surface of the system. This transport of energy is given by the energy current through the surface expressed by the surface integral over $\mathbf{S}$. Similar to the transport of the charge $\int \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{j}_\mathrm{f}$ through a surface per unit time, one has (in matter at rest) the energy transport $\int \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{S}$ through a surface. Thus the POYNTING vector is the density of the electromagnetic energy current.

Wir bemerken, dass für $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ die Energiedichte

We note that for $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ one obtains the energy density

$$u = u^0(\rho_\mathrm{m}) + \frac{1}{8\pi}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \tag{15.7}$$

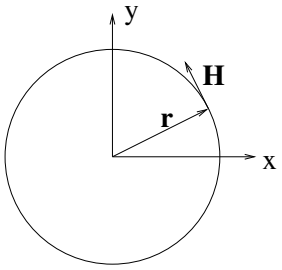
folgt.

.

Beispiel: Stromdurchflossener gerader Leiter

Example: Current-carrying straight wire

Wir betrachten einen vom Strom I durchflossenen geraden Draht in Richtung der z-Achse. Auf Grund des AMPEREschen Gesetzes gilt bei Integration auf einem konzentrischen Kreis mit Radius r um den Leiter



We consider a straight wire which carries the current I in the direction of the z-axis. Due to AMPERE's law the integral along a concentric circle with radius r around the conductor yields

$$\oint \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} I, \quad \mathbf{H} = \frac{2I}{cr}\mathbf{e}_\phi. \tag{15.8}$$

Längs des Leiters bestehe auf Grund des OHMschen Widerstandes ein Spannungsabfall $V^{(\mathrm{R})}$, verknüpft mit einem elektrischen Feld parallel zum Draht, $\mathbf{E} = E_0\mathbf{e}_z$. Daraus folgt der POYNTING-Vektor

There is a voltage drop along the wire due to the OHMIC resistance $V^{(\mathrm{R})}$, which is related to the electric field parallel to the wire, $\mathbf{E} = E_0\mathbf{e}_z$. This yields the POYNTING vector

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H} = -\frac{IE_0\mathbf{e}_\mathrm{r}}{2\pi r} \tag{15.9}$$

mit einem Energiefluss

with the energy flux

$$\int \mathbf{S}\cdot\mathrm{d}\mathbf{f} = -IE_0 l = -IV^{(\mathrm{R})} \tag{15.10}$$

durch den Zylindermantel des Drahtes über die Länge l nach außen. Mit anderen Worten, es fließt in den Draht die OHMsche Leistung $IV^{(\mathrm{R})}$. Diese wird im Draht in Wärme umgewandelt.

through the lateral surface of the cylinder of the wire of length l in outward direction. In other words, the OHMIC power $IV^{(\mathrm{R})}$ flows into the wire. There it is transformed into heat.

15.b Impuls-Bilanz

Wir führen die Impuls-Bilanz nur für das Vakuum mit Ladungsdichten ρ und Stromdichten $\mathbf{j}$ durch. Wir wollen das System in Ruhe halten. Dann müssen wir gegen die Kraftdichte $\mathbf{k} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}/c$ eine Gegenkraftdichte $-\mathbf{k}$ wirken lassen, so dass einem Volumen V pro Zeiteinheit der Impuls $-\int_V \mathrm{d}^3 r\, \mathbf{k}$ zugeführt wird. Wir formen nun wieder mit (14.1) und (14.3) um

$$-\mathbf{k} = -\rho\mathbf{E} - \frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{B} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{B} + \frac{1}{4\pi c}\dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{B}. \tag{15.11}$$

Mit (14.3) und (14.4)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\dot{} - \mathbf{E} \times \dot{\mathbf{B}} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\dot{} + c\mathbf{E} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{E} && (15.12)\\ \mathbf{B}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B} &= 0 && (15.13) \end{aligned}$$

folgt

$$-\mathbf{k} = \frac{1}{4\pi c}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})\dot{} + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{E} - \mathbf{E}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} + \mathbf{B} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{B} - \mathbf{B}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B}). \tag{15.14}$$

Nun ist

$$\mathbf{E}_\mathrm{c} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E}_\mathrm{c}(\nabla\mathbf{E}) = \nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_\mathrm{c}) - \mathbf{E}(\nabla\mathbf{E}_\mathrm{c}) - \mathbf{E}_\mathrm{c}(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{2}\nabla E^2 - (\nabla\mathbf{E})\mathbf{E}. \tag{15.15}$$

Wir haben hier Größen, auf die der ∇-Operator nicht wirkt, mit einem Index $_\mathrm{c}$ gekennzeichnet. Im letzten Term des obigen Ausdrucks wirkt der ∇-Operator tatsächlich auf beide Faktoren $\mathbf{E}$. Damit können wir schreiben

$$-\mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}_\mathrm{s} - \nabla_\beta T_{\alpha,\beta}\mathbf{e}_\alpha, \tag{15.16}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\mathrm{s} &= \frac{1}{4\pi c}\mathbf{E} \times \mathbf{B}, && (15.17)\\ T_{\alpha,\beta} &= \frac{1}{4\pi}(E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta) - \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{8\pi}(E^2 + B^2). && (15.18) \end{aligned}$$

Dabei wird $\mathbf{g}_\mathrm{s}$ als die Strahlungsimpulsdichte bezeichnet, und $T_{\alpha,\beta}$ sind die Komponenten des Spannungstensors, dessen elektrostatischen Anteil wir bereits in der Elektrostatik (8.38) kennengelernt haben. Mit diesen Größen gilt dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}^3 r\, \mathbf{g}_\mathrm{s}(\mathbf{r}) = -\int_V \mathrm{d}^3 r\, \mathbf{k} + \int_{\partial V} \mathbf{e}_\alpha T_{\alpha,\beta}\mathrm{d}f_\beta. \tag{15.19}$$

15.b Momentum Balance

We consider the momentum balance only for the vacuum with charge densities ρ and current densities $\mathbf{j}$. If we keep the system at rest, a force density $-\mathbf{k}$ has to act against the LORENTZ force density $\mathbf{k} = \rho\mathbf{E}+\mathbf{j}\times\mathbf{B}/c$, so that the momentum $-\int_V \mathrm{d}^3 r\, \mathbf{k}$ is added to the volume V per unit time. We transform by means of (14.1) and (14.3)

With (14.3) and (14.4)

one obtains

One has

We have indicated quantities on which the ∇-operator does not act with an index $_\mathrm{c}$. The ∇-operator acts on both factors $\mathbf{E}$ in the last term of the expression above. Then we may write

with

Here $\mathbf{g}_\mathrm{s}$ is called the density of the electromagnetic momentum and $T_{\alpha,\beta}$ are the components of the electromagnetic stress tensor, whose electrostatic part (8.38) we already know. With these quantities we have

Dies ist die Impuls-Bilanz für das Volumen V. Die linke Seite stellt die zeitliche Änderung des Impulses im Volumen V dar, die rechte Seite den zugeführten Impuls. Er besteht aus zwei Anteilen: Der erste ist der Impuls, den wir hinzufügen, indem wir gegen die elektromagnetische Kraftdichte $\mathbf{k}$ eine Gegenkraft wirken lassen. Der zweite Anteil wirkt in Form von Spannungen an der Oberfläche. Man kann ihn auch als Fluss des Impulses betrachten. Der Spannungstensor stellt bis auf das Vorzeichen eine Impulsflussdichte dar. Er trägt zwei Indices. Einer (α) bezieht sich auf die Komponente des Impulses, der andere (β) auf die Richtung des Flusses.

Wir haben hier nur den elektromagnetischen Impuls im Vakuum behandelt, während wir die elektromagnetische Energie auch in Materie untersucht haben. Warum ist es schwieriger, den Impuls in Materie zu behandeln? In beiden Fällen haben wir das System in Ruhe untersucht. Hält man die Materie fest, so tragen die dabei aufgewendeten Kräfte nicht zur Energie-Bilanz bei. Schließlich ist die Leistung als Kraft mal Geschwindigkeit gegeben. Da die Geschwindigkeit der Materie gleich Null ist, trägt die auf die Materie wirkende Kraft nicht zur Energie-Bilanz bei. Anders ist es bei der Impuls-Bilanz. Da tragen alle Kräfte bei. Man könnte daran denken, von einem kräftefreien Zustand auszugehen. Dann tritt allerdings das Problem auf, dass bei Verschiebung der freibeweglichen Ladungen überall in der Materie Kräfte auftreten können, die wir erst kennen müssten. Daher können wir hier die Energie-Bilanz in Materie behandeln, hätten aber mit der Impuls-Bilanz Probleme.

In der Literatur gibt es widersprüchliche Aussagen: Minkowski hat 1908 für den elektromagnetischen Impuls in Materie $\mathbf{D} \times \mathbf{B}/(4\pi c)$ angegeben. Man findet dies auch im Lehrbuch von Sommerfeld (allerdings mit Einschränkungen). Andererseits gibt Abraham 1910 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}/(4\pi c)$ an. Man findet dies auch im Lehrbuch von Landau und Lifschitz.

Tatsächlich sind zwei Dinge zu beachten, die häufig nicht berücksichtigt werden:
1) Die Wechselwirkung zwischen elektromagnetischem Feld und Materie muss berücksichtigt werden. Die Materie kann nicht als starr angenommen werden.

2) Man muss genau definieren, was man unter dem elektromagnetischen Impuls versteht, da man sonst alles in den unbekannten Rest mechanischen Impuls schieben kann, also keine Aussage gemacht hat.

This is the momentum balance for the volume V. The left handside gives the rate of change of momentum in the volume V, the right handside the rate of momentum added to the volume. It consists of two contributions: the first one is the momentum which is added by the action of the reactive force against the Lorentz force density $\mathbf{k}$. The second contribution acts by means of stress on the surface. It may also be considered as a flux of momentum through the surface. Thus the stress tensor is apart from its sign the density of momentum flux. It carries two indices. One (α) relates to the components of momentum, the other one (β) to the direction of the flux.

We have only considered the electromagnetic momentum in vacuum, whereas we have considered the electromagnetic energy also in matter. Why is it more difficult to determine momentum in matter? In both cases we consider the system at rest. If one pins the matter, the acting forces do not contribute to the balance of energy, since the power is given by force times velocity. Since velocity vanishes, the forces acting on the matter do not contribute to the balance of the energy. This is different for the balance of momentum. There all forces contribute. One could imagine starting out from a force-free state. Then, however, we have the problem that by moving the free charges, forces will appear which we would have to know. Therefore we can consider here the energy balance in matter, whereas the momentum balance in matter would be more difficult.

In literature there are inconsistent statements: In 1908 Minkowski gave $\mathbf{D} \times \mathbf{B}/(4\pi c)$ for the electromagnetic momentum density in matter. This can also be found in the book by Sommerfeld (however with words of caution). On the other hand in 1910 Abraham gave $\mathbf{E} \times \mathbf{H}/(4\pi c)$. This is also found in the textbook by Landau and Lifshitz.

There are two points to be considered, which are often overlooked:
i) The interaction between the electromagnetic field and matter has to be taken into account. Matter cannot be considered rigid.

ii) One has to define precisely what is meant by the electromagnetic momentum, since otherwise any difference can be attributed to the mechanical momentum and the statement is empty.

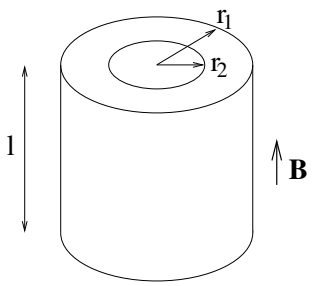
Ohne Herleitung sei nur angegeben, dass man ein System modellieren kann, dem man entnimmt: Im lokalen Ruhesystem der Materie ist die Impulsdichte $\mathbf{E}\times\mathbf{H}/(4\pi c) = \mathbf{S}/c^2$. Allerdings kann man zeigen, dass es in homogener Materie eine weitere Erhaltungsgröße auf Grund dieser Homogenität gibt, die im lokalen Ruhesystem den Wert $\mathbf{D}\times\mathbf{B}/(4\pi c)$ annimmt. Vollzieht man SOMMERFELDS Argument nach, so stellt man in der Tat fest, daß es sich nur für eine ortsunabhängige Dielektrizitätskonstante ϵ durchführen lässt.

Without derivation it should just be mentioned that a model system can be given which yields the following: The momentum density in the local rest system is $\mathbf{E}\times\mathbf{H}/(4\pi c) = \mathbf{S}/c^2$. However, in homogeneous matter there is a further conserved quantity which in the local rest system is given by $\mathbf{D}\times\mathbf{B}/(4\pi c)$. If one goes through SOMMERFELD's argument, one realizes that it can be carried through only for a space-independent dielectric constant ϵ.

Beispiel: Zylinderkondensator im Magnetfeld

Wir betrachten einen Zylinderkondensator der Länge l mit Außenradius r_1 und Innenradius r_2 mit einer Ladung q außen und $-q$ innen. Zwischen den beiden Zylindern sei Vakuum. Parallel zur Achse sei ein Magnetfeld B_0. Dann haben wir in Zylinderkoordinaten

Example: Cylindric capacitor in a magnetic field



We consider a cylindric capacitor of length l with outer radius r_1 and inner radius r_2 with charge q outside and $-q$ inside. We assume that between both cylinders is vacuum. Parallel to the axis be a magnetic field B_0. Then one has in cylinder coordinates

$$\mathbf{E} = -\frac{2q}{lr}\mathbf{e}_\mathrm{r}, \quad \mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{g}_\mathrm{s} = \frac{1}{4\pi c}\frac{2qB_0}{lr}\mathbf{e}_\phi. \tag{15.20}$$

Daraus errechnet sich ein Drehimpuls $\mathbf{L}$ in z-Richtung

From this we calculate the angular momentum $\mathbf{L}$ in z-direction

$$L_z = \int \mathrm{d}z\mathrm{d}^2r(\mathbf{r}\times\mathbf{g}_\mathrm{s})_z = \int \mathrm{d}z\mathrm{d}^2 rr\frac{2qB_0}{4\pi clr} = \frac{qB_0}{2c}(r_1^2 - r_2^2). \tag{15.21}$$

Wenn wir den Kondensator nun entladen, dann muss der Entladungsstrom durch das Magnetfeld fließen. Dabei wirkt die LORENTZ-Kraft, die dem System ein mechanisches Drehmoment $\mathbf{M}_\mathrm{mech}$ gibt

If the capacitor is decharged, the decharging current flows through the magnetic field. Then the LORENTZ force acts which gives the system a mechanical torque $\mathbf{M}_\mathrm{mech}$

$$\mathbf{M}_\mathrm{mech} = \int \mathrm{d}^3r\,\mathbf{r}\times(\frac{1}{c}\mathbf{j}\times\mathbf{B}) = \frac{I}{c}\int \mathbf{r}\times(\mathrm{d}\mathbf{r}\times\mathbf{B}) = \frac{I}{c}\int((\mathbf{r}\cdot\mathbf{B})\mathrm{d}\mathbf{r} - (\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r})\mathbf{B}), \tag{15.22}$$

woraus sich

from which one obtains

$$M_{\mathrm{mech},z} = -\frac{IB_0}{c}\int_{r_1}^{r_2} rdr = \frac{IB_0}{2c}(r_1^2 - r_2^2) \tag{15.23}$$

und damit der mechanische Drehimpuls

and thus the mechanical angular momentum

$$L_z = \frac{qB_0}{2c}(r_1^2 - r_2^2) \tag{15.24}$$

errechnet. Durch die Entladung wurde also der elektromagnetische Drehimpuls (15.21) in mechanischen (15.24) umgewandelt. Anstatt den Kondensator zu entladen, kann man auch das Magnetfeld abschalten. Dabei wird eine elektrische Feldstärke

. Thus the electromagnetic angular momentum (15.21) is transformed into a mechanical angular momentum during decharging. Instead of decharging the capacitor one may switch off the magnetic field. Then the electric field

$$\oint \mathbf{E}^{(\mathrm{ind})}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = -\frac{1}{c}\int \dot{\mathbf{B}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{f} = -\frac{1}{c}\pi r^2\dot{B}_0, \quad \mathbf{E}^{(\mathrm{ind})} = -\frac{1}{2c}r\dot{B}_0\mathbf{e}_\phi \tag{15.25}$$

induziert, die auf die Ladungen ein Drehmoment is induced, which exerts the torque

$$\mathbf{M}_{\text{mech}} = q\mathbf{r}_1 \times \mathbf{E}^{(\text{ind})}(\mathbf{r}_1) - q\mathbf{r}_2 \times \mathbf{E}^{(\text{ind})}(\mathbf{r}_2) \tag{15.26}$$

$$M_{\text{mech},z} = qr_1(-\frac{1}{2c}r_1\dot{B}_0) - qr_2(-\frac{1}{2c}r_2\dot{B}_0) \tag{15.27}$$

ausübt, so dass der Kondensator die mechanische Drehimpulskomponente so that the capacitor receives the mechanical component of the angular momentum

$$L_z = \frac{qB_0}{2c}(r_1^2 - r_2^2) \tag{15.28}$$

erhält. In beiden Fällen wird also der elektromagnetische Drehimpuls in den gleichen mechanischen Drehimpuls umgewandelt. . In both cases the electromagnetic angular momentum is transformed into a mechanical one.

F

Elektromagnetische Wellen

Electromagnetic Waves

©2003 Franz Wegner Universität Heidelberg

16 Elektromagnetische Wellen im Vakuum und in homogenen isotropen Isolatoren

16.a Wellengleichung

Wir betrachten elektromagnetische Wellen in einem homogenen isotropen Isolator einschließlich dem Vakuum. Das heißt, wir verlangen, dass die Dielektrizitätskonstante ϵ und die Permeabilität μ orts- und zeitunabhängig sind. Wir verlangen weiterhin, dass keine freien Ströme und Ladungen auftreten $\rho_{\rm f} = 0$, $\mathbf{j}_{\rm f} = \mathbf{0}$. Das Material ist also ein Isolator. Damit lauten dann die vier MAXWELL-Gleichungen, ausgedrückt durch $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ mit Hilfe von $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ und $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \tag{16.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c}\dot{\mathbf{E}}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\dot{\mathbf{H}}. \tag{16.2}$$

Daraus folgt

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} = -\frac{\epsilon\mu}{c^2}\ddot{\mathbf{H}} \tag{16.3}$$

Mit

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{H}) = -\triangle\mathbf{H} + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{H}) \tag{16.4}$$

folgt unter Berücksichtigung von (16.1) für $\mathbf{H}$ und analog für $\mathbf{E}$

$$\triangle\mathbf{H} = \frac{1}{c'^2}\ddot{\mathbf{H}}, \tag{16.5}$$

$$\triangle\mathbf{E} = \frac{1}{c'^2}\ddot{\mathbf{E}}, \tag{16.6}$$

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \tag{16.7}$$

16 Electromagnetic Waves in Vacuum and in Homogeneous Isotropic Insulators

16.a Wave Equation

We consider electromagnetic waves in a homogeneous isotropic insulator including the vacuum. More precisely we require that the dielectric constant ϵ and the permeability μ are independent of space and time. Further we require that there are no freely moving currents and charges $\rho_{\rm f} = 0$, $\mathbf{j}_{\rm f} = \mathbf{0}$. Thus the matter is an insulator. Then MAXWELL's equations read, expressed in terms of $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ by means of $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ and $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$

From these equations one obtains

With

one obtains for $\mathbf{H}$ using (16.1) and similarly for $\mathbf{E}$

Die Gleichungen (16.5) und (16.6) heißen Wellengleichungen.

The equations (16.5) and (16.6) are called wave equations.

16.b Ebene Wellen

Wir suchen nun partikuläre Lösungen der Wellengleichungen und beginnen mit Lösungen, die nur von z und t abhängen, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(z,t)$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(z,t)$. Für die z-Komponenten folgt dann

16.b Plane Waves

Now we look for particular solutions of the wave equations and begin with solutions which depend only on z and t, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(z,t)$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(z,t)$. One obtains for the z-components

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{16.8}$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{H})_z = 0 = \frac{\epsilon}{c}\dot{E}_z \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0. \tag{16.9}$$

In der z-Richtung ist mit diesem Ansatz also nur ein statisches homogenes Feld, das heißt ein konstantes Feld E_z möglich. Entsprechendes gilt auch für H_z. Wir sehen hieraus bereits, dass elektromagnetische Wellen Transversal-Wellen sind.

Thus only a static homogeneous field is possible with this ansatz in z-direction, i.e. a constant field E_z. The same is true for H_z. We already see that electromagnetic waves are transversal waves.

Für die x- und die y-Komponenten folgt

For the x- and y-components one obtains

$$(\nabla\times\mathbf{H})_x = \frac{\epsilon}{c}\dot{E}_x \;\rightarrow\; -\nabla_z H_y = \frac{\epsilon}{c}\dot{E}_x \;\rightarrow\; -\nabla_z(\sqrt{\mu}H_y) = \frac{1}{c'}(\sqrt{\epsilon}E_x)^{\cdot} \tag{16.10}$$

$$(\nabla\times\mathbf{E})_y = -\frac{\mu}{c}\dot{H}_y \;\rightarrow\; \nabla_z E_x = -\frac{\mu}{c}\dot{H}_y \;\rightarrow\; \nabla_z(\sqrt{\epsilon}E_x) = -\frac{1}{c'}(\sqrt{\mu}H_y)^{\cdot}. \tag{16.11}$$

E_x ist mit H_y verknüpft, analog E_y mit $-H_x$. Wir können die beiden Gleichungen (16.10) und (16.11) zusammenfassen zu

E_x is connected with H_y, and in the same way E_y with $-H_x$. We may combine the equations (16.10) and (16.11)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\epsilon}E_x \pm \sqrt{\mu}H_y) = \mp c'\frac{\partial}{\partial z}(\sqrt{\epsilon}E_x \pm \sqrt{\mu}H_y). \tag{16.12}$$

Die Lösung dieser Gleichung und der entsprechenden für E_y mit $-H_x$ ist

The solution of this equation and the corresponding one for E_y with $-H_x$ is

$$\sqrt{\epsilon}E_x \pm \sqrt{\mu}H_y = 2f_\pm(z \mp c't), \tag{16.13}$$

$$\sqrt{\epsilon}E_y \mp \sqrt{\mu}H_x = 2g_\pm(z \mp c't), \tag{16.14}$$

mit beliebigen (differenzierbaren) Funktionen $f_\pm$ und $g_\pm$, woraus dann

with arbitrary (differentiable) functions $f_\pm$ and $g_\pm$, from which one obtains

$$\sqrt{\epsilon}E_x = f_+(z-c't) + f_-(z+c't) \tag{16.15}$$

$$\sqrt{\mu}H_y = f_+(z-c't) - f_-(z+c't) \tag{16.16}$$

$$\sqrt{\epsilon}E_y = g_+(z-c't) + g_-(z+c't) \tag{16.17}$$

$$\sqrt{\mu}H_x = -g_+(z-c't) + g_-(z+c't) \tag{16.18}$$

folgt. Es handelt sich also um die Überlagerung von Wellen beliebiger Form, die nach oben (f_+, g_+) und nach unten (f_-, g_-) mit der Geschwindigkeit c' laufen. $c' = c/\sqrt{\epsilon\mu}$ ist also die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen (des Lichtes) in dem jeweiligen Medium. Insbesondere finden wir, dass c die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit ist.

. This is the superposition of waves of arbitrary shapes, which propagate upward (f_+, g_+) and downward (f_-, g_-), resp, with velocity c'. Thus $c' = c/\sqrt{\epsilon\mu}$ is the velocity of propagation of the electromagnetic wave (light) in the corresponding medium. In particular we find that c is the light velocity in vacuum.

Wir berechnen noch die Energiedichte

$$u = \frac{1}{8\pi}(\epsilon E^2 + \mu H^2) = \frac{1}{4\pi}(f_+^2 + g_+^2 + f_-^2 + g_-^2) \tag{16.19}$$

und die Energiestromdichte in Form des Poynting-Vektors

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H} = \frac{c'\mathbf{e}_z}{4\pi}(f_+^2 + g_+^2 - f_-^2 - g_-^2), \tag{16.20}$$

wobei wir ein homogenes Feld in z-Richtung nicht berücksichtigt haben. Durch Vergleich der Ausdrücke für u und $\mathbf{S}$ jeweils nur für die nach oben oder unten laufenden Anteile sieht man, dass die Energie mit der Geschwindigkeit der Welle $\pm c'\mathbf{e}_z$ transportiert wird, da $\mathbf{S} = \pm c'\mathbf{e}_z u$. Wir bemerken noch, dass die Welle, für die $E_y = 0$ und $H_x = 0$, das heißt $g_\pm = 0$, linear polarisiert in x-Richtung heißt. Für die Angabe der Polarisationsrichtung ist immer die Richtung des Vektors $\mathbf{E}$ maßgeblich.

We calculate the density of energy

and the density of the energy current by means of the Poynting vector

where a homogeneous field in z-direction is not considered. Comparing the expressions for u and $\mathbf{S}$ separately for the waves moving up and down, one observes that the energy of the wave is transported with velocity $\pm c'\mathbf{e}_z$, since $\mathbf{S} = \pm c'\mathbf{e}_z u$. We remark that the wave which obeys $E_y = 0$ and $H_x = 0$, that is $g_\pm = 0$, is called linearly polarized in x-direction. For the notation of the direction of polarization one always considers that of the vector $\mathbf{E}$.

16.c Überlagerung ebener periodischer Wellen

Allgemein kann man die elektrische Feldstärke als Fourier-Integral ansetzen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \mathrm{d}^3k\mathrm{d}\omega\mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \tag{16.21}$$

analog für $\mathbf{H}$. Damit drücken wir die Felder als Überlagerung ebener periodischer Wellen aus.

16.c Superposition of Plane Periodic Waves

In general one may describe the electric field in terms of a Fourier integral

analogously for $\mathbf{H}$. Then the fields are expressed as a superposition of plane periodic waves.

16.c.α Einschub über Fourier-Reihen und Integrale

Die Fourier-Reihe einer Funktion mit Periode L, $f(x + L) = f(x)$, lautet

$$f(x) = \hat{c}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx/L}. \tag{16.22}$$

f_n sind die Fourier-Koeffizienten von f. Die Darstellung ist möglich für quadrat-integrable Funktionen, mit einer endlichen Anzahl von Unstetigkeits-Stellen. $\hat{c}$ ist eine geeignete Konstante. Die Rücktransformation, das heißt die Berechnung der Fourier-Koeffizienten gewinnt man aus

$$\int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}nx/L} f(x) = \hat{c}Lf_n, \tag{16.23}$$

wie man durch Einsetzen in (16.22) und Vertauschen von Summation und Integration leicht sehen kann. Die Fourier-Transformation für eine von $-\infty$ bis $+\infty$ definierte nicht notwendig periodische Funktion $f(x)$ gewinnt man, indem man den Grenzübergang $L \to \infty$ durchführt und

$$k := \frac{2\pi n}{L}, \quad f_n = f_0(k), \quad \hat{c} = \Delta k = \frac{2\pi}{L} \tag{16.24}$$

16.c.α Insertion on Fourier Series and Integrals

The Fourier series of a function with period L, $f(x + L) = f(x)$ reads

f_n are the Fourier coefficients of f. This representation is possible for square integrable functions with a finite number of points of discontinuity. $\hat{c}$ is an appropriate constant. The back-transformation, that is the calculation of the Fourier coefficients is obtained from

as can be seen easily by inserting in (16.22) and exchanging summation and integration. The Fourier transform for a (normally not-periodic) function defined from $-\infty$ to $+\infty$ can be obtained by performing the limit $L \to \infty$ and introducing

definiert. Dann geht nämlich (16.22) in

. Then (16.22) transforms into

$$f(x) = \sum \Delta k f_0(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \to \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k f_0(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tag{16.25}$$

über und die Rück-Transformation (16.23) in

and the back-transformation (16.23) into

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} = 2\pi f_0(k). \tag{16.26}$$

Damit können wir zum Beispiel die Rücktransformation von (16.21) zu

This allows us, e.g., to give the back-transformation from (16.21) to

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^3 r \mathrm{d}t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \tag{16.27}$$

angeben.

.

16.c.β Zurück zu den Maxwell-Gleichungen

Die Darstellung durch die Fourier-Transformierte hat den Vorteil, dass die Gleichungen einfacher werden. Durch Anwendung der Operationen ∇ und $\partial/\partial t$ auf die Exponentialfunktion

16.c.β Back to Maxwell's Equations

The representation by the Fourier transform has the advantage that the equations become simpler. Applying the operations ∇ and $\partial/\partial t$ on the exponential function

$$\nabla \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = \mathrm{i}\mathbf{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = -\mathrm{i}\omega \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{16.28}$$

in den Maxwell-Gleichungen folgt für die Fourier-Komponenten

in Maxwell's equations yields for the Fourier components

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \to \quad \mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) = 0 \tag{16.29}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad \to \quad \mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0(\mathbf{k}, \omega) = 0 \tag{16.30}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c} \dot{\mathbf{E}} \quad \to \quad \mathrm{i}\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0(\mathbf{k}, \omega) = -\mathrm{i}\frac{\epsilon}{c} \omega \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) \tag{16.31}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \dot{\mathbf{H}} \quad \to \quad \mathrm{i}\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) = \mathrm{i}\frac{\mu}{c} \omega \mathbf{H}_0(\mathbf{k}, \omega). \tag{16.32}$$

Der Vorteil dieser Darstellung besteht darin, daß immer nur Fourier-Komponenten mit gleichem $\mathbf{k}$ und ω miteinander verknüpft sind. Für $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ folgt $\omega = 0$, wobei $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ beliebig sein können. Dies sind die statischen homogenen Felder. Für $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ folgt aus (16.29) und (16.30), dass

The advantage of this representation is that only Fourier components with the same $\mathbf{k}$ and ω are connected to each other. For $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ one obtains $\omega = 0$, where $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ are arbitrary. These are the static homogeneous fields. For $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ one obtains from (16.29) and (16.30)

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) \perp \mathbf{k}, \quad \mathbf{H}_0(\mathbf{k}, \omega) \perp \mathbf{k}. \tag{16.33}$$

Aus den beiden anderen Gleichungen (16.31) und (16.32) folgt

From the two other equations (16.31) and (16.32) one obtains

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega)) = \frac{\mu}{c} \omega \mathbf{k} \times \mathbf{H}_0(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{\epsilon\mu}{c^2} \omega^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega). \tag{16.34}$$

Daraus folgt

From this one obtains

$$\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega)) - k^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{c'^2} \omega^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega), \tag{16.35}$$

analog für $\mathbf{H}_0$. Wegen (16.29) verschwindet der erste Term auf der linken Seite von (16.35). Es gibt also nicht verschwindende Lösungen, wenn die Beziehung $\omega = \pm c'k$ erfüllt ist. Dies ist die Dispersionsrelation für elektromagnetische Wellen, das heißt der Zusammenhang zwischen Frequenz und Wellenvektor für elektromagnetische Wellen. Unter Berücksichtigung dieser Bedingung können wir schreiben

analogously for $\mathbf{H}_0$. The first term on the left hand-side of (16.35) vanishes because of (16.29). Thus there are non-vanishing solutions, if the condition $\omega = \pm c'k$ is fulfilled. This is the dispersion relation for electromagnetic waves that is the relation between frequency and wave-vector for electromagnetic waves. Taking these conditions into account we may write

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{k},\omega) = \frac{1}{2}\delta(\omega - c'k)\mathbf{E}_1(\mathbf{k}) + \frac{1}{2}\delta(\omega + c'k)\mathbf{E}_2(\mathbf{k}). \tag{16.36}$$

und damit

and thus

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \int \mathrm{d}^3k \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}_1(\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_2(\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+c'kt)}\right). \tag{16.37}$$

Da die elektrische Feldstärke reell sein muss, muss sie mit ihrem Konjugiert-komplexen übereinstimmen

Since the electric field has to be real, it must coincide with its conjugate complex.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^*(\mathbf{r},t) &= \int \mathrm{d}^3k \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}_1^*(\mathbf{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_2^*(\mathbf{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+c'kt)}\right)\\ &= \int \mathrm{d}^3k \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}_1^*(-\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+c'kt)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_2^*(-\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)}\right).\end{aligned} \tag{16.38}$$

Durch Koeffizienten-Vergleich folgt

From comparison of the coefficients one obtains

$$\mathbf{E}_2^*(\mathbf{k}) = \mathbf{E}_1(-\mathbf{k}). \tag{16.39}$$

Damit haben wir dann

Thus we obtain

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \int \mathrm{d}^3k \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}_1(\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_1^*(-\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+c'kt)}\right)\\ &= \int \mathrm{d}^3k \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}_1(\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_1^*(\mathbf{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)}\right)\\ &= \Re\Big(\int \mathrm{d}^3k\mathbf{E}_1(\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)}\Big).\end{aligned} \tag{16.40}$$

Für $\mathbf{H}_0$ folgt dann aus (16.32)

Eq. (16.32) yields for $\mathbf{H}_0$

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{k},\omega) = \frac{c}{\mu\omega}\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0(\mathbf{k},\omega) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\left(\delta(\omega - c'k)\frac{\mathbf{k}}{2k}\times\mathbf{E}_1(\mathbf{k}) - \delta(\omega + c'k)\frac{\mathbf{k}}{2k}\times\mathbf{E}_2(\mathbf{k})\right) \tag{16.41}$$

und damit für $\mathbf{H}$

and thus for $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \Re\Big(\int \mathrm{d}^3k \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\frac{\mathbf{k}}{k}\times\mathbf{E}_1(\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)}\Big). \tag{16.42}$$

Trägt nur eine Fourier-Komponente bei, $\mathbf{E}_1(\mathbf{k}) = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\mathbf{E}_{1,0}$ (Idealisierung), so spricht man von einer monochromatischen Welle,

If only one Fourier component $\mathbf{E}_1(\mathbf{k}) = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\mathbf{E}_{1,0}$ (idealization) contributes then one has a monochromatic wave

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \Re(\mathbf{E}_{1,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}-c'k_0t)}) \tag{16.43}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\Re\Big(\frac{\mathbf{k}_0}{k_0}\times\mathbf{E}_{1,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}-c'k_0t)}\Big). \tag{16.44}$$

Von linear polarisierten Wellen (Licht) spricht man, wenn $\mathbf{E}_{1,0} = \mathbf{e}_1 E_{1,0}$ mit einem reellen Einheitsvektor $\mathbf{e}_1$, von zirkular polarisierten, wenn $\mathbf{E}_{1,0} = (\mathbf{e}_1 \mp \mathrm{i}\mathbf{e}_2)E_{1,0}/\sqrt{2}$ mit reellen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$, wobei $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{k}_0$ eine orthogonale Rechtsbasis bilden. Für das obere Vorzeichen ist die Welle rechts-, für das untere links-polarisiert.

The wave (light) is called linearly polarized, if $\mathbf{E}_{1,0} = \mathbf{e}_1 E_{1,0}$ with a real unit-vector $\mathbf{e}_1$, it is called circularly polarized if $\mathbf{E}_{1,0} = (\mathbf{e}_1 \mp \mathrm{i}\mathbf{e}_2)E_{1,0}/\sqrt{2}$ with real unit vectors $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$, where $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ and $\mathbf{k}_0$ form an orthogonal right-handed basis. The upper sign applies for a right-, the lower for a left-polarized wave.

16.c.γ Zeitmittelwerte und Zeitintegrale

Die Energiedichte und der Poynting-Vektor sind Größen, die bilinear in den Feldern sind. Hat man etwa monochromatische Wellen, wie in (16.43) und (16.44), so oszillieren diese Größen. Man ist aber oft am Mittelwert dieser Größen interessiert. Haben wir also zwei Größen

16.c.γ Time averages and time integrals

Energy-density and Poynting vector are quantities bilinear in the fields. In case of a monochromatic wave as in (16.43) and (16.44) these quantities oscillate. One is often interested in the averages of these quantities. Thus if we have two quantities

$$a = \Re\big(a_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\big), \quad b = \Re\big(b_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\big), \tag{16.45}$$

so ist

then one has

$$ab = \frac{1}{4} a_0 b_0 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t} + \frac{1}{4}(a_0 b_0^* + a_0^* b_0) + \frac{1}{4} a_0^* b_0^* \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}. \tag{16.46}$$

Der erste und der letzte Term oszillieren (wir nehmen $\omega \neq 0$ an). Sie heben sich im Zeitmittel weg, so dass im Zeitmittel bleibt

The first and the last term oscillate (we assume $\omega \neq 0$). They cancel in the time average. Thus one obtains in the time average

$$\overline{ab} = \frac{1}{4}(a_0 b_0^* + a_0^* b_0) = \frac{1}{2}\Re(a_0^* b_0). \tag{16.47}$$

Man beachte, dass a_0 und b_0 im allgemeinen komplex sind, und das Zeitmittel wesentlich von der relativen Phase beider Größen und nicht nur von den Beträgen $|a_0|$ und $|b_0|$ abhängt.

Please note that a_0 and b_0 are in general complex and that the time average depends essentially on the relative phase between both quantities and not only on the moduli $|a_0|$ and $|b_0|$.

Sind a und b durch Fourier-Integrale gegeben,

If a and b are given by Fourier integrals

$$a(t) = \Re\Big(\int \mathrm{d}\omega a_0(\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \Big) \tag{16.48}$$

und analog für $b(t)$, so werden häufig die Zeitintegrale über diese Größen und deren Produkte endlich sein. Hierzu müssen wir das Zeitintegral $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ bestimmen. Dieses Integral ist nicht wohl definiert. Tatsächlich soll es aber mit einer in ω stetigen Funktion multipliziert werden, so dass es auch genügt, herauszubekommen, wie sich das Zeit-Integral über dieses Frequenz-Integral verhält. Hierzu gehen wir auf die Notation unseres Einschubs mit x und k zurück und stellen fest, dass

and analogously for $b(t)$, then often the time integrals of these quantities and their products over all times will be finite. For this purpose the time integral $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ has to be determined. This integral is not well defined. In practice it has often to be multiplied with a function continuous in ω. Thus it is sufficient to find out how the time-integral of this frequency-integral behaves. For this purpose we go back to the insertion on Fourier series with x und k and find that

$$\int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}nx/L} = L\delta_{0,n}, \tag{16.49}$$

also

thus

$$\sum_{n=n_-}^{n_+} \int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}nx/L} = L, \tag{16.50}$$

falls $n_- \leq 0$ und $n_+ \geq 0$ sind, sonst verschwindet die Summe. Jetzt führen wir wieder den Limes $L \to \infty$ durch und erhalten

if $n_- \leq 0$ and $n_+ \geq 0$. Otherwise the sum vanishes. Now we perform again the limit $L \to \infty$ and obtain

$$\sum_{k_-}^{k_+} \Delta k \int_{-L/2}^{L/2} dx \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} = \Delta k L \to \int_{k_-}^{k_+} \mathrm{d}k \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} = 2\pi, \tag{16.51}$$

falls k_- negativ und k_+ positiv sind, sonst ist es Null. Daraus folgt

if k_- is negative and k_+ positive, otherwise it vanishes. Thus we obtain

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} = 2\pi\delta(k). \tag{16.52}$$

Mit diesem Ergebnis finden wir

With this result we obtain

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t a(t)b(t) = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \Big(a_0(\omega) + a_0^*(-\omega))(b_0(-\omega) + b_0^*(\omega) \Big). \tag{16.53}$$

Treten nur positive Frequenzen ω unter dem Integral auf, so erhält man

If there are only positive frequencies ω under the integral then one obtains

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t a(t)b(t) = \frac{\pi}{2} \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}\omega \Big(a_0(\omega)b_0^*(\omega) + a_0^*(\omega)b_0(\omega) \Big) = \pi \Re \Big(\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}\omega a_0^*(\omega)b_0(\omega) \Big). \tag{16.54}$$

17 Elektromagnetische Wellen in homogenen Leitern

17 Electromagnetic Waves in Homogeneous Conductors

17.a Transversal-Schwingungen bei niedrigen Frequenzen

Wir untersuchen Transversal-Schwingungen in einem homogenen Leiter. Dabei setzen wir $\mu = 1$. Aus

$$\mathbf{j}_\mathrm{f} = \sigma \mathbf{E} \tag{17.1}$$

folgt

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c}\epsilon \dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{c}\sigma \mathbf{E}. \tag{17.2}$$

Bei periodischen Feldern der Kreisfrequenz ω,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{17.3}$$

entsprechend auch für ρ_f und $\mathbf{j}_\mathrm{f}$, folgt dann

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_0 + (\frac{\mathrm{i}\omega}{c}\epsilon - \frac{4\pi}{c}\sigma)\mathbf{E}_0 = \mathbf{0}. \tag{17.4}$$

Dies können wir auch schreiben

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_0 + \frac{\mathrm{i}\omega}{c}\epsilon(\omega)\mathbf{E}_0 = \mathbf{0}, \quad \epsilon(\omega) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma}{\mathrm{i}\omega}. \tag{17.5}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho}_\mathrm{f} + \operatorname{div} \mathbf{j}_\mathrm{f} = 0 \tag{17.6}$$

folgt

$$-\mathrm{i}\omega\rho_{\mathrm{f},0} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{\mathrm{f},0} = 0 \tag{17.7}$$

und damit

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_0 = 4\pi\rho_{\mathrm{f},0} = \frac{4\pi}{\mathrm{i}\omega} \operatorname{div} \mathbf{j}_{\mathrm{f},0} = \frac{4\pi\sigma}{\mathrm{i}\omega} \operatorname{div} \mathbf{E}_0. \tag{17.8}$$

Damit gilt

$$\epsilon(\omega) \operatorname{div} \mathbf{E}_0 = 0 \tag{17.9}$$

wegen $\operatorname{div} \mathbf{D}_0 = \epsilon \operatorname{div} \mathbf{E}_0$. Wir können daher unsere bisherigen Ergebnisse von Isolatoren auf Leiter übertragen, indem wir ϵ durch $\epsilon(\omega)$ ersetzen. So finden wir

$$k^2 = \epsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}. \tag{17.10}$$

Da $\epsilon(\omega)$ komplex ist, ist für reelles ω der Wellenvektor $\mathbf{k}$ komplex. Wir setzen

$$\sqrt{\epsilon(\omega)} = n + \mathrm{i}\kappa, \quad k = \frac{\omega}{c}(n + \mathrm{i}\kappa) \tag{17.11}$$

17.a Transverse Oscillations at Low Frequencies

We investigate the transverse oscillations in a homogeneous conductor. We put $\mu = 1$. From

$$\mathbf{j}_\mathrm{f} = \sigma \mathbf{E} \tag{17.1}$$

one obtains

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c}\epsilon \dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{c}\sigma \mathbf{E}. \tag{17.2}$$

For periodic fields of frequency ω,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{17.3}$$

and similarly for ρ_f and $\mathbf{j}_\mathrm{f}$, one obtains

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_0 + (\frac{\mathrm{i}\omega}{c}\epsilon - \frac{4\pi}{c}\sigma)\mathbf{E}_0 = \mathbf{0}. \tag{17.4}$$

This can be written

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_0 + \frac{\mathrm{i}\omega}{c}\epsilon(\omega)\mathbf{E}_0 = \mathbf{0}, \quad \epsilon(\omega) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma}{\mathrm{i}\omega}. \tag{17.5}$$

From the equation of continuity

$$\dot{\rho}_\mathrm{f} + \operatorname{div} \mathbf{j}_\mathrm{f} = 0 \tag{17.6}$$

one obtains

$$-\mathrm{i}\omega\rho_{\mathrm{f},0} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{\mathrm{f},0} = 0 \tag{17.7}$$

and thus

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_0 = 4\pi\rho_{\mathrm{f},0} = \frac{4\pi}{\mathrm{i}\omega} \operatorname{div} \mathbf{j}_{\mathrm{f},0} = \frac{4\pi\sigma}{\mathrm{i}\omega} \operatorname{div} \mathbf{E}_0. \tag{17.8}$$

Thus we have

$$\epsilon(\omega) \operatorname{div} \mathbf{E}_0 = 0 \tag{17.9}$$

because of $\operatorname{div} \mathbf{D}_0 = \epsilon \operatorname{div} \mathbf{E}_0$. We may thus transfer our results from insulators to conductors, if we replace ϵ by $\epsilon(\omega)$. Thus we obtain

$$k^2 = \epsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}. \tag{17.10}$$

Since $\epsilon(\omega)$ is complex, one obtains for real ω a complex wave-vector $\mathbf{k}$. We put

$$\sqrt{\epsilon(\omega)} = n + \mathrm{i}\kappa, \quad k = \frac{\omega}{c}(n + \mathrm{i}\kappa) \tag{17.11}$$

und erhalten mit

and obtain a damped wave with

$$e^{ikz} = e^{i\omega nz/c - \omega\kappa z/c} \tag{17.12}$$

eine gedämpfte Welle. Für die Felder ergibt sich dann

. For the fields we obtain

$$\mathbf{E} = \Re(\mathbf{E}_0 e^{i\omega(nz/c-t)}) e^{-\omega\kappa z/c}, \tag{17.13}$$

$$\mathbf{B} = \Re(\sqrt{\epsilon(\omega)}\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_0 e^{i\omega(nz/c-t)}) e^{-\omega\kappa z/c}. \tag{17.14}$$

Die Amplitude fällt auf der Strecke $d = \frac{c}{\omega\kappa}$ auf 1/e ab (Eindringtiefe). Für kleine Frequenzen kann man approximieren

The amplitude decays in a distance $d = \frac{c}{\omega\kappa}$ by a factor 1/e. This distance is called penetration depth or skin depth. For small frequencies one can approximate

$$\sqrt{\epsilon(\omega)} \approx \sqrt{-\frac{4\pi\sigma}{i\omega}} = (1+i)\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}, \quad n = \kappa = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}, \quad d = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}. \tag{17.15}$$

Für Kupfer hat man $\sigma = 5.8 \cdot 10^{17}\ s^{-1}$, für $\omega = 2\pi \cdot 50\ s^{-1}$ folgt $d = 9$ mm. Man spricht vom Skin-Effekt. Der Wechselstrom fällt im Leiter nach innen exponentiell ab, wobei der Abfall für höhere Frequenzen rapider ist.

For copper one has $\sigma = 5.8 \cdot 10^{17}\ s^{-1}$, for $\omega = 2\pi \cdot 50\ s^{-1}$ one obtains $d = 9$ mm. This effect is called the skin-effect. The alternating current decays exponentially inside the conductor. For larger frequencies the decay is more rapidly.

17.b Transversal-Schwingungen bei hohen Frequenzen

17.b Transverse Oscillations at High Frequencies

Tatsächlich hängen ϵ und σ von ω ab. Wir wollen das Frequenz-Verhalten der Leitfähigkeit modellmäßig betrachten und gehen von der Bewegungsgleichung eines Ladungsträgers (zum Beispiel eines Elektrons im Metall) aus,

In reality ϵ and σ depend on ω. We will now consider the frequency dependence of the conductivity within a simple model and start out from the equation of motion of a charge (for example an electron in a metal)

$$m_0\ddot{\mathbf{r}} = e_0\mathbf{E} - \frac{m_0}{\tau}\dot{\mathbf{r}}, \tag{17.16}$$

wobei m_0 und e_0 Masse und Ladung des Ladungsträgers seien. Der letzte Term ist ein Reibungsterm, der die Stöße mit anderen Teilchen pauschal beschreibt. Dabei ist τ die Relaxationszeit, die angibt, wie rasch die Bewegung ohne elektrisches Feld abklingt. Mit $\mathbf{j}_f = \rho_f\dot{\mathbf{r}} = n_0 e_0\dot{\mathbf{r}}$, wobei n_0 die Dichte der freibeweglichen Ladungsträger ist, folgt dann

where m_0 and e_0 are mass and charge of the carrier. The last term is a friction term which takes the collisions with other particles in a rough way into account. There τ is the relaxation time, which describes how fast the velocity decays in the absense of an electric field. One obtains with $\mathbf{j}_f = \rho_f\dot{\mathbf{r}} = n_0 e_0\dot{\mathbf{r}}$, where n_0 is the density of the freely moving carriers

$$\frac{m_0}{n_0 e_0}\frac{\partial \mathbf{j}_f}{\partial t} = e_0\mathbf{E} - \frac{m_0}{n_0\tau e_0}\mathbf{j}_f. \tag{17.17}$$

Im stationären Fall $\partial\mathbf{j}_f/\partial t = \mathbf{0}$ folgt die statische Leitfähigkeit $\sigma_0 = \frac{n_0\tau e_0^2}{m_0}$, so dass wir

In the stationary case $\partial\mathbf{j}_f/\partial t = \mathbf{0}$ one obtains the static conductivity $\sigma_0 = \frac{n_0\tau e_0^2}{m_0}$. Thus we can write

$$\tau\frac{\partial \mathbf{j}_f}{\partial t} = \sigma_0\mathbf{E} - \mathbf{j}_f \tag{17.18}$$

schreiben können. Mit der Zeitabhängigkeit $\propto e^{-i\omega\tau}$ folgt dann

. With the time dependence $\propto e^{-i\omega\tau}$ one obtains

$$(1 - i\omega\tau)\mathbf{j}_{f,0} = \sigma_0\mathbf{E}_0, \tag{17.19}$$

was aufgelöst wird zu

which can be rewritten

$$\mathbf{j}_{f,0} = \sigma(\omega)\mathbf{E}_0 \tag{17.20}$$

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - \mathrm{i}\omega\tau} \tag{17.21}$$

$$\epsilon(\omega) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma_0}{\mathrm{i}\omega(1 - \mathrm{i}\omega\tau)}. \tag{17.22}$$

Für hohe Frequenzen, $\omega\tau \gg 1$ folgt daraus

For large frequencies, $\omega\tau \gg 1$ one obtains

$$\epsilon(\omega) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma_0}{\tau\omega^2} = \epsilon - \frac{4\pi n_0 e_0^2}{m_0\omega^2} = \epsilon\Big(1 - \frac{\omega_\mathrm{P}^2}{\omega^2}\Big) \tag{17.23}$$

mit der Plasmafrequenz

with the plasma frequency

$$\omega_\mathrm{P} = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e_0^2}{\epsilon m_0}}. \tag{17.24}$$

Für $\omega < \omega_\mathrm{P}$ erhält man ein negatives $\epsilon(\omega)$, das heißt

For $\omega < \omega_\mathrm{P}$ one obtains a negative $\epsilon(\omega)$, that is

$$n = 0, \quad \kappa = \sqrt{\epsilon\Big(\frac{\omega_\mathrm{P}^2}{\omega^2} - 1\Big)} \tag{17.25}$$

mit einem exponentiellen Abfall der Welle. Für $\omega > \omega_\mathrm{P}$ dagegen wird ϵ positiv,

with an exponential decay of the wave. However, for $\omega > \omega_\mathrm{P}$ one obtains a positive ϵ

$$n = \sqrt{\epsilon\Big(1 - \frac{\omega_\mathrm{P}^2}{\omega^2}\Big)}, \quad \kappa = 0. \tag{17.26}$$

Für diese hohen Frequenzen ist der Leiter durchsichtig. Für Kupfer hat man $1/\tau = 3.7 \cdot 10^{13}\ \mathrm{s}^{-1}$, $\sigma_0 = 5.8 \cdot 10^{17}\ \mathrm{s}^{-1}$ und $\omega_\mathrm{P} = 1.6 \cdot 10^{16}\ \mathrm{s}^{-1}$. Für sichtbares Licht hat man den Frequenz-Bereich $\omega = 2.4...5.2 \cdot 10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$, so dass Kupfer im sichtbaren Bereich undurchsichtig ist. In Elektrolyten ist jedoch die Ladungsträgerdichte niedriger, die Masse der Ladungsträger höher, so dass die Plasmafrequenz niedriger ist. Daher sind Elektrolyte in der Regel durchsichtig.

For such large frequencies the conductor becomes transparent. For copper one has $1/\tau = 3.7 \cdot 10^{13}\ \mathrm{s}^{-1}$, $\sigma_0 = 5.8 \cdot 10^{17}\ \mathrm{s}^{-1}$ and $\omega_\mathrm{P} = 1.6 \cdot 10^{16}\ \mathrm{s}^{-1}$. For visible light one has the frequency-region $\omega = 2.4...5.2 \cdot 10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$, so that copper is non-transparent in the visible range. In electrolytes, however, the carrier density is less, the mass is bigger, so that the plasma-frequency is smaller. Thus electrolytes are normally transparent.

17.c Longitudinale = Plasma-Schwingungen

17.c Longitudinal = Plasma Oscilations

Für $\omega = \omega_\mathrm{P}$ ist $\epsilon(\omega) = 0$. Dann erlaubt (17.9) longitudinale elektrische Wellen

One has $\epsilon(\omega) = 0$ for $\omega = \omega_\mathrm{P}$. Then (17.9) allows for longitudinal electric waves

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_z \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega_\mathrm{P} t)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}. \tag{17.27}$$

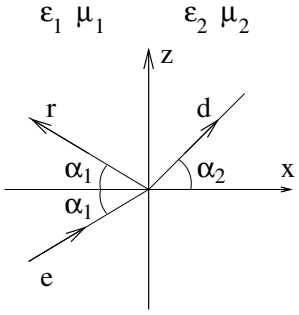
Diese gehen mit longitudinalen Schwingungen der Ladungsträger einher, die man erhält, wenn man den Reibungsterm in (17.17) vernachlässigt.

These go along with longitudinal oscillations of the charge carriers, which are obtained by neglecting the friction term in (17.17).

18 Reflexion und Brechung an einer ebenen Grenzfläche

18.a Problemstellung und Ausbreitungsrichtung

Wir betrachten eine einlaufende ebene Welle $\propto e^{i(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ für $x < 0$, $\mathbf{k}_e = (k', 0, k_z)$, die auf die Grenzfläche $x = 0$ auftrifft. Für $x < 0$ habe man die Dielektrizitätskonstante ϵ_1 und die Permeabilität μ_1, für $x > 0$ habe man ϵ_2 und μ_2. An der Grenzfläche $x = 0$ variiert die Welle wie $\propto e^{i(k_z z - \omega t)}$. Für die reflektierte und die gebrochene Welle hat man das gleiche Verhalten an der Grenzfläche, das heißt sie stimmen alle in k_z, k_y und ω überein und unterscheiden sich nur in k_x. Aus



folgt

$$\mathbf{k}_i^2 = \frac{\epsilon_i \mu_i \omega^2}{c^2} = \frac{n_i^2 \omega^2}{c^2}, \quad n_i = \sqrt{\epsilon_i \mu_i} \tag{18.1}$$

18 Reflection and Refraction at a Planar Surface

18.a Problem and Direction of Propagation

We consider an incident plane wave $\propto e^{i(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ for $x < 0$, $\mathbf{k}_e = (k', 0, k_z)$, which hits the plane boundary $x = 0$. For $x < 0$ the dielectric constant and the permeability be ϵ_1 and μ_1, resp., for $x > 0$ these constants are ϵ_2 and μ_2. At the boundary $x = 0$ the wave oscillates $\propto e^{i(k_z z - \omega t)}$. The reflected and the refracted wave show the same behaviour at the boundary, i.e. all three waves have k_z, k_y and ω in common and differ only in k_x. From

one obtains

$$k_1^2 = k_z^2 + k'^2 = \frac{n_1^2 \omega^2}{c^2} \qquad \mathbf{k}_r = (-k', 0, k_z) \tag{18.2}$$

$$k_2^2 = k_z^2 + k''^2 = \frac{n_2^2 \omega^2}{c^2} \qquad \mathbf{k}_d = (k'', 0, k_z). \tag{18.3}$$

Dabei sind $n_{1,2}$ die Brechzahlen der beiden Medien. Die x-Komponente des Wellenvektors der reflektierten Welle $\mathbf{k}_r$ ist gerade das Negative der einlaufenden Welle. Daher stimmt der Einfallswinkel α_1 mit dem Reflexionswinkel überein. Falls k'' reell ist, muss man $k'' > 0$ wählen, damit die Welle ausläuft und nicht einläuft. Falls k'' imaginär ist, muss man $\Im k'' > 0$ wählen, damit die Welle im Material 2 exponentiell abklingt und nicht anwächst. Für reelles k'' hat man

Here $n_{1,2}$ are the indices of refraction of both media. The x-component of the wave-vector of the reflected wave $\mathbf{k}_r$ is the negative of that of the incident wave. Thus the angle of the incident wave α_1 and of the reflected wave are equal. If k'' is real then $k'' > 0$ has to be chosen so that the wave is outgoing and not incoming. If k'' is imaginary then $\Im k'' > 0$ has to be chosen, so that the wave decays exponentially in the medium 2 and does grow exponentially. For real k'' one has

$$k_z = k_1 \sin \alpha_1 = k_2 \sin \alpha_2. \tag{18.4}$$

Daraus folgt mit (18.1) das Snelliussche Brechungsgesetz

Thus Snell's law follows from (18.1)

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2. \tag{18.5}$$

Falls sich $\sin\alpha_2 > 1$ ergibt, entspricht das einem imaginären k''. Wir bemerken schließlich noch

If $\sin\alpha_2 > 1$ results, then this corresponds to an imaginary k''. We finally remark

$$\frac{k'}{k''} = \frac{k_1\cos\alpha_1}{k_2\cos\alpha_2} = \frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1}. \tag{18.6}$$

18.b Grenzbedingungen, Amplituden

Wir müssen nun zwei Polarisationen unterscheiden. Diese werden auf die Einfallsebene bezogen. Diese ist die von der Richtung des einfallenden Strahls und von der Normalen auf die Grenzfläche aufgespannte Ebene (in unseren Koordinaten die x-z-Ebene). Die Polarisation 1 liegt senkrecht zur Einfallsebene, das heißt **E** ist in y-Richtung polarisiert. Die Polarisation 2 liegt in der Einfallsebene, **H** liegt in y-Richtung. Man erhält dann folgende Polarisationen und Stetigkeitsbedingungen

18.b Boundary Conditions, Amplitudes

In the following we have to distinguish two polarizations. They are referred to the plane of incidence. The plane of incidence is spaned by the direction of the incident wave and by the normal to the boundary (in our coordinates the x-z-plane). The polarization 1 is perpendicular to the plane of incidence, i.e. **E** is polarized in y-direction. The polarization 2 lies in the plane of incidence, **H** points in y-direction. One obtains the following conditions on polarization and continuity

	Polarisation 1 polarization 1	Polarisation 2 polarization 2	
E **H**	$\perp$ Einfallsebene plane of inc. in Einfallsebene in plane of inc.	in Einfallsebene in plane of inc. $\perp$ Einfallsebene plane of inc.	
$\mathbf{E}_\mathrm{t}$	$E_{1,y} = E_{2,y}$	$E_{1,z} = E_{2,z}$	(18.7)
$D_\mathrm{n} = \epsilon E_\mathrm{n}$		$\epsilon_1 E_{1,x} = \epsilon_2 E_{2,x}$	(18.8)
$\mathbf{H}_\mathrm{t}$	$H_{1,z} = H_{2,z}$	$H_{1,y} = H_{2,y}$	(18.9)
$B_\mathrm{n} = \mu H_\mathrm{n}$	$\mu_1 H_{1,x} = \mu_2 H_{2,x}$		(18.10)

Für die Polarisation 1 hat man daher für die elektrische Feldstärke

Thus the ansatz for the electric field of polarization 1 is

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}\mathbf{e}_y \cdot \begin{cases} (E_\mathrm{e}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x} + E_\mathrm{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x}) & x<0 \\ E_\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k''x} & x>0 \end{cases} \tag{18.11}$$

anzusetzen. Aus den MAXWELL-Gleichungen erhält man daraus die magnetische Feldstärke

. From MAXWELL's equations one obtains for the magnetic field

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\dot{\mathbf{H}} = \frac{\mathrm{i}\omega\mu}{c}\mathbf{H}, \tag{18.12}$$

$$\mu H_x = \frac{c}{\mathrm{i}\omega}(\mathrm{rot}\,\mathbf{E})_x = -\frac{c}{\mathrm{i}\omega}\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{ck_z}{\omega}E_y \tag{18.13}$$

$$H_z = \frac{c}{\mathrm{i}\mu\omega}\frac{\partial E_y}{\partial x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}\frac{c}{\omega}\cdot\begin{cases} \frac{k'}{\mu_1}(E_\mathrm{e}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x} - E_\mathrm{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x}) & x<0 \\ \frac{k''}{\mu_2}E_\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k''x} & x>0. \end{cases} \tag{18.14}$$

Die Randbedingungen ergeben sich aus der Stetigkeit von E_y, die mit der Stetigkeit von μH_x identisch ist, und aus der Stetigkeit von H_z,

The boundary conditions come from the continuity of E_y, which is identical to the continuity of μH_x, and from the continuity of H_z,

$$E_\mathrm{e} + E_\mathrm{r} = E_\mathrm{d}, \quad \frac{k'}{\mu_1}(E_\mathrm{e} - E_\mathrm{r}) = \frac{k''}{\mu_2}E_\mathrm{d}, \tag{18.15}$$

woraus die Amplituden

from which one obtains the amplitudes

$$E_\mathrm{r} = \frac{\mu_2 k' - \mu_1 k''}{\mu_2 k' + \mu_1 k''}E_\mathrm{e}, \quad E_\mathrm{d} = \frac{2\mu_2 k'}{\mu_2 k' + \mu_1 k''}E_\mathrm{e} \tag{18.16}$$

folgen.

.

Von der Polarisation 1 gelangt man zur Polarisation 2 durch die Transformation

One comes from polarization 1 to polarization 2 by the transformation

$$\mathbf{E} \to \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \to -\mathbf{E}, \quad \epsilon \leftrightarrow \mu. \tag{18.17}$$

Daher erhält man für die Amplituden

Thus one obtains for the amplitudes

$$H_\mathrm{r} = \frac{\epsilon_2 k' - \epsilon_1 k''}{\epsilon_2 k' + \epsilon_1 k''} H_\mathrm{e}, \quad H_\mathrm{d} = \frac{2\epsilon_2 k'}{\epsilon_2 k' + \epsilon_1 k''} H_\mathrm{e}. \tag{18.18}$$

18.c Diskussion für $\mu_1 = \mu_2$

18.c Discussion for $\mu_1 = \mu_2$

Wir diskutieren nun die Ergebnisse für $\mu_1 = \mu_2$, da für viele Materialien die Permeabilität praktisch gleich 1 ist.

Now we discuss the results for $\mu = 1 = \mu_2$, since for many media the permeability is practically equal to 1.

18.c.α Isolator, $|\sin\alpha_2| < 1$: Brechung

18.c.α Insulator, $|\sin\alpha_2| < 1$: Refraction

Wir bestimmen nun die Amplitude der reflektierten Welle aus der der einfallenden Welle. Der Reflexionskoeffizient R, das heißt der Anteil der Strahlungsleistung, die reflektiert wird, ergibt sich zu

Now we determine the amplitude of the reflected wave from that of the incident wave. The reflection coefficient R, i.e. the percentage of the incident power which is reflected is given by

$$R = \Big(\frac{E_\mathrm{r}}{E_\mathrm{e}}\Big)^2 = \Big(\frac{H_\mathrm{r}}{H_\mathrm{e}}\Big)^2, \tag{18.19}$$

da der zeitgemittelte Poynting-Vektor $\mathbf{S} = c\mathbf{E} \times \mathbf{H}/(4\pi)$ für Vektoren $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$, die orthogonal auf einander stehen, sich betragsmäßig zu

since the modulus of the time averaged Poynting vector $\mathbf{S} = c\mathbf{E} \times \mathbf{H}/(4\pi)$ for vectors $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ which are orthogonal to each other yields

$$\overline{|\mathbf{S}|} = \frac{c}{8\pi}|\mathbf{E}| \cdot |\mathbf{H}| = \frac{c'}{8\pi}\epsilon E^2 = \frac{c'}{8\pi}\mu H^2 \tag{18.20}$$

ergibt. Für die Polarisation 1 ergibt sich mit (18.6)

. For the polarisation 1 one obtains with (18.6)

$$E_\mathrm{r} = \frac{k' - k''}{k' + k''} E_\mathrm{e} = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{\tan\alpha_2 + \tan\alpha_1} E_\mathrm{e} = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_2 + \alpha_1)} E_\mathrm{e}. \tag{18.21}$$

Für die Polarisation 2 folgt

For polarization 2 one has

$$H_\mathrm{r} = \frac{n_2^2 k' - n_1^2 k''}{n_2^2 k' + n_1^2 k''} H_\mathrm{e} = \frac{\sin^2\alpha_1 \tan\alpha_2 - \sin^2\alpha_2 \tan\alpha_1}{\sin^2\alpha_1 \tan\alpha_2 + \sin^2\alpha_2 \tan\alpha_1} H_\mathrm{e} = \frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_2)} H_\mathrm{e}. \tag{18.22}$$

Man erkennt, dass bei der Polarisation 2 die Reflexion verschwindet, wenn $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^0$, woraus dann wegen $\sin\alpha_2 = \cos\alpha_1$ und (18.5) $\tan\alpha_1 = n_2/n_1$ folgt. Dies ist der Brewstersche Winkel. Bei Einfall von Licht unter diesem Winkel wird nur Licht der Polarisation 1 reflektiert. Dies kann zur Erzeugung linear polarisierten Lichtes verwendet werden. Im Limes α gegen Null, das heißt bei senkrechtem Auffall des Lichtes ergibt sich für beide Polarisationen (die in diesem Limes nicht mehr zu unterscheiden sind)

One finds that the reflection vanishes for polarization 2 for $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^0$, from which one obtains $\tan\alpha_1 = n_2/n_1$ because of $\sin\alpha_2 = \cos\alpha_1$ and (18.5). This angle is called Brewster's angle. By incidence of light under this angle only light of polarization 1 is reflected. This can be used to generate linearly polarized light. In the limit α approaching zero, i.e. by incidence of the light perpendicular to the surface one obtains for both polarizations (which can no longer be distinguished)

$$R = \Big(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\Big)^2, \quad \alpha = 0 \tag{18.23}$$

18.c.β Isolator, $|\sin\alpha_2| > 1$: Totalreflexion

In diesem Fall ist k'' imaginär. Die Welle dringt nur noch exponentiell abklingend in das zweite Material ein. Jeweils den ersten Ausdrücken in (18.21) und (18.22) entnimmt man, da der Zähler des Bruchs das konjugiert Komplexe des Nenners ist, dass

$$|E_\mathrm{r}| = |E_\mathrm{e}|, \quad |H_\mathrm{r}| = |H_\mathrm{e}|. \quad R = 1, \tag{18.24}$$

Man hat also Totalreflexion.

18.c.β Insulator, $|sin\alpha_2| > 1$: Total Reflection

In this case k'' is imaginary. The wave penetrates only exponentially decaying into the second medium. From the first expressions of (18.21) and (18.22) one finds since the numerator of the fraction is the conjugate complex of the denominator that

Thus one has total reflection.

18.c.γ Metallische Reflexion, $\alpha = 0$

Im Falle der metallischen Reflexion setzen wir $n_1 = 1$ (Vakuum oder Luft) und $n_2 = n + \mathrm{i}\kappa$ (17.11). Dann folgt für den Reflexionskoeffizient für $\alpha = 0$ aus (18.23)

$$R = \left|\frac{n + \mathrm{i}\kappa - 1}{n + \mathrm{i}\kappa + 1}\right|^2 = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2} = 1 - \frac{4n}{(n+1)^2 + \kappa^2}. \tag{18.25}$$

Für $\omega\epsilon \ll 2\pi\sigma$ folgt dann aus (17.5) und (17.15)

$$n \approx \kappa \approx \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}, \quad R \approx 1 - \frac{2}{n} \approx 1 - \sqrt{\frac{2\omega}{\pi\sigma}}, \tag{18.26}$$

ein Ergebnis, das nach Hagen und Rubens benannt ist.

18.c.γ Metallic Reflection, $\alpha = 0$

In the case of metallic reflection we set $n_1 = 1$ (vacuum or air) and $n_2 = n + \mathrm{i}\kappa$ (17.11). Then one obtains from (18.23) for $\alpha = 0$ the reflection coefficient

For $\omega\epsilon \ll 2\pi\sigma$ one obtains from (17.5) and (17.15)

a result named after Hagen and Rubens.

18.c.δ Oberflächenwellen am Leiter

Wir wollen nun noch Wellen betrachten, die sich an der Grenzfläche von Leiter und Vakuum entlang bewegen. Wir setzen also $\epsilon_1 = 1$ und $\epsilon_2 = \epsilon(\omega)$ aus (17.5). Wir benötigen dann auf jeder Seite der Grenzfläche genau eine Welle. Das erreichen wir, wenn wir die Lösung aufsuchen, bei der keine Welle reflektiert wird. Das heißt, wir nehmen formal die Welle mit Polarisation 2, bei der H_r in (18.18) verschwindet, also

$$\epsilon(\omega)k' = k'' \tag{18.27}$$

gilt. Zusammen mit (18.2) und (18.3)

$$k_z^2 + k'^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad k_z^2 + k''^2 = \frac{\epsilon(\omega)\omega^2}{c^2} \tag{18.28}$$

findet man die Lösung

$$k_z = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{1+\epsilon(\omega)}}, \quad k' = \frac{k_z}{\sqrt{\epsilon(\omega)}}, \quad k'' = \sqrt{\epsilon(\omega)}k_z. \tag{18.29}$$

Mit der Näherung (17.15) erhält man für nicht zu große Frequenzen

$$k_z = \frac{\omega}{c}\Big(1 + \frac{\mathrm{i}\omega}{8\pi\sigma}\Big) \tag{18.30}$$

18.c.δ Surface Waves along a Conductor

Finally we consider waves, which run along the boundary of a conductor with the vacuum. Thus we set $\epsilon_1 = 1$ and $\epsilon_2 = \epsilon(\omega)$ from (17.5). Then we need one wave on each side of the boundary. We obtain this by looking for a solution, where no wave is reflected. Formally this means that we choose a wave of polarization 2 for which H_r in (18.18) vanishes, thus

has to hold. With (18.2) and (18.3)

one obtains the solution

Using approximation (17.15) one obtains for frequencies which are not too large

$$k' = \frac{(1-\mathrm{i})\omega^{3/2}}{2c\sqrt{2\pi\sigma}} \tag{18.31}$$

$$k'' = \frac{(1+\mathrm{i})\omega^{1/2}\sqrt{2\pi\sigma}}{c}. \tag{18.32}$$

Für kleine Frequenzen, $\omega < \sigma$, ist daher der exponentielle Abfall in Ausbreitungsrichtung (k_z) am langsamsten, in das Vakuum hinein etwas schneller (k') und im Metall am schnellsten (k'').

Thus for small frequencies, $\omega < \sigma$, the exponential decay in direction of propagation (k_z) is smallest, into the vacuum it is faster (k') and into the metal it is fastest (k'').

19 Hohlleiter

Es gibt verschiedene Arten von Wellenleitern. Diese können zum Beispiel aus zwei Leitern bestehen, die entweder nebeneinander herlaufen (zwei Drähte) oder koaxiale Leiter sind. Man kann aber auch elektromagnetische Wellen in einem dielektrischen Wellenleiter (Lichtleiter) oder in einem Hohlleiter führen.

In allen Fällen wollen wir davon ausgehen, dass Translationsinvarianz in z-Richtung besteht, so dass die Materialgrößen ϵ, μ und σ nur Funktionen von x und y sind. Dann kann man die elektromagnetischen Felder ansetzen zu

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}. \tag{19.1}$$

Es bleiben nun die Funktionen $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ und $\omega(k_z)$ zu bestimmen.

19.a Hohlleiter

Wir wollen das Programm für einen Hohlleiter durchführen, das heißt für einen Metallzylinder (nicht notwendig mit kreisförmigem Querschnitt). Wir beginnen mit den Randbedingungen, wobei wir die metallische Oberfläche als idealen Leiter annehmen, $\sigma = \infty$. Dann gilt an der Oberfläche

$$\mathbf{E}_\mathrm{t} = \mathbf{0}, \tag{19.2}$$

da eine tangentiale Komponente eine unendlich große Stromdichte an der Oberfläche bewirken würde. Weiter folgt aus $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}/c$

$$\mathrm{i}kB_\mathrm{n} = (\operatorname{rot}\mathbf{E})_\mathrm{n} = (\operatorname{rot}\mathbf{E}_\mathrm{t})\cdot\mathbf{e}_\mathrm{n} \quad k = \omega/c, \tag{19.3}$$

woraus

$$B_\mathrm{n} = 0 \tag{19.4}$$

folgt.

Im Inneren des Hohlleiters gilt

$$(\operatorname{rot}\mathbf{E})_y = -\frac{1}{c}\dot{B}_y \quad \rightarrow \quad \mathrm{i}k_z E_{0,x} - \nabla_x E_{0,z} = \mathrm{i}kB_{0,y} \tag{19.5}$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{B})_x = \frac{1}{c}\dot{E}_x \quad \rightarrow \quad \nabla_y B_{0,z} - \mathrm{i}k_z B_{0,y} = -\mathrm{i}kE_{0,x}. \tag{19.6}$$

Unter Verwendung von

$$k_\perp^2 = k^2 - k_z^2 \tag{19.7}$$

19 Wave Guides

There are various kinds of wave guides. They may consist for example of two conductors, which run in parallel (two wires) or which are coaxial conductors. But one may also guide an electro-magnetic wave in a dielectric wave guide (for light e.g.) or in a hollow metallic cylinder.

In all cases we assume translational invariance in z-direction, so that material properties ϵ, μ, and σ are only functions of x and y. Then the electromagnetic fields can be written

Then the functions $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ and $\omega(k_z)$ have to be determined.

19.a Wave Guides

We will carry through this program for a wave guide which is a hollow metallic cylinder (not necessarily with circular cross-section). We start out from the boundary conditions, where we assume that the cylinder surface is an ideal metal $\sigma = \infty$. Then one has at the surface

since a tangential component would yield an infinite current density at the surface. Further from $\operatorname{curl}\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}/c$ it follows that

from which one obtains

.

Inside the wave guide one has

By use of

lassen sich die Transversalkomponenten durch die Longitudinalkomponenten ausdrücken

one can express the transverse components by the longitudinal components

$$k_\perp^2 E_{0,x} = \mathrm{i}k_z \nabla_x E_{0,z} + \mathrm{i}k \nabla_y B_{0,z} \tag{19.8}$$
$$k_\perp^2 B_{0,y} = \mathrm{i}k \nabla_x E_{0,z} + \mathrm{i}k_z \nabla_y B_{0,z}. \tag{19.9}$$

Ähnliche Gleichungen gelten für $E_{0,y}$ und $B_{0,x}$. Zur Bestimmung der Longitudinalkomponenten verwenden wir die Wellengleichung

Similar equations hold for $E_{0,y}$ and $B_{0,x}$. In order to determine the longitudinal components we use the wave equation

$$(\triangle - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2})(E_{0,z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}) = 0, \tag{19.10}$$

woraus

from which one obtains

$$(\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + k_\perp^2) E_{0,z}(x,y) = 0 \tag{19.11}$$

und analog

and similarly

$$(\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + k_\perp^2) B_{0,z}(x,y) = 0 \tag{19.12}$$

folgt. Man kann zeigen, dass damit für $k_\perp \neq 0$ auch die übrigen Maxwell-Gleichungen erfüllt sind. Es gilt nämlich

. One can show that the other equations of Maxwell are fulfilled for $k_\perp \neq 0$, since

$$\left.\begin{array}{r} k_\perp^2 \operatorname{div} \mathbf{E} = \mathrm{i}k_z \\ k_\perp^2 (\operatorname{rot} \mathbf{B} - \dot{\mathbf{E}}/c)_z = \mathrm{i}k \end{array}\right\} \cdot (\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + k_\perp^2) E_{0,z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)} \tag{19.13}$$

$$\left.\begin{array}{r} k_\perp^2 \operatorname{div} \mathbf{B} = \mathrm{i}k_z \\ k_\perp^2 (\operatorname{rot} \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}}/c)_z = -\mathrm{i}k \end{array}\right\} \cdot (\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + k_\perp^2) B_{0,z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}. \tag{19.14}$$

Es genügt daher, die Wellengleichungen zu erfüllen. Wir bemerken weiter, dass $E_{0,z}$ und $B_{0,z}$ von einander unabhängig sind. Man unterscheidet dementsprechend TE-Moden (transversal elektrisch) mit $E_{0,z} = 0$ und TM-Moden (transversal magnetisch) mit $B_{0,z} = 0$.

Thus it is sufficient to fulfill the wave equations. We further note that $E_{0,z}$ and $B_{0,z}$ are independent from each other. Correspondingly one distinguishes TE-modes (transverse electric) with $E_{0,z} = 0$ and TM-modes (transverse magnetic) with $B_{0,z} = 0$.

Wir kommen nun nochmals auf die Randbedingungen zurück. Die Komponenten senkrecht zu der Ausbreitungsrichtung z lassen sich

We return to the boundary conditions. The components perpendicular to the direction of propagation z read

$$k_\perp^2 (\mathbf{e}_x E_{0,x} + \mathbf{e}_y E_{0,y}) = \mathrm{i}k_z \operatorname{grad} E_{0,z} - \mathrm{i}k \mathbf{e}_z \times \operatorname{grad} B_{0,z} \tag{19.15}$$
$$k_\perp^2 (\mathbf{e}_x B_{0,x} + \mathbf{e}_y B_{0,y}) = \mathrm{i}k_z \operatorname{grad} B_{0,z} + \mathrm{i}k \mathbf{e}_z \times \operatorname{grad} E_{0,z} \tag{19.16}$$

schreiben. Führen wir auf der Oberfläche des Hohlleiters zu dem Normalenvektor $\mathbf{e}_n$ und dem Vektor $\mathbf{e}_z$ noch einen dritten Einheitsvektor $\mathbf{e}_c = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_n$ ein, dann wird die Tangentialebene an die Oberfläche durch $\mathbf{e}_z$ und $\mathbf{e}_c$ aufgespannt. $\mathbf{e}_c$ liegt dabei in der xy-Ebene. Da auch $\mathbf{e}_n$ in der xy-Ebene liegt, können wir auf n- und c-Komponenten transformieren

. If we introduce besides the normal vector $\mathbf{e}_n$ and the vector $\mathbf{e}_z$ a third unit vector $\mathbf{e}_c = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_n$ at the surface of the waveguide then the tangential plain of the surface is spanned by $\mathbf{e}_z$ and $\mathbf{e}_c$. $\mathbf{e}_c$ itself lies in the xy-plain. Since $\mathbf{e}_n$ lies in the xy-plain too, we may transform to n and c components

$$\mathbf{e}_x E_{0,x} + \mathbf{e}_y E_{0,y} = \mathbf{e}_c E_{0,c} + \mathbf{e}_n E_{0,n}. \tag{19.17}$$

Damit lassen sich dann (19.15, 19.16) in der Form

Then (19.15, 19.16) can be brought into the form

$$k_\perp^2 (\mathbf{e}_n E_{0,n} + \mathbf{e}_c E_{0,c}) = \mathrm{i}k_z (\mathbf{e}_n \partial_n E_{0,z} + \mathbf{e}_c \partial_c E_{0,z}) - \mathrm{i}k (\mathbf{e}_c \partial_n B_{0,z} - \mathbf{e}_n \partial_c B_{0,z}), \tag{19.18}$$
$$k_\perp^2 (\mathbf{e}_n B_{0,n} + \mathbf{e}_c B_{0,c}) = \mathrm{i}k_z (\mathbf{e}_n \partial_n B_{0,z} + \mathbf{e}_c \partial_c B_{0,z}) + \mathrm{i}k (\mathbf{e}_c \partial_n E_{0,z} - \mathbf{e}_n \partial_c E_{0,z}) \tag{19.19}$$

schreiben. Auf der Oberfläche muss gemäß (19.2, 19.4)

. At the surface one has

$$E_{0,z} = E_{0,c} = B_{0,\mathrm{n}} = 0 \tag{19.20}$$

gelten. Aus (19.18, 19.19) folgt

according to (19.2, 19.4). From (19.18, 19.19) one obtains

$$k_\perp^2 E_{0,c} = \mathrm{i}k_z \partial_c E_{0,z} - \mathrm{i}k\partial_n B_{0,z}, \tag{19.21}$$

$$k_\perp^2 B_{0,\mathrm{n}} = \mathrm{i}k_z \partial_n B_{0,z} + \mathrm{i}k\partial_c E_{0,z}. \tag{19.22}$$

Da $E_{0,z} = 0$ auf der Oberfläche, gilt auch $\partial_c E_{0,z} = 0$ auf der Oberfläche. Offensichtlich hat man als zweite Bedingung $\partial_n B_{0,z} = 0$.

Since $E_{0,z} = 0$ holds at the surface one has $\partial_c E_{0,z} = 0$ at the surface too. Apparently the second condition is $\partial_n B_{0,z} = 0$.

Damit ist das folgende Eigenwert-Problem zu lösen

Then the following eigenvalue problem has to be solved

$$\text{TM-Mode:} \quad (\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + k_\perp^2) E_{0,z} = 0, \quad E_{0,z} = 0 \begin{matrix}\text{auf der Oberfläche} \\ \text{at the surface}\end{matrix}, \tag{19.23}$$

$$\text{TE-Mode:} \quad (\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + k_\perp^2) B_{0,z} = 0, \quad (\operatorname{grad} B_{0,z})_\mathrm{n} = 0 \begin{matrix}\text{auf der Oberfläche} \\ \text{at the surface}\end{matrix}. \tag{19.24}$$

Es folgt das Dispersionsgesetz

Then one obtains the dispersion law

$$\omega = c\sqrt{k_z^2 + k_\perp^2}. \tag{19.25}$$

TEM-Moden Wir haben den Fall $k_\perp = 0$ bisher nicht diskutiert. Wir wollen dies nicht in allen Details tun. Man kann zeigen, dass für diese Moden beide Longitudinal-Komponenten verschwinden, $E_{0,z} = B_{0,z} = 0$. Man spricht daher von TEM-Moden. Für diese folgt mit $k_z = \pm k$ aus (19.5) und analog durch eine Drehung von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ um 90^0 um die z-Achse $E_{0,x} \to E_{0,y}$, $B_{0,y} \to -B_{0,x}$

TEM-modes By now we did not discuss the case $k_\perp = 0$. We will not do this in all details. One can show that for these modes both longitudinal components vanish, $E_{0,z} = B_{0,z} = 0$. Thus one calls them TEM-modes. Using $k_z = \pm k$ from (19.5) and similarly after a rotation of $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ around the z-axis by 90^0 $E_{0,x} \to E_{0,y}$, $B_{0,y} \to -B_{0,x}$ one obtains

$$B_{0,y} = \pm E_{0,x}, \quad B_{0,x} = \mp E_{0,y}. \tag{19.26}$$

Aus $(\operatorname{rot}\mathbf{E})_z = 0$ folgt dann, dass man $\mathbf{E}_0$ durch den Gradienten eines Potentials darstellen kann

From $(\operatorname{curl}\mathbf{E})_z = 0$ it follows that $\mathbf{E}_0$ can be expressed by the gradient of a potential

$$\mathbf{E}_0 = -\operatorname{grad}\Phi(x, y), \tag{19.27}$$

das wegen $\operatorname{div}\mathbf{E}_0 = 0$ die Potentialgleichung erfüllt

which due to $\operatorname{div}\mathbf{E}_0 = 0$ fulfills Laplace's equation

$$(\nabla_x^2 + \nabla_y^2)\Phi(x, y) = 0. \tag{19.28}$$

Es ist also die homogene Laplace-Gleichung in zwei Dimensionen zu lösen. Wegen $\mathbf{E}_{0,\mathrm{t}} = \mathbf{0}$ muss auf der Leiteroberfläche das Potential konstant sein. Daher erhält man eine nicht-triviale Lösung nur in mehrfach zusammenhängenden Gebieten, also nicht im Innern eines kreisförmigen oder rechteckigen Querschnitts, aber außerhalb, oder in Koaxialkabeln, oder im Außenraum zweier Drähte.

Thus Laplace's homogeneous equation in two dimensions has to be solved. Because of $\mathbf{E}_{0,\mathrm{t}} = \mathbf{0}$ the potential on the surface has to be constant. Thus one obtains a non-trivial solution only in multiply connected regions, i.e. not inside a circular or rectangular cross-section, but outside such a region or in a coaxial wire or outside two wires.

19.b Lösung für rechteckigen Querschnitt

Wir bestimmen die Wellen im Hohlleiter für einen rechteckigen Querschnitt mit Seitenlängen a und b. Für die TM-Wellen machen wir den Produkt-Ansatz

$$E_{0,z}(x,y) = f(x)g(y) \tag{19.29}$$

Einsetzen in (19.11) gibt

$$f''g + fg'' + k_\perp^2 fg = 0 \tag{19.30}$$

oder

$$\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} = -k_\perp^2, \tag{19.31}$$

woraus folgt, dass f''/f und g''/g konstant sind. Da $E_{0,z}$ am Rand verschwinden muss, folgt

$$E_{0,z}(x,y) = E_0 \sin(\frac{n\pi x}{a}) \sin(\frac{m\pi y}{b}), \quad k_\perp^2 = \left(\frac{nu\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \quad n \geq 1, m \geq 1. \tag{19.32}$$

Für die TE-Welle erhält man mit dem entsprechendenen Ansatz

$$B_{0,z}(x,y) = f(x)g(y) \tag{19.33}$$

und der Randbedingung $(\operatorname{grad} B_{0,z})_\mathrm{n} = 0$ die Lösungen

$$B_{0,z}(x,y) = B_0 \cos(\frac{n\pi x}{a}) \cos(\frac{m\pi y}{b}), \quad k_\perp^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \quad n \geq 0, \quad m \geq 0, \quad n+m \geq 1. \tag{19.34}$$

19.c Wellenpakete

Vielfach hat man es nicht mit monochromatischen Wellen, sondern mit Wellenpaketen zu tun, die aus Fourierkomponenten mit $k_z \approx k_{z,0}$ bestehen

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x,y) \int dk_z f_0(k_z) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega(k_z)t)}, \tag{19.35}$$

wobei $f_0(k_z)$ bei $k_z = k_{z,0}$ ein Maximum hat und für andere k_z-Werte rasch abfällt. Dann entwickeln wir $\omega(k_z)$ um $k_{z,0}$

$$\omega(k_z) = \omega(k_{z,0}) + v_\mathrm{gr}(k_z - k_{z,0}) + ... \tag{19.36}$$

$$v_\mathrm{gr} = \left.\frac{d\omega(k_z)}{dk_z}\right|_{k_z=k_{z,0}}. \tag{19.37}$$

In linearer Näherung dieser Entwicklung folgt dann

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{z,0}z - \omega(k_{z,0})t)} f(z - v_\mathrm{gr}t), \quad f(z - v_\mathrm{gr}t) = \int \mathrm{d}k_z f_0(k_z) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z - k_{z,0})(z - v_\mathrm{gr}t)}. \tag{19.38}$$

Der Vorfaktor enthält die Phase $\phi = k_{z,0}z - \omega(k_{z,0})t$. Das Paket oszilliert also mit der Phasengeschwindigkeit

$$v_\mathrm{ph} = \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_\phi = \frac{\omega(k_{z,0})}{k_{z,0}}. \tag{19.39}$$

19.b Solution for a Rectangular Cross Section

We determine the waves in a wave guide of rectangular cross-section with sides a and b. For the TM-wave we start with the factorization ansatz

Insertion into (19.11) yields

and equivalently

from which one concludes that f''/f and g''/g have to be constant. Since $E_{0,z}$ has to vanish at the boundary, one obtains

For the TE-wave one obtains with the corresponding ansatz

and the boundary condition $(\operatorname{grad} B_{0,z})_\mathrm{n} = 0$ the solutions

19.c Wave Packets

Often one does not deal with monochromatic waves, but with wave packets, which consist of Fourier components with $k_z \approx k_{z,0}$

where $f_0(k_z)$ has a maximum at $k_z = k_{z,0}$ and decays rapidly for other values of k_z. Then one expands $\omega(k_z)$ around $k_{z,0}$

In linear approximation of this expansion one obtains

The factor in front contains the phase $\phi = k_{z,0}z - \omega(k_{z,0})t$. Thus the wave packet oscillates with the phase velocity

Die Ortsabhängigkeit der Amplitude steckt dagegen in der Funktion $f(z - v_{\rm gr}t)$. Das Wellenpaket bewegt sich also mit der Gruppengeschwindigkeit (auch Signalgeschwindigkeit) $v_{\rm gr}$, (19.37).

Für die Wellen des Hohlleiters finden wir aus (19.25)

On the other hand the local dependence of the amplitude is contained in the function $f(z - v_{\rm gr}t)$. Thus the wave packet moves with the group velocity (signal velocity) $v_{\rm gr}$, (19.37).

For the waves in the wave-guide we obtain from (19.25)

$$v_{\rm ph} = c\frac{\sqrt{k_\perp^2 + k_{z,0}^2}}{k_{z,0}}, \tag{19.40}$$

$$v_{\rm gr} = c\frac{k_{z,0}}{\sqrt{k_\perp^2 + k_{z,0}^2}}. \tag{19.41}$$

Die Phasengeschwindigkeit ist größer als die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c, die Gruppen- oder Signalgeschwindigkeit aber kleiner als die Lichtgeschwindigkeit. Geht man in der Entwicklung (19.36) über den linearen Term hinaus, so findet man, dass die Wellenpakete auseinanderfließen.

The phase velocity is larger than the velocity of light in vacuum c, the group velocity (velocity of a signal) less than c. If one performs the expansion (19.36) beyond the linear term, then one finds that the wave packets spread in time.

Aufgabe Bestimme $\omega(k)$ für Transversal-Schwingungen in einem Leiter oberhalb der Plasmafrequenz (Abschnitt 17.b) für $\epsilon = 1$ und die daraus resultierende Phasen- und Gruppengeschwindigkeit.

Exercise Determine $\omega(k)$ for transverse oscillations in a conductor above the plasma frequency (section 17.b) for $\epsilon = 1$ and the resulting phase- and group-velocities, resp.

G

Elektrodynamische Potentiale

Electrodynamic Potentials

©2003 Franz Wegner Universität Heidelberg

20 Elektrodynamische Potentiale, Eichtransformationen

In der Elektrostatik haben wir bereits das elektrische Potential Φ kennengelernt, in der Magnetostatik das Vektorpotential $\mathbf{A}$. Beide können auch für die zeitabhängigen Probleme eingeführt werden und erlauben auch dann die Bestimmung von $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$.

20.a Potentiale

Die dritte und vierte MAXWELL-Gleichung sind homogen, das heißt, sie enthalten die Ladungen und Ströme nicht explizit. Sie erlauben, die Felder $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$ durch Potentiale auszudrücken. Aus $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ folgt

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r},t). \tag{20.1}$$

Beweis: Wegen $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ gilt $\triangle\mathbf{B} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B}$ (B.26), woraus dann ähnlich wie in (9.16) und (9.17)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r'\Big(\operatorname{rot}'\operatorname{rot}'\mathbf{B}(\mathbf{r}')\Big)\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\operatorname{rot}'\mathbf{B}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{20.2}$$

bei der Einführung des Vektorpotentials in der Magnetostatik folgt. Ein elementarer Beweis folgt als Übungsaufgabe.

Aus $\operatorname{rot}\mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}}/c = \mathbf{0}$ folgt dann

$$\operatorname{rot}\Big(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}\Big) = \mathbf{0}, \tag{20.3}$$

so dass das Argument unter der Rotation als Gradient geschrieben werden kann. Konventionell setzt man dafür $-\operatorname{grad}\Phi$, so dass die Darstellung

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} - \operatorname{grad}\Phi \tag{20.4}$$

20 Electrodynamic Potentials, Gauge Transformations

We already know the electric potential Φ from electrostatics and the vector potential $\mathbf{A}$ from magnetostatics. Both can also be used for time-dependent problems and allow the determination of $\mathbf{B}$ and $\mathbf{E}$.

20.a Potentials

MAXWELL's third and fourth equations are homogeneous equations, i.e. they do not contain charges and currents explicitly. They allow to express the fields $\mathbf{B}$ and $\mathbf{E}$ by means of potentials. One obtains from $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r},t). \tag{20.1}$$

Proof: Due to $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ one has $\triangle\mathbf{B} = -\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{B}$ (B.26), from which one concludes similarly as in (9.16) and (9.17)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r'\Big(\operatorname{rot}'\operatorname{rot}'\mathbf{B}(\mathbf{r}')\Big)\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\operatorname{rot}'\mathbf{B}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{20.2}$$

when the vector potential was introduced in the magnetostatics. An elementary proof is left as exercise.

From $\operatorname{curl}\mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}}/c = \mathbf{0}$ one obtains

$$\operatorname{rot}\Big(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}\Big) = \mathbf{0}, \tag{20.3}$$

so that the argument under the curl can be expressed as a gradient. Conventionally one calls it $-\operatorname{grad}\Phi$, so that

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} - \operatorname{grad}\Phi \tag{20.4}$$

folgt. Der zweite Term ist aus der Elektrostatik bekannt. In der Zeitableitung von **A** steckt das Induktionsgesetz. Man sieht umgekehrt, dass die Darstellung der Felder **E** und **B** durch die Potentiale in (20.4) und (20.1) die beiden homogenen MAXWELL-Gleichungen erfüllt.

follows. The second term is already known from electrostatics. The time derivative of **A** contains the law of induction. One sees contrarily that the representations of the potentials in (20.4) and (20.1) fulfill the homogeneous MAXWELL equations.

20.b Eichtransformationen

Die Potentiale **A** und Φ sind nicht eindeutig durch die Felder **B** und **E** bestimmt. Wir können **A** durch

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \operatorname{grad}\Lambda(\mathbf{r},t) \tag{20.5}$$

ersetzen, ohne **B** zu ändern

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{rot}\mathbf{A}', \tag{20.6}$$

da $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Lambda = \mathbf{0}$. Dann folgt

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}' - \operatorname{grad}(\Phi - \frac{1}{c}\dot{\Lambda}). \tag{20.7}$$

Ersetzen wir gleichzeitig Φ durch

$$\Phi'(\mathbf{r},t) = \Phi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c}\dot{\Lambda}(\mathbf{r},t), \tag{20.8}$$

so bleiben **E** und **B** unverändert. Man bezeichnet die Transformation (20.5) und (20.8) von **A** und Φ als Eichtransformation.

Die Willkür in der Eichung erlaubt es, Einschränkungen an die Potentiale Φ und **A** zu fordern. Die folgenden beiden Eichungen werden häufig verwendet

$$\text{LORENZ-Eichung / gauge} \qquad \operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\dot{\Phi} = 0, \tag{20.9}$$

$$\text{COULOMB-Eichung / gauge} \qquad \operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \tag{20.10}$$

Hat man Potentiale Φ' und $\mathbf{A}'$, die die gewünschte Eichung nicht erfüllen, so erhält man Potentiale Φ und **A** durch geeignete Wahl von Λ

$$\text{LORENZ-Eichung / gauge} \qquad \operatorname{div}\mathbf{A}' + \frac{1}{c}\dot{\Phi}' = \Box\Lambda, \tag{20.11}$$

$$\text{COULOMB-Eichung / gauge} \qquad \operatorname{div}\mathbf{A}' = \triangle\Lambda, \tag{20.12}$$

wobei

$$\Box := \triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{20.13}$$

der D'ALEMBERT-Operator ist. Die LORENZ-Eichung geht auf den dänischen Physiker Ludvig V. LORENZ (1867) zurück im Gegensatz zur LORENTZ-Transformation (Abschnitt 23), die dem holländischen Physiker Hendrik A. LORENTZ zuzuschreiben ist.

20.b Gauge Transformations

The potentials **A** and Φ are not uniquely determined by the fields **B** and **E**. We may replace **A** by

without changing **B**

since $\operatorname{curl}\operatorname{grad}\Lambda = \mathbf{0}$. It follows that

If we replace simultaneously Φ by

then **E** and **B** remain unchanged. One calls the transformations (20.5) and (20.8) gauge transformations.

The arbitrariness in the gauge allows to impose restrictions on the potentials Φ and **A**

If potentials Φ' and $\mathbf{A}'$ do not obey the desired gauge, the potentials Φ and **A** are obtained by an appropriate choice of Λ

where

is D'ALEMBERT's operator. The LORENZ gauge traces back to the Danish physicist LUDVIG V. LORENZ (1867) in contrast to the LORENTZ transformation (section 23) attributed to the Dutch physicist HENDRIK A. LORENTZ.

Einsetzen der Ausdrücke (20.4) und (20.1) für **E** und **B** in die erste MAXWELL-Gleichung ergibt

Insertion of the expressions (20.4) and (20.1) for **E** and **B** into MAXWELL's first equation yields

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{A}} + \frac{1}{c}\operatorname{grad}\dot{\Phi} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{20.14}$$

das heißt

that is

$$-\Box\mathbf{A} + \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\dot{\Phi}\right) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{20.15}$$

während die zweite MAXWELL-Gleichung dann

whereas MAXWELL's second equation reads

$$-\triangle\Phi - \frac{1}{c}\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}} = 4\pi\rho \tag{20.16}$$

lautet.

.

Daraus folgt für die beiden Eichungen

From this one obtains for both gauges

$$\text{LORENZ-Eichung / gauge} \quad \begin{cases} \Box\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \\ \Box\Phi = -4\pi\rho \end{cases} \tag{20.17}$$

$$\text{COULOMB-Eichung / gauge} \quad \begin{cases} \Box\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\operatorname{grad}\dot{\Phi} \\ \triangle\Phi = -4\pi\rho. \end{cases} \tag{20.18}$$

Aufgabe Zeige, dass ein Vektorfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, das $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ genügt, als $\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r})$ dargestellt werden kann. Hierzu setze man $A_z(\mathbf{r}) = 0$ und drücke $A_y(\mathbf{r})$ durch $A_y(x, y, 0)$ und B_x, ähnlich $A_x(\mathbf{r})$ durch $A_x(x, y, 0)$ und B_y aus. Dies setze man in $B_z = (\operatorname{rot}\mathbf{A})_z$ ein und zeige unter Verwendung von $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, dass man passende Komponenten von **A** bei $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ finden kann.

Exercise Show that a vector field $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, which obeys $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ can be represented by $\operatorname{curl}\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Therefore put $A_z(\mathbf{r}) = 0$ and express $A_y(\mathbf{r})$ by $A_y(x, y, 0)$ and B_x, similarly $A_x(\mathbf{r})$ by $A_x(x, y, 0)$ and B_y. Insert this in $B_z = (\operatorname{curl}\mathbf{A})_z$ and show by use of $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ that one can find fitting components of **A** at $\mathbf{r} = (x, y, 0)$.

21 Die elektromagnetischen Potentiale einer allgemeinen Ladungs- und Stromverteilung

21.a Berechnung der Potentiale

In der Lorenz-Eichung hatten wir (20.17)

$$\Box\Phi(\mathbf{r},t) = -4\pi\rho(\mathbf{r},t), \tag{21.1}$$

$$\Box\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \tag{21.2}$$

mit dem d'Alembert-Operator

$$\Box = \triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{21.3}$$

und der Eichbedingung

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\dot{\Phi} = 0. \tag{21.4}$$

Wir führen bezüglich der Zeit die Fourier-Transformierte ein

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{21.5}$$

analog für $\mathbf{A}$, ρ, $\mathbf{j}$. Dann folgt

$$\Box\Phi(\mathbf{r},t) = \int \mathrm{d}\omega(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2})\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \int \mathrm{d}\omega(-4\pi\hat{\rho}(\mathbf{r},\omega))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{21.6}$$

woraus durch Vergleich der Integranden

$$\Big(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2}\Big)\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega) = -4\pi\hat{\rho}(\mathbf{r},\omega) \tag{21.7}$$

folgt. Wir führen dazu die Greensche Funktion G ein, das heißt, die Lösung der linearen Differentialgleichung werde geschrieben als

$$\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega) = \int \mathrm{d}^3r' G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)\hat{\rho}(\mathbf{r}',\omega). \tag{21.8}$$

Setzen wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung (21.7) ein, so folgt

$$\Big(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2}\Big)G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{21.9}$$

Da keine Richtung ausgezeichnet ist und die Gleichung invariant gegen Verschiebungen der Vektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ um einen gleichen konstanten Vektor ist, ist anzunehmen, dass die Lösung G nur vom Abstand zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ und zusätzlich natürlich von dem Parameter ω abhängt

$$G = g(a,\omega), \quad a = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|. \tag{21.10}$$

21 Electromagnetic Potentials of a general Charge and Current Distribution

21.a Calculation of the Potentials

Using the Lorenz gauge we had

$$\Box\Phi(\mathbf{r},t) = -4\pi\rho(\mathbf{r},t), \tag{21.1}$$

$$\Box\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \tag{21.2}$$

with d'Alembert's operator

$$\Box = \triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{21.3}$$

and the gauge condition

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\dot{\Phi} = 0. \tag{21.4}$$

We perform the Fourier transform with respect to time

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{21.5}$$

analogously for $\mathbf{A}$, ρ, $\mathbf{j}$. Then one obtains

$$\Box\Phi(\mathbf{r},t) = \int \mathrm{d}\omega(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2})\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \int \mathrm{d}\omega(-4\pi\hat{\rho}(\mathbf{r},\omega))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{21.6}$$

from which by comparison of the integrands

$$\Big(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2}\Big)\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega) = -4\pi\hat{\rho}(\mathbf{r},\omega) \tag{21.7}$$

is obtained. We now introduce the Green's function G, i.e. we write the solution of the linear differential equation as

$$\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega) = \int \mathrm{d}^3r' G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)\hat{\rho}(\mathbf{r}',\omega). \tag{21.8}$$

Insertion of this ansatz into the differential equation (21.7) yields

$$\Big(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2}\Big)G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{21.9}$$

Since there is no preferred direction and moreover the equation is invariant against displacement of the vectors $\mathbf{r}$ and $\mathbf{r}'$ by the same constant vector, we may assume that the solution depends only on the distance between $\mathbf{r}$ and $\mathbf{r}'$ and additionally of course on ω

$$G = g(a,\omega), \quad a = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|. \tag{21.10}$$

Damit folgt

$$(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2})g(a,\omega) = \frac{1}{a}\frac{d^2(ag)}{da^2} + \frac{\omega^2}{c^2}g = 0 \begin{matrix}\text{für}\\ \text{for}\end{matrix} a \neq 0. \tag{21.11}$$

Dabei verwenden wir den Laplace-Operator in der Form (5.15), wobei $\triangle_\Omega g = 0$, da g nicht von der Richtung von $\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, sondern nur vom Betrag a abhängt. Dies ergibt die Schwingungsgleichung für ag, hat also die Lösung

Then one obtains

Here we use the Laplacian in the form (5.15), where $\triangle_\Omega g = 0$, since g does not depend on the direction of $\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, but on the modulus a. This yields the equation of a harmonic oscillation for ag with the solution

$$G = g(a,\omega) = \frac{1}{a}\Big(c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega a/c} + c_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega a/c}\Big). \tag{21.12}$$

Für kleinen Abstand divergiert die Lösung wie $(c_1 + c_2)/a$. Um die δ-Funktion in (21.9) als Inhomogenität mit dem richtigen Vorfaktor zu erhalten, muss $c_1 + c_2 = 1$ sein. Wir setzen nun der Reihe nach ein

At short distances the solution diverges like $(c_1 + c_2)/a$. In order to obtain the δ-function in (21.9) as an inhomogeneity with the appropriate factor in front, one requires $c_1 + c_2 = 1$. We now insert

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{r},t) &= \int \mathrm{d}\omega \hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\
&= \int \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}^3 r' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)\hat{\rho}(\mathbf{r}',\omega) \\
&= \int \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big(c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c} + c_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c}\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\hat{\rho}(\mathbf{r}',\omega) \\
&= \int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big(c_1 \rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}) + c_2 \rho(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})\Big).
\end{aligned} \tag{21.13}$$

Beim Übergang von der zweiten auf die dritte Zeile haben wir G eingesetzt. Anschließend führen wir die ω-Integration aus, vergleiche (21.5). Allerdings ist ω im Exponenten in (21.13) nicht mit t, sondern mit $t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$ multipliziert. Die Lösung in der letzten Zeile enthält einen Beitrag zu Φ zur Zeit t, der von ρ zu früherer Zeit (mit Faktor c_1) und einen, der von ρ zu späterer Zeit (mit Faktor c_2) abhängt. Man bezeichnet die Lösung, die nur den ersten Beitrag ($c_1 = 1$, $c_2 = 0$) enthält, als die retardierte Lösung und die, die nur den zweiten Beitrag ($c_1 = 0$, $c_2 = 1$) enthält, als die avancierte Lösung.

Going from the second to the third line we have inserted G. Then we perform the ω-integration, compare (21.5). However, ω in the exponent in (21.13) is not multiplied by t, but by $t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$. The solution in the last line contains a contribution of Φ at time t which depends on ρ at an earlier time (with factor c_1), and one which depends on ρ at a later time (with factor c_2). The solution which contains only the first contribution ($c_1 = 1$, $c_2 = 0$) is called the retarded solution, and the one which contains only the second contribution ($c_1 = 0$, $c_2 = 1$) the advanced solution.

$$\Phi_{\mathrm{r,a}}(\mathbf{r},t) = \int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho(\mathbf{r}', t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}). \tag{21.14}$$

Physikalisch ist in der Regel die retardierte Lösung (oberes Vorzeichen), da man davon ausgeht, dass das Potential durch die Ladungsverteilung, aber nicht die Ladungsverteilung durch das Potential entsteht. Analog erhält man die retardierte und avancierte Lösung für das Vektorpotential

Normally the retarded solution (upper sign) is the physical solution, since the potential is considered to be created by the charges, but not the charges by the potentials. Analogously, one obtains the retarded and advanced solutions for the vector potential

$$\mathbf{A}_{\mathrm{r,a}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{j}(\mathbf{r}', t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}). \tag{21.15}$$

21.b Eichbedingung

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Bedingung für die Lorenz-Eichung (20.9) erfüllt ist

21.b Gauge Condition

It remains to be shown that the condition for Lorenz gauge (20.9) is fulfilled

$$\dot{\Phi} + c\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}(\dot{\rho} + \mathrm{div}\,\mathbf{j}) + \int \mathrm{d}^3 r' \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{j}. \tag{21.16}$$

Die Argumente von ρ und $\mathbf{j}$ sind wie oben $\mathbf{r}'$ und $t' = t \mp |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$. Im zweiten Integral kann man ∇ durch $-\nabla'$ ersetzen und dann partiell integrieren. Das führt auf

The arguments of ρ and $\mathbf{j}$ are as above $\mathbf{r}'$ and $t' = t \mp |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$. In the second integral one can replace ∇ by $-\nabla'$ and perform a partial integration. This yields

$$\dot{\Phi} + c \operatorname{div} \mathbf{A} = \int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (\dot{\rho} + (\nabla + \nabla')\mathbf{j}). \tag{21.17}$$

Da $(\nabla + \nabla')t'(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{0}$ ist, folgt unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung

Since $(\nabla + \nabla')t'(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{0}$, one obtains from the equation of continuity

$$\dot{\rho}(\mathbf{r}', t'(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')) + (\nabla + \nabla')\mathbf{j}(\mathbf{r}', t'(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')) = \frac{\partial \rho}{\partial t'} + \nabla' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t')|_{t'} = 0, \tag{21.18}$$

so dass die Eichbedingung (20.9) erfüllt ist, da der Integrand in (21.17) wegen der Kontinuitätsgleichung verschwindet.

so that the gauge condition (20.9) is fulfilled, since the integrand in (21.17) vanishes because of the equation of continuity.

22 Ausstrahlung harmonischer Schwingungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir schwingende Ladungen und Ströme als Strahlungsquellen.

22.a Strahlungsfeld

Wir betrachten harmonische Schwingungen, das heißt, die Zeitabhängigkeit von ρ und $\mathbf{j}$ ist proportional zu $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$

$$\rho(\mathbf{r},t) = \Re\left(\rho_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right) \tag{22.1}$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \Re\left(\mathbf{j}_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right), \tag{22.2}$$

analog für Φ, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$. Es folgt

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \Re\int \mathrm{d}^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho_0(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}. \tag{22.3}$$

Mit $k = \omega/c$ folgt

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho_0(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{22.4}$$

analog

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{22.5}$$

22.a.α Nahzone (Statische Zone)

In der Nahzone, das heißt für $k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll 2\pi$, was gleichbedeutend ist mit $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll \lambda$, wobei λ die Wellenlänge der elektromagnetischen Welle ist, kann $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ durch 1 genähert werden. Damit werden die Potentiale Φ_0, (22.4) und $\mathbf{A}_0$, (22.5) zu den Potentialen der Elektro- und Magnetostatik (3.14) und (9.17).

22.a.β Fernzone (Strahlungszone)

Für große Entfernungen entwickelt man im Exponenten

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = r\sqrt{1-2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2}+\frac{r'^2}{r^2}} = r - \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}' + O(\frac{r'^2}{r}), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{22.6}$$

Dies ist gerechtfertigt für $r \gg kR^2$, wobei R eine Abschätzung für die Ausdehnung der Ladungs- bzw. Stromverteilung ist, $r' < R$ für $\rho(\mathbf{r}') \neq 0$ bzw. $\mathbf{j}(\mathbf{r}') \neq \mathbf{0}$. Im Nenner approximieren wir $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx r$, was für $r \gg R$ gut ist. Dann folgt

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr}\mathbf{g}(k\mathbf{n}) + O(\frac{1}{r^2}) \tag{22.7}$$

22 Radiation from Harmonic Oscillations

In this section we consider the radiation of oscillating charges and currents.

22.a Radiation Field

We consider harmonic oscillations, i.e. the time dependence of ρ and $\mathbf{j}$ is proportional to $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$

analogously for Φ, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$. One obtains

With the notation $k = \omega/c$ it follows that

analogously

22.a.α Near Zone (Static Zone)

In the near zone, i.e. for $k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll 2\pi$ which is equivalent to $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll \lambda$, where λ is the wave-length of the electromagnetic wave, the expression $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ can be approximated by 1. Then the potentials Φ_0, (22.4) and $\mathbf{A}_0$, (22.5) reduce to the potentials of electrostatics (3.14) and of magnetostatics (9.17).

22.a.β Far Zone (Radiation Zone)

At large distances one expands the expression in the exponent

This is justified for $r \gg kR^2$, where R is an estimate of the extension of the charge and current distribution, $r' < R$ for $\rho(\mathbf{r}') \neq 0$ and $\mathbf{j}(\mathbf{r}') \neq \mathbf{0}$, resp. We approximate in the denominator $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx r$ which is reasonable for $r \gg R$. Then one obtains

mit der FOURIER-Transformierten der Stromverteilung

with the FOURIER transform of the current distribution

$$\mathbf{g}(k\mathbf{n}) = \int \mathrm{d}^3 r' \mathbf{j}_0(\mathbf{r}') \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'}. \tag{22.8}$$

Hieraus folgt das Magnetfeld

From this one deduces the magnetic field

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{grad}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr} \times \mathbf{g}(k\mathbf{n}) + O(\frac{1}{r^2}) = \mathrm{i}k\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr}\mathbf{n} \times \mathbf{g} + O(\frac{1}{r^2}). \tag{22.9}$$

Das elektrische Feld erhalten wir aus

The electric field is obtained from

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \frac{1}{c}\dot{\mathbf{E}} \rightarrow \mathrm{rot}\,\mathbf{B}_0 = -\frac{\mathrm{i}\omega}{c}\mathbf{E}_0 \tag{22.10}$$

zu

as

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\mathrm{i}}{k}\mathrm{rot}\,\mathbf{B}_0 = -\mathbf{n} \times \mathbf{B}_0 + O(\frac{1}{r^2}). \tag{22.11}$$

$\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ und $\mathbf{n}$ bilden ein Orthogonalsystem. $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{B}_0$ sind betragsmäßig gleich und fallen wie $1/r$ ab. Der POYNTING-Vektor liefert im zeitlichen Mittel

$\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ and $\mathbf{n}$ are orthogonal to each other. The moduli of $\mathbf{E}_0$ and $\mathbf{B}_0$ are equal and both decay like $1/r$. The POYNTING vector yields in the time average

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{S}(t)\mathrm{d}t, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{22.12}$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{c}{4\pi}\overline{\Re\mathbf{E} \times \Re\mathbf{B}} = \frac{c}{8\pi}\Re(\mathbf{E}_0^* \times \mathbf{B}_0)$$
$$= -\frac{c}{8\pi}\Re\Big((\mathbf{n} \times \mathbf{B}_0^*) \times \mathbf{B}_0\Big) = -\frac{c}{8\pi}\Re(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0)\mathbf{B}_0^* + \frac{c}{8\pi}\mathbf{n}(\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{B}_0). \tag{22.13}$$

Der erste Term nach dem letzten Gleichheitszeichen verschwindet, da $\mathbf{B}_0 \perp \mathbf{n}$. Es bleibt daher

The first term after the last equals sign vanishes, since $\mathbf{B}_0 \perp \mathbf{n}$. Thus there remains

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{c}{8\pi}\mathbf{n}(\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{B}_0) = \frac{k^2\mathbf{n}}{8\pi c r^2}|\mathbf{n} \times \mathbf{g}(k\mathbf{n})|^2 + O(\frac{1}{r^3}). \tag{22.14}$$

Die im Mittel abgestrahlte Leistung ist dann

The average power radiated is

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{k^2}{8\pi c}\int |\mathbf{n} \times \mathbf{g}(k\mathbf{n})|^2 \mathrm{d}\Omega_n, \tag{22.15}$$

wobei über den Raumwinkel Ω_n von $\mathbf{n}$ integriert wird.

where the integral is performed over the solid angle Ω_n of $\mathbf{n}$.

22.b Elektrische Dipolstrahlung (HERTZscher Dipol)

22.b Electric Dipole Radiation (HERTZ Dipole)

Erstreckt sich die Ladungs- und Stromverteilung nur über einen im Vergleich zur Wellenlänge λ kleinen Bereich R, so ist es sinnvoll, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'}$ zu entwickeln

If the charge and current distribution is within a range R small in comparison to the wave length λ, then it is reasonable to expand $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'}$

$$\mathbf{g}(k\mathbf{n}) = \mathbf{g}^{(0)} - \mathrm{i}k\mathbf{g}^{(1)} + ..., \quad \mathbf{g}^{(0)} = \int \mathrm{d}^3 r' \mathbf{j}_0(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{g}^{(1)} = \int \mathrm{d}^3 r' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') \tag{22.16}$$

Diese Entwicklung reicht aus, um das Strahlungsfeld in der Fernzone zu untersuchen. Ist man daran interessiert, auch Nah- und Übergangszone zu betrachten, so muss man

This expansion is sufficient to investigate the radiation field in the far zone. If one is interested to consider it also in the near zone and the intermediate zone, one has to expand

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}(-\mathrm{i}k + \frac{1}{r})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') + O(r'^2) \tag{22.17}$$

in dem Ausdruck für $\mathbf{A}_0$ entwickeln, was

in the expression for $\mathbf{A}_0$, which yields

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr}\mathbf{g}^{(0)} + (-\mathrm{i}k + \frac{1}{r})\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr}\mathbf{g}^{(1)} + ... \tag{22.18}$$

ergibt.

Wir betrachten zunächst den Beitrag von $\mathbf{g}^{(0)}$. Wir verwenden, dass

We first consider the contribution from $\mathbf{g}^{(0)}$. We use that

$$\mathrm{div}\,'\mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\dot{\rho}(\mathbf{r}') = \mathrm{i}\omega\rho(\mathbf{r}') \rightarrow \mathrm{div}\,'\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') = \mathrm{i}\omega\rho_0(\mathbf{r}'). \tag{22.19}$$

Dann folgt aus

Then we obtain from

$$\int \mathrm{d}^3r'\,\mathrm{div}\,'\Big(f(\mathbf{r}')\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')\Big) = 0 \tag{22.20}$$

die Beziehung

the relation

$$\int \mathrm{d}^3r'\,\mathrm{grad}\,' f(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') = -\mathrm{i}\omega\int \mathrm{d}^3r' f(\mathbf{r}')\rho_0(\mathbf{r}'). \tag{22.21}$$

Mit $f(\mathbf{r}') = x'_\alpha$ folgt dann

One obtains with $f(\mathbf{r}') = x'_\alpha$

$$g^{(0)}_\alpha = \int \mathrm{d}^3r' j_{0,\alpha}(\mathbf{r}') = -\mathrm{i}\omega\int \mathrm{d}^3r' x'_\alpha\rho_0(\mathbf{r}') = -\mathrm{i}\omega p_{0,\alpha}, \tag{22.22}$$

das heißt, $\mathbf{g}^{(0)}$ lässt sich durch die Amplitude des elektrischen Dipolmoments ausdrücken

that is $\mathbf{g}^{(0)}$ can be expressed by the amplitude of the electric dipole moment

$$\mathbf{g}^{(0)} = -\mathrm{i}\omega\mathbf{p}_0. \tag{22.23}$$

Man bezeichnet daher diesen Anteil als elektrische Dipolstrahlung. Es folgt

Thus one calls this contribution electric dipole radiation. One finds

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = -\mathrm{i}k\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathbf{p}_0, \tag{22.24}$$

daraus

thus

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \Big(\frac{k^2}{r} + \frac{\mathrm{i}k}{r^2}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\mathbf{n}\times\mathbf{p}_0 \tag{22.25}$$

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = -\frac{k^2}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{p}_0) + \Big(3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}_0) - \mathbf{p}_0\Big)\Big(\frac{1}{r^3} - \frac{\mathrm{i}k}{r^2}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}. \tag{22.26}$$

Der erste Term ist der führende in der Fernzone ($1/r \ll k$), der zweite führt in der Nahzone ($1/r \gg k$). Aus dem Ausdruck für die Fernzone erhält man als zeitgemittelten Poynting-Vektor

The first term is leading in the far zone ($1/r \ll k$), the second one in the near zone ($1/r \gg k$). One obtains the time-averaged Poynting vector from the expression for the far zone

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{ck^4\mathbf{n}}{8\pi r^2}|\mathbf{n}\times\mathbf{p}_0|^2 = \frac{ck^4|\mathbf{p}_0|^2\mathbf{n}}{8\pi r^2}\sin^2\theta, \tag{22.27}$$

Im zweiten Ausdruck wird angenommen, dass Realteil und Imaginärteil von $\mathbf{p}_0$ in die gleiche Richtung weisen. Dann ist θ der Winkel zwischen $\mathbf{p}_0$ und $\mathbf{n}$. Die abgestrahlte Leistung ist dann

In the second expression it is assumed that real and imaginary part of $\mathbf{p}_0$ point into the same direction. Then θ is the angle between $\mathbf{p}_0$ and $\mathbf{n}$. The radiated power is then

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{ck^4|\mathbf{p}_0|^2}{3}. \tag{22.28}$$

Die Leistung nimmt also mit der vierten Potenz der Frequenz ($\omega = ck$) zu (Rayleigh-Streuung). Als Beispiel kann man zwei Kondensatorkugeln im Abstand l mit $I(t) = \Re(I_0 e^{-i\omega t})$ betrachten. Dann ist

The radiation increases with the fourth power of the frequency ($\omega = ck$) (Rayleigh radiation). As an example one may consider two capacitor spheres at distance l with $I(t) = \Re(I_0 e^{-i\omega t})$. Then one has

$$|\mathbf{g}^{(0)}| = |\int d^3r' \mathbf{j}_0(\mathbf{r}')| = |\int dl I_0| = |I_0 l|, \quad p_0 = \frac{iI_0 l}{\omega}, \quad \dot{U}_s = \frac{(klI_0)^2}{3c} \tag{22.29}$$

Diese Leistungsabgabe bedingt einen Strahlungswiderstand R_s

This power release yields a radiation resistance R_s

$$\dot{U}_s = \frac{1}{2} R_s I_0^2, \quad R_s = \frac{2}{3c}(kl)^2 \hat{=} 20\Omega \cdot (kl)^2 \tag{22.30}$$

zusätzlich zum Ohmschen Widerstand. Man beachte $\frac{1}{c} \hat{=} 30\Omega$, vergleiche (A.4).

in addition to an Ohmic resistance. Note that $\frac{1}{c} \hat{=} 30\Omega$, compare (A.4).

22.c Magnetische Dipolstrahlung und elektrische Quadrupolstrahlung

22.c Magnetic Dipole radiation and Electric Quadrupole Radiation

Wir betrachten nun den zweiten Term in (22.16)

Now we consider the second term in (22.16)

$$\begin{aligned} g_\alpha^{(1)} &= n_\beta \int d^3r' x'_\beta j_{0,\alpha}(\mathbf{r}') \\ &= \frac{n_\beta}{2} \int d^3r' (x'_\beta j_{0,\alpha} - x'_\alpha j_{0,\beta}) + \frac{n_\beta}{2} \int d^3r' (x'_\beta j_{0,\alpha} + x'_\alpha j_{0,\beta}). \end{aligned} \tag{22.31}$$

Der erste Term ergibt das magnetische Dipolmoment (10.7)

The first term yields the magnetic dipole moment (10.7)

$$n_\beta c \epsilon_{\beta,\alpha,\gamma} m_{0,\gamma} = -c(\mathbf{n} \times \mathbf{m}_0)_\alpha. \tag{22.32}$$

Der zweite Term lässt sich durch das elektrische Quadrupolmoment (4.10) ausdrücken. Mit $f = \frac{1}{2} x'_\alpha x'_\beta$ ergibt er sich mit (22.21) zu

The second term can be expressed by the electric quadrupole moment (4.10). With $f = \frac{1}{2} x'_\alpha x'_\beta$ one obtains from (22.21)

$$-i\omega \frac{n_\beta}{2} \int d^3r' x'_\alpha x'_\beta \rho_0(\mathbf{r}') = -i\omega \frac{n_\beta}{2} \Big(Q_{0,\alpha,\beta} + \frac{1}{3} \delta_{\alpha,\beta} \int d^3r' r'^2 \rho_0(\mathbf{r}') \Big). \tag{22.33}$$

Damit haben wir

Thus we have

$$\mathbf{g}^{(1)} = -c\mathbf{n} \times \mathbf{m}_0 - \frac{i\omega}{2} Q_{0,\alpha,\beta} n_\beta \mathbf{e}_\alpha + \text{ const. } \mathbf{n}. \tag{22.34}$$

Wir beobachten, dass der dritte Term proportional $\mathbf{n}$ keinen Beitrag zu $\mathbf{B}_0$ (22.9) und $\mathbf{E}_0$ (22.11) liefert.

We observe that the third term proportional $\mathbf{n}$ does neither contribute to $\mathbf{B}_0$ (22.9) nor to $\mathbf{E}_0$ (22.11).

22.c.α Magnetische Dipolstrahlung

22.c.α Magnetic Dipole Radiation

Der erste Beitrag in (22.34) gibt die magnetische Dipolstrahlung. Wir finden

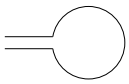
The first contribution in (22.34) yields the magnetic dipole radiation. We obtain

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \Big(ik - \frac{1}{r} \Big) \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{n} \times \mathbf{m}_0 \tag{22.35}$$

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = -k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{m}_0) + \Big(3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}_0) - \mathbf{m}_0 \Big) \Big(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \Big) e^{ikr} \tag{22.36}$$

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = (-\frac{k^2}{r} - \frac{\mathrm{i}k}{r^2})(\mathbf{n}\times\mathbf{m}_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}. \tag{22.37}$$

Als Beispiel betrachten wir einen Kreisstrom, der eine Fläche f einschließt,



As an example we consider a current along a loop which includes the area f,

$$m_0 = I_0 f/c, \quad \dot{U}_\mathrm{s} = \frac{ck^4 m_0^2}{3} = \frac{k^4 I_0^2 f^2}{3c}, \tag{22.38}$$

was einem Strahlungswiderstand

which corresponds to a radiation resistance

$$R_\mathrm{s} = \frac{2}{3c}k^4 f^2 \hat{=} 20\Omega\,(k^2 f)^2 \tag{22.39}$$

entspricht.

.

22.c.β Elektrische Quadrupolstrahlung

Wir betrachten noch den zweiten Term aus (22.34) in der Fernzone. Dieser liefert

22.c.β Electric Quadrupole Radiation

We finally consider the second term in (22.34) in the far zone. It yields

$$\mathbf{g} = -\mathrm{i}k\mathbf{g}^{(1)} = -\frac{k^2 c}{2}Q_{0,\alpha,\beta}n_\beta \mathbf{e}_\alpha. \tag{22.40}$$

Als Spezialfall untersuchen wir den symmetrischen Quadrupol (4.27), $Q_{0,x,x} = Q_{0,y,y} = -\frac{1}{3}Q_0$, $Q_{0,z,z} = \frac{2}{3}Q_0$, während die Außerdiagonal-Elemente verschwinden. Dann ist

As special case we investigate the symmetric quadrupole (4.27), $Q_{0,x,x} = Q_{0,y,y} = -\frac{1}{3}Q_0$, $Q_{0,z,z} = \frac{2}{3}Q_0$, whereas the off-diagonal elements vanish. Then one has

$$Q_{0,\alpha,\beta} = -\frac{1}{3}Q_0\delta_{\alpha,\beta} + Q_0\delta_{\alpha,3}\delta_{\beta,3}, \tag{22.41}$$

woraus

from which

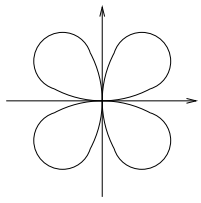
$$\mathbf{g} = -\frac{k^2 c}{2}Q_0 n_3 \mathbf{e}_3 + \frac{k^2 c}{6}Q_0\mathbf{n}, \quad n_3 = \cos\theta \tag{22.42}$$

$$\mathbf{B}_0 = -\mathrm{i}k^3\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{2r}Q_0\mathbf{n}\times\mathbf{e}_3\cos\theta \tag{22.43}$$

$$\mathbf{E}_0 = \mathrm{i}k^3\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{2r}Q_0\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{e}_3)\cos\theta \tag{22.44}$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{ck^6\mathbf{n}}{32\pi r^2}|Q_0|^2\sin^2\theta\cos^2\theta \tag{22.45}$$

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{ck^6}{60}|Q_0|^2 \tag{22.46}$$



folgt. Auf der Zeichnung ist die Intensität der Quadrupol-Strahlung in Abhängigkeit vom Winkel θ radial skizziert.

follows. The intensity of the quadrupole-radiation is radially sketched as function of the angle θ.

H

Lorentz-Invarianz der Elektrodynamik

Lorentz Invariance of Electrodynamics

©2003 Franz Wegner Universität Heidelberg

23 Lorentz-Transformation

23.a Galilei- und Lorentz-Transformation

Die Gleichungen der Newtonschen Mechanik sind invariant gegen die Galilei-Transformation (Galilei-Invarianz)

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z - vt, \quad t' = t. \tag{23.1}$$

Wir werden im Folgenden sehen, dass die Maxwell-Gleichungen bei geeigneter Transformation von Feldern, Strömen und Ladungen invariant sind gegen lineare Transformationen der Koordinaten x, y, z und t, die die Lichtgeschwindigkeit invariant lassen (Lorentz-Invarianz). Eine derartige Transformation lautet

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{23.2}$$

Betrachten wir zwei Ladungen q und $-q$, die sich für $t \le 0$ am gleichen Ort befinden und auch für $t \ge \Delta t$ am gleichen Ort sind, sich aber im Intervall $0 < t < \Delta t$ gegeneinander bewegen, wobei sie sich zur Zeit 0 am Ort $\mathbf{r}_0$ trennen und zur Zeit Δt am Ort $\mathbf{r}_1$ wieder zusammen kommen. Diese erzeugen nach (21.14) und (21.15) ein Feld, das sich von diesen beiden Ladungen mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet und am Ort $\mathbf{r}$ nur für Zeiten t von Null verschieden ist, für die $t > |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c$ und $t < \Delta t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c$ gilt und zwar unabhängig vom Inertialsystem, in dem wir uns befinden. (Wir müssen dabei nur voraussetzen, dass sich die Ladungen nicht mit Überlicht-Geschwindigkeit bewegen.) Wählen wir insbesondere Δt infinitesimal, so kommt der Lichtblitz zur Zeit $t = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c$ an, bewegt sich also mit Lichtgeschwindigkeit.

23 Lorentz Transformation

23.a Galilei and Lorentz Transformation

The equations of Newton's mechanics are invariant under the Galilei transformation (Galilei invariance)

We will see in the following that Maxwell's equations are invariant under appropriate transformations of fields, currents and charges against linear transformations of the coordinates x, y, z, and t, which leave the velocity of light invariant (Lorentz invariance). Such a transformation reads

Consider two charges q und $-q$, which are for $t \le 0$ at the same point and which are also for $t \ge \Delta t$ at the same point, which move however in the time interval $0 < t < \Delta t$ against each other. They separate at time 0 at $\mathbf{r}_0$ and they meet again at time Δt at $\mathbf{r}_1$. They generate according to (21.14) and (21.15) a field, which propagates with light-velocity. It is different from zero at point $\mathbf{r}$ at time t only, if $t > |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c$ and $t < \Delta t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c$ holds. This should hold independently of the system of inertia in which we consider the wave. (We need only assume that the charges do not move faster than with light-velocity.) If we choose an infinitesimal Δt then the light flash arrives at time $t = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c$, since it propagates with light-velocity.

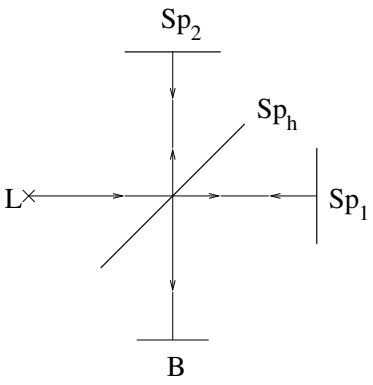
Da die Lorentz-Transformation nicht mit den Gesetzen der Newtonschen Mechanik verträglich ist und die Galilei-Transformation nicht mit den Maxwell-Gleichungen (das Licht müsste sich in einem bewegten Inertial-System mit einer von der Richtung abhängigen Geschwindigkeit ausbreiten), entsteht die Frage, welche der drei Möglichkeiten in der Natur erfüllt ist:
(i) es gibt ein ausgezeichnetes Inertialsystem für die Elektrodynamik, für das die Maxwell-Gleichungen nur gelten (Äther-Hypothese),
(ii) die Newton-Mechanik ist abzuändern,
(iii) die Maxwell-Gleichungen sind abzuändern.

Since the Lorentz transformation is not in agreement with the laws of Newton's mechanics and the Galilei transformation not with Maxwell's equations (in a moving inertial frame light would have a velocity dependent on the direction of light-propagation) the question arises which of the three following possibilities is realized in nature:
(i) there is a preferred system of inertia for electrodynamics, in which Maxwell's equations hold (ether-hypothesis),
(ii) Newton's mechanics has to be modified
(iii) Maxwell's equations have to be modified.

Die Entscheidung kann nur experimentell getroffen werden. Ein wesentlicher Versuch zur Widerlegung von (i) ist der Michelson-Morley-Versuch:

The decision can only be made experimentally: An essential experiment to refute (i) is the Michelson-Morley experiment:

Ein Lichtstrahl trifft auf einen halbdurchlässigen Spiegel Sp_h, wird durch diesen geteilt, an zwei Spiegeln Sp_1 und Sp_2 im Abstand l reflektiert und an dem halbdurchlässigen Spiegel wieder zusammengeführt. Man beobachtet die Interferenz der beiden Lichtstrahlen bei B. Bewegt sich die Apparatur mit der Geschwindigkeit v in Richtung Spiegel Sp_1, so beträgt die Laufzeit t_1 zwischen dem halbdurchlässigen Spiegel und dem Spiegel Sp_1 und zurück



A light beam hits a half-transparent mirror Sp_h, is split into two beams, which are reflected at mirror Sp_1 and Sp_2, resp. at distance l and combined again at the half-transparent mirror. One observes the interference fringes of both beams at B. If the apparatus moves with velocity v in the direction of the mirror Sp_1, then the time t_1 the light needs to propagate from the half-transparent mirror to Sp_1 and back is

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2lc}{c^2-v^2} = \frac{2l}{c}(1 + \frac{v^2}{c^2} + ...). \tag{23.3}$$

Für die Laufzeit t_2 zum Spiegel Sp_2 ergibt sich

The time t_2 the light needs to the mirror Sp_2 is

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2l}{c}(1 + \frac{v^2}{2c^2} + ...), \tag{23.4}$$

da sich die Lichtgeschwindigkeit c in die beiden Komponenten v und $\sqrt{c^2-v^2}$ zerlegt. Damit bleibt ein Gangunterschied

since the light velocity c has to be separated into the two components v and $\sqrt{c^2-v^2}$. Thus there remains the time difference

$$t_1 - t_2 = \frac{lv^2}{c^3}, \tag{23.5}$$

der durch Verschiebung der Interferenzen messbar wäre, wenn zum Beispiel v die Geschwindigkeit der Erde gegenüber der Sonne ist. Diese Verschiebung wurde nicht beobachtet. Man kann einwenden, dass das daran liegt, dass der Äther von der Erde mitgeführt wird. Es gibt jedoch viele weitere Versuche, die für die Lorentz-Invarianz sprechen, das heißt der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum unabhängig vom Inertialsystem.

which would be measurable by a displacement of the interference fringes, if for example the velocity v is the velocity of the earth against the sun. This displacement has not been observed. One may object that this is due to a drag of the ether by the earth. There are however many other experiments, which are all in agreement with Lorentz invariance, i.e. the constancy of the velocity of light in vacuum independent of the system of inertia.

Dafür spricht vor allem, dass die Konsequenzen für die Mechanik bei Versuchen mit Teilchen nahe der Lichtgeschwindigkeit, insbesondere bei Elementarteilchen bestens bestätigt werden.

Entwicklung der Relativitätstheorie

Um die Geschwindigkeit der Erde gegen den postulierten Äther zu bestimmen führten Michelson und Morley ihr Experiment erstmals 1887 mit negativem Ergebnis durch: Keine Bewegung gegen den Äther konnte festgestellt werden. Zur Erklärung postulierten Fitzgerald (1889) und Lorentz (1892), dass sich alle Gegenstände in Richtung der Bewegung gegen den Äther verkürzen. (vgl. Lorentz-Kontraktion, Unterabschnitt 23.b.β).

Im Folgenden werden wir die Idee der vierdimensionalen Raum-Zeit entwickeln, innerhalb deren man Transformationen vornehmen kann ähnlich den orthogonalen Transformationen im dreidimensionalen Raum, an die wir bereits gewöhnt sind. Allerdings handelt es sich dabei nicht um einen Euklidischen Raum, d. h. einen Raum mit definiter Metrik, vielmehr haben Raum und Zeit unterschiedliche Metrik (siehe metrischer Tensor g, Gleichung 23.10). Man nennt diesen Raum auch Minkowski-Raum. Wir verwenden dabei die moderne von Minkowski 1908 eingeführte vierdimensionale Notation.

Ausgehend von den Grundideen der speziellen Relativitätstheorie
Die Naturgesetze und Ergebnisse der Experimente in einem Inertialsystem sind unabhängig von der Bewegung des Systems als Ganzem.
Die Lichtgeschwindigkeit ist in jedem Inertialsystem die Gleiche und unabhängig von der Geschwindigkeit der Quelle.
werden wir in den folgenden Abschnitten die Lorentz-invariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen und der relativistischen Mechanik einführen.

23.b Lorentz-Transformation

Wir führen die Notation

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \tag{23.6}$$

oder kurz

$$(x^\mu) = (ct, \mathbf{r}) \tag{23.7}$$

ein und bezeichnen diese als die kontravarianten Komponenten des Vektors. Weiter führt man

$$(x_\mu) = (ct, -\mathbf{r}). \tag{23.8}$$

The consequences in mechanics for particles with velocities comparable to the velocity of light in particular for elementary particles have confirmed Lorentz invariance very well.

Development of the Theory of Relativity

In order to determine the velocity of the earth against the postulated ether Michelson and Morley performed their experiment initially in 1887 with the negative result: No motion against the ether was detected. In order to explain this Fitzgerald (1889) and Lorentz (1892) postulated that all material objects are contracted in their direction of motion against the ether (compare Lorentz contraction, subsection 23.b.β).

In the following we will develop the idea of a four-dimensional space-time, in which one may perform transformations similar to orthogonal transformations in three-dimensional space, to which we are used. However this space is not a Euclidean space, i.e. a space with definite metric. Instead space and time have a metric with different sign (see the metric tensor g, eq. 23.10). This space is also called Minkowski space. We use the modern four-dimensional notation introduced by Minkowski in 1908.

Starting from the basic ideas of special relativity
The laws of nature and the results of experiments in a system of inertia are independent of the motion of such a system as whole.
The velocity of light is the same in each system of inertia and independent of the velocity of the source
we will introduce the Lorentz-invariant formulation of Maxwell's equations and of relativistic mechanics.

23.b Lorentz Transformation

We introduce the notation

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \tag{23.6}$$

or shortly

$$(x^\mu) = (ct, \mathbf{r}) \tag{23.7}$$

and denotes them as the contravariant components of the vector. Further one introduces

$$(x_\mu) = (ct, -\mathbf{r}). \tag{23.8}$$

ein, die als die kovarianten Komponenten des Vektors bezeichnet werden. Dann können wir auch

which are called covariant components of the vector. Then we may write

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu, \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \tag{23.9}$$

schreiben (Summationskonvention) mit

(summation convention)

$$(g^{\cdot\cdot}) = (g_{\cdot\cdot}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{23.10}$$

Man bezeichnet g als den metrischen Tensor. Generell gilt für das Herauf- und Herunter-Ziehen von Indices

One calls g the metric tensor. Generally one has the rules for lifting and lowering of indices

$$C \cdot{}^{\mu} \cdot\cdot = g^{\mu\nu} C \cdot\cdot{}_{\nu} \cdot\cdot, \quad C \cdot\cdot{}_{\mu} \cdot\cdot = g_{\mu\nu} C \cdot\cdot{}^{\nu} \cdot\cdot \tag{23.11}$$

Wir vereinbaren: Indices κ, λ, μ, ν laufen von 0 bis 3, Indices α, β, γ, ... von 1 bis 3. Man beobachtet, dass nach (23.11) $g_\mu{}^\nu = g_{\mu\kappa} g^{\kappa\nu} = \delta_\mu{}^\nu$, $g^\mu{}_\nu = g^{\mu\kappa} g_{\kappa\nu} = \delta^\mu{}_\nu$ mit dem Kronecker-Delta ist.

We introduce the convention: Indices κ, λ, μ, ν run from 0 to 3, indices α, β, γ, ... from 1 to 3. One observes that according to (23.11) $g_\mu{}^\nu = g_{\mu\kappa} g^{\kappa\nu} = \delta_\mu{}^\nu$, $g^\mu{}_\nu = g^{\mu\kappa} g_{\kappa\nu} = \delta^\mu{}_\nu$ with the Kronecker delta.

Wird ein Lichtblitz zur Zeit $t = 0$ bei $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ erzeugt, so wird seine Wellenfront durch

If a light-flash is generated at time $t = 0$ at $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, then its wave front is described by

$$s^2 = c^2 t^2 - \mathbf{r}^2 = x^\mu x_\mu = 0 \tag{23.12}$$

beschrieben. Wir bezeichnen das durch die Koordinaten x^μ beschriebene System mit S. Wir postulieren nun mit Einstein: In jedem Inertialsystem breitet sich das Licht im Vakuum mit der gleichen Geschwindigkeit c aus. (Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit) Dann gilt für den Lichtblitz im gleichförmig bewegten System S' (dessen Ursprung für $t = t' = 0$ mit dem von S übereinstimmt)

. We denote the system described by the coordinates x^μ by S. Now we postulate with Einstein: Light in vacuum propagates in each inertial system with the same velocity c. (principle of the constance of light velocity) Then the propagation of the light flash in the uniformly moving system S' whose origin agrees at $t = t' = 0$ with that of S is given by

$$s'^2 = x'^\mu x'_\mu = 0. \tag{23.13}$$

Unter der Annahme eines homogenen Raum-Zeit-Kontinuums muss die Transformation zwischen x' und x linear sein

Requiring a homogeneous space-time continuum the transformation between x' and x has to be linear

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \tag{23.14}$$

und es muss gelten $s'^2 = f s^2$ mit einer Konstanten f. Verlangen wir, dass der Raum isotrop ist und kein Inertialsystem ausgezeichnet ist, so folgt $f = 1$. Die Bedingung $s'^2 = s^2$ impliziert

and $s'^2 = f s^2$ with some constant f has to hold. If we require that space is isotropic and no system of inertia is preferred, then $f = 1$ has to hold. The condition $s'^2 = s^2$ implies

$$s'^2 = x'^\mu x'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \Lambda_\mu{}^\kappa x_\kappa = s^2 = x^\nu \delta_\nu{}^\kappa x_\kappa, \tag{23.15}$$

was für beliebiges x erfüllt ist, wenn

which is fulfilled for arbitrary x, if

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\kappa = \delta_\nu{}^\kappa \tag{23.16}$$

erfüllt ist. Die Umkehrtransformation von (23.14) folgt aus

holds. The inverse transformation of (23.14) follows from

$$x^\kappa = \delta_\nu{}^\kappa x^\nu = \Lambda_\mu{}^\kappa \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \Lambda_\mu{}^\kappa x'^\mu. \tag{23.17}$$

Aus (23.16) folgt speziell für $\nu = \kappa = 0$ die Beziehung $(\Lambda^{00})^2 - \sum_\alpha (\Lambda^{\alpha 0})^2 = 1$. Man beachte, dass $\Lambda^\alpha{}_0 = +\Lambda^{\alpha 0}$, $\Lambda_\alpha{}^0 = -\Lambda^{\alpha 0}$. Daher ist $|\Lambda^{00}| > 1$. Man unterscheidet zwischen Transformationen mit positivem und negativem Λ^{00}, da es keinen kontinuierlichen Übergang zwischen diesen beiden Klassen gibt. Die Bedingung $\Lambda^{00} > 0$ sagt aus, dass $\Lambda^{00} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}|_{\mathbf{r}'} > 0$, das heißt eine in S' ruhende Uhr läuft von S aus gesehen in der gleichen Zeitrichtung, wie die in S synchronisierten Uhren (und nicht rückwärts).

From (23.16) one obtains in particular for $\nu = \kappa = 0$ the relation $(\Lambda^{00})^2 - \sum_\alpha (\Lambda^{\alpha 0})^2 = 1$. Note that $\Lambda^\alpha{}_0 = +\Lambda^{\alpha 0}$, $\Lambda_\alpha{}^0 = -\Lambda^{\alpha 0}$. Thus one has $|\Lambda^{00}| > 1$. One distinguishes between transformations with positive and negative Λ^{00}, since there is no continuous transition between these two classes. The condition $\Lambda^{00} > 0$ means that $\Lambda^{00} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}|_{\mathbf{r}'} > 0$, that is a clock which is at rest in S' changes its time seen from S with the same direction as the clock at rest in S (and not backwards).

Schließlich lässt sich noch eine Aussage über $\det(\Lambda^\mu{}_\nu)$ machen. Aus (23.16) folgt

Finally we can make a statement on $\det(\Lambda^\mu{}_\nu)$. From (23.16) it follows that

$$\Lambda^\mu{}_\nu g_{\mu\lambda} \Lambda^\lambda{}_\rho g^{\rho\kappa} = \delta_\nu{}^\kappa. \tag{23.18}$$

Unter Verwendung des Determinanten-Multiplikationssatzes folgt

Using the theorem on the multiplication of determinants we obtain

$$\det(\Lambda^\mu{}_\nu)^2 \det(g_{\mu\lambda}) \det(g^{\rho\kappa}) = 1. \tag{23.19}$$

Da $\det(g_{\mu\lambda}) = \det(g^{\rho\kappa}) = -1$ folgt

Since $\det(g_{\mu\lambda}) = \det(g^{\rho\kappa}) = -1$ one obtains

$$\det(\Lambda^\mu{}_\nu) = \pm 1. \tag{23.20}$$

Betrachten wir nur Rechts-Basis-Systeme, so ist $\det(\Lambda^\mu{}_\nu) = +1$. Transformationen, die

If we consider only a right-basis-system then we have $\det(\Lambda^\mu{}_\nu) = +1$. Transformations which fulfill

$$\Lambda^{00} > 0, \quad \det(\Lambda^\mu{}_\nu) = 1 \tag{23.21}$$

erfüllen, heißen eigentliche Lorentz-Transformationen.

are called proper Lorentz transformations.

Gl. (23.21) hat die Konsequenz, dass das vierdimensionale Raumzeitvolumen invariant ist

Eq. (23.21) has the consequence that the fourdimensional space time volume is invariant

$$\mathrm{d}t' \mathrm{d}^3 r' = \frac{1}{c} \mathrm{d}^4 x' = \frac{1}{c} \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \mathrm{d}^4 x = \frac{1}{c} \det(\Lambda^\mu{}_\nu) \mathrm{d}^4 x = \frac{1}{c} \mathrm{d}^4 x = \mathrm{d}t \mathrm{d}^3 r. \tag{23.22}$$

Legen wir die z- und die z'-Achse in Richtung der Relativgeschwindigkeit v der sich gegeneinander bewegenden Inertialsysteme und setzen wir zusätzlich $x' = x$, $y' = y$, so folgt die spezielle Transformation (23.2). Die zugehörige Matrix Λ lautet

If the direction of the z- and the z'-axes point into the direction of the relative velocity between both inertial systems and $x' = x$, $y' = y$, then the special transformation (23.2) follows. The corresponding matrix Λ reads

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{23.23}$$

mit

with

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \tag{23.24}$$

23.b.α Zeitdilatation

23.b.α Time Dilatation

Wir betrachten nun eine in S' ruhende Uhr im System S. Aus

We consider now a clock in the system S which is at rest in S'. From

$$t = \gamma(t' + \frac{v z'}{c^2}) \tag{23.25}$$

folgt dann

$$\Lambda_0{}^0 = \left.\frac{\partial t}{\partial t'}\right|_{\mathbf{r}'} = \gamma. \tag{23.26}$$

Die in S' ruhende Uhr geht von S aus betrachtet langsamer

$$\Delta t' = \left.\frac{\partial t'}{\partial t}\right|_{\mathbf{r}'} \Delta t = \frac{1}{\gamma}\Delta t = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\Delta t. \tag{23.27}$$

Dieses Phänomen bezeichnet man als Zeitdilatation.

we find that

Thus the clock at rest in S' runs slower when seen from S

This phenomenon is called time dilatation.

23.b.β Längenkontraktion

Aus

$$z' = \gamma(z - vt) \tag{23.28}$$

folgt

$$\Lambda^3{}_3 = \left.\frac{\partial z'}{\partial z}\right|_t = \gamma \tag{23.29}$$

und damit

$$\Delta z = \left.\frac{\partial z}{\partial z'}\right|_t \Delta z' = \frac{1}{\gamma}\Delta z' = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\Delta z'. \tag{23.30}$$

Ein Maßstab, der in S' ruht und in der Richtung der Relativ-Bewegung ausgedehnt ist, erscheint also in S verkürzt. Man bezeichnet das als Längenkontraktion. Dagegen bleiben die Entfernungen senkrecht zur Bewegungsrichtung unverändert: $\Delta x' = \Delta x$, $\Delta y' = \Delta y$.

Diese Verkürzung bewirkt, dass in (23.3) die Länge l durch $l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ zu ersetzen ist. Dann stimmen die beiden Laufzeiten des Lichts unabhängig von der Geschwindigkeit v überein, $t_1 = t_2$.

23.b.β Lorentz Contraction

From

one obtains

and therefore

A length-meter which is at rest in S' and is extended in the direction of the relative movement, appears consequently contracted in S. This is called Lorentz contraction or FitzGerald-Lorentz contraction. However, the distances perpendicular to the velocity are unaltered: $\Delta x' = \Delta x$, $\Delta y' = \Delta y$.

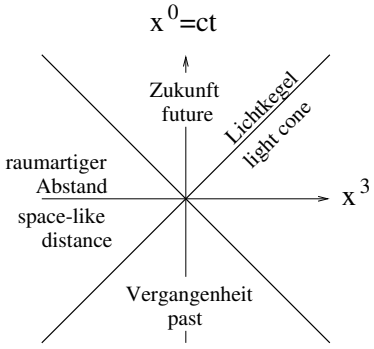
This contraction has the effect that in (23.3) the length l has to be replaced by $l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Then the two times the light has to travel agree independent of the velocity v, $t_1 = t_2$.

24 Viererskalare und Vierervektoren

24 Four-Scalars and Four-Vectors

24.a Abstand und Eigenzeit als Viererskalare

Eine Größe, die invariant gegen LORENTZ-Transformationen ist, heißt Viererskalar. Beispiel: Gegeben seien zwei Raum-Zeit-Punkte (Ereignisse) (x^μ), $(\bar{x}^\mu)$. Die Größe



$$s^2 = (x^\mu - \bar{x}^\mu)(x_\mu - \bar{x}_\mu) \tag{24.1}$$

ist ein Viererskalar. Sie hat in jedem Inertialsystem den gleichen Wert. Speziell für $\bar{x}^\mu = 0$ (Ursprung) ist $s^2 = x^\mu x_\mu$.

24.a Distance and Proper Time as Four-Scalars

A quantity which is invariant under LORENTZ transformations is called four-scalar. Example: Given two points in space-time (events) (x^μ), $(\bar{x}^\mu)$. The quantity

is a four-scalar. It assumes the same number in all systems of inertia. Especially for $\bar{x}^\mu = 0$ (origin) it is $s^2 = x^\mu x_\mu$.

24.a.α Raumartiger Abstand $s^2 < 0$

Wenn $s^2 < 0$, dann gibt es Inertialsysteme, in denen beide Ereignisse gleichzeitig stattfinden $x'^0 = 0$. Sei etwa $(x^\mu) = (ct, 0, 0, z)$. Dann erhält man aus (23.2)

$$t' = \frac{t - \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{24.2}$$

mit $v = tc^2/z$

$$t' = 0, \quad z' = \frac{z(1 - \frac{v^2}{c^2})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = z\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \pm\sqrt{z^2 - c^2t^2} = \pm\sqrt{-s^2}. \tag{24.3}$$

Man bezeichnet daher zwei solche Ereignisse als raumartig zu einander gelegen.

24.a.α Space-like distance $s^2 < 0$

If $s^2 < 0$, then there are systems of inertia, in which both events occur at the same time $x'^0 = 0$. If for example $(x^\mu) = (ct, 0, 0, z)$. Then one obtains from 23.2)

with $v = tc^2/z$

Thus one calls such two events space-like separated.

24.a.β Zeitartiger Abstand $s^2 > 0$

In diesem Fall existiert ein Inertialsystem, in dem beide Ereignisse am gleichen Ort stattfinden ($\mathbf{x}' = \mathbf{0}$). In der Transformation (23.2) wählen wir $v = z/t$. Dann folgt

24.a.β Time-like distance $s^2 > 0$

In this case there exists a system of inertia in which both events take place at the same point in space ($\mathbf{x}' = \mathbf{0}$). We choose $v = z/t$ in the transformation (23.2) and obtain

$$t' = \frac{t(1-\frac{v^2}{c^2})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \operatorname{sign}(t)\sqrt{t^2-\frac{z^2}{c^2}} = \operatorname{sign}(t)\frac{s}{c}, \quad z' = 0. \tag{24.4}$$

Ein Ereignis ist früher als das andere, das heißt, das Vorzeichen von t' stimmt mit dem von t überein.

One event takes place before the other that is the sign of t' agrees with that of t.

Eigenzeit τ

Proper Time τ

Unter der Eigenzeit τ versteht man die Zeit, die im jeweiligen Ruhesystem verstreicht. Bewegt sich ein Punkt mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$, so gilt für seine Eigenzeit

The proper time τ is the time which passes in the rest system under consideration. If a point moves with velocity $\mathbf{v}(t)$ its proper time varies as

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}s}{c} = \sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}\mathrm{d}t, \tag{24.5}$$

also

that is

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2(t)}{c^2}}\mathrm{d}t. \tag{24.6}$$

Die Eigenzeit ist unabhängig vom Inertialsystem, also ein Vierskalar.

The proper time is independent of the system of inertia, thus it is a four-scalar.

24.a.γ Lichtartiger Abstand $s^2 = 0$

24.a.γ Light-like distance $s^2 = 0$

Wenn ein Lichtblitz direkt von einem Ereignis zu einem anderen läuft, dann ist deren Abstand $s = 0$. Die in einem Inertialsystem gemessene Zeit kann je nach Inertialsystem beliebig lang oder kurz sein, jedoch kann sich die Reihenfolge der Ereignisse (bei einer eigentlichen Lorentz-Transformation) nicht umkehren.

If a light flash propagates directly from one event to another, then the distance of these two events $s = 0$. The time measured in a system of inertia depends on the system of inertia and may be arbitrarily long or short, however, the sequence of the events (under proper Lorentz transformation) cannot be reversed.

Ein weiterer Vierskalar ist die Ladung.

Another four-scalar is the charge.

24.b Weltgeschwindigkeit als Vierervektor

24.b World Velocity as Four-Vector

Transformiert sich eine vierkomponentige Größe (A^μ) beim Übergang von einem Inertialsystem zum anderen wie die Raum-Zeit-Koordinaten (x^μ), so bilden sie einen Vierervektor

If a four-component quantity (A^μ) transforms by the transition from one system of inertia to another as the space-time coordinates (x^μ), then it is a four-vector

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu. \tag{24.7}$$

Ein Beispiel ist die Weltgeschwindigkeit

An example is the world velocity

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \gamma v^\mu \text{ mit } v^0 = \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}t} = c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = c. \tag{24.8}$$

Die Weltgeschwindigkeit $(u^\mu) = (c\gamma, \mathbf{v}\gamma)$ ist ein Vierer-Vektor. Da τ invariant gegen Lorentz-Transformationen ist, transformiert sie sich wie (x^μ). Dagegen ist $(c, \mathbf{v})$ kein Vierer-Vektor. Es ist

The world velocity $(u^\mu) = (c\gamma, \mathbf{v}\gamma)$ is a four-vector. Since τ is invariant under Lorentz transformations, its components transform like (x^μ). However, $(c, \mathbf{v})$ is not a four-vector. One has

$$u^\mu u_\mu = (c^2 - \mathbf{v}^2)\gamma^2 = c^2. \tag{24.9}$$

Allgemein ist das Skalar-Produkt zweier Vierer-Vektoren (A^μ) und (B^μ) ein Viererskalar

Quite generally the scalar product of two four-vectors (A^μ) and (B^μ) is a four-scalar

$$A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\kappa A^\nu B_\kappa = \delta^\kappa_\nu A^\nu B_\kappa = A^\nu B_\nu. \tag{24.10}$$

Wir zeigen das folgende Lemma: Ist (a^μ) ein beliebiger Vierervektor (oder hat man einen vollständigen Satz Vierervektoren) und ist $a^\mu b_\mu$ ein Viererskalar, dann ist auch (b^μ) ein Vierervektor. Beweis:

We show the following lemma: If (a^μ) is an arbitrary four-vector (or one has a complete set of four-vectors) and $a^\mu b_\mu$ is a four-scalar then (b^μ) is a four-vector too. Proof:

$$a^\mu b_\mu = a'^\kappa b'_\kappa = \Lambda^\kappa{}_\mu a^\mu b'_\kappa. \tag{24.11}$$

Da dies für alle (a^μ) oder einen vollständigen Satz gilt, gilt auch $b_\mu = \Lambda^\kappa{}_\mu b'_\kappa$. Dies ist aber die Transformationsformel (23.17) für Vierervektoren.

Since this holds for all (a^μ) or for a complete set, one has $b_\mu = \Lambda^\kappa{}_\mu b'_\kappa$. This, however, is the transformation formula (23.17) for four-vectors.

Additions-Theorem für Geschwindigkeiten

Das Inertialsystem S' bewege sich gegenüber S mit der Geschwindigkeit v in z-Richtung. In S' bewege sich ein Punkt mit der Geschwindigkeit w' ebenfalls in z-Richtung. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt er sich in S? Wir haben

Addition theorem for velocities

The system of inertia S' moves with velocity v in z-direction with respect to S. A point in S' moves with velocity w' also in z-direction. With which velocity does the point move in S? We have

$$z = \frac{z' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' + \frac{vz'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{24.12}$$

Mit $z' = w't'$ folgt dann

With $z' = w't'$ one obtains

$$z = \frac{(v + w')t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{(1 + \frac{vw'}{c^2})t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{24.13}$$

Daraus folgt die Geschwindigkeit des Punktes in S

From this one obtains the velocity of the point in S

$$w = \frac{z}{t} = \frac{w' + v}{1 + \frac{w'v}{c^2}}. \tag{24.14}$$

Wir beobachten

We observe

$$1 - \frac{w^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{\frac{w'}{c} + \frac{v}{c}}{1 + \frac{w'v}{c^2}}\right)^2 = \frac{(1 - \frac{w'^2}{c^2})(1 - \frac{v^2}{c^2})}{(1 + \frac{w'v}{c^2})^2}. \tag{24.15}$$

Wenn $|w'| < c$ und $|v| < c$, dann ist dieser Ausdruck positiv. Dann ist also auch $|w| < c$. Beispiel: $w' = v = 0.5c$, dann ist $w = 0.8c$.

If $|w'| < c$ and $|v| < c$, then this expression is positive. Then one obtains also $|w| < c$. Example: $w' = v = 0.5c$, then one obtains $w = 0.8c$.

24.c Viererstromdichte

Wir fassen Ladungs- und Stromdichte zusammen zur Viererstromdichte

24.c Current Density Four-Vector

We combine charge- and current-density in the charge-current density

$$(j^\mu) = (c\rho, \mathbf{j}) \tag{24.16}$$

und überzeugen uns, dass j^μ ein Vierervektor ist. Für Ladungen der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ gilt (für Ladungen verschiedener Geschwindigkeit können die Beiträge superponiert werden)

and convince us that j^μ is a four-vector. For charges of velocity $\mathbf{v}$ one has (the contributions of charges of different velocities can be superimposed)

$$j^\mu = \rho v^\mu, \quad (v^0 = c), \quad j^\mu = \rho\sqrt{1 - \beta^2} u^\mu \tag{24.17}$$

Falls $\rho\sqrt{1-\beta^2}$ ein Viererskalar ist, ist j^μ ein Viervektor. Nun ist

If $\rho\sqrt{1-\beta^2}$ is a four-scalar then indeed j^μ is a four-vector. Now one has

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{V_0\sqrt{1-\beta^2}} \tag{24.18}$$

mit dem Volumen V_0 im Ruhesystem und der Längenkontraktion $V = V_0\sqrt{1-\beta^2}$. Da die Ladung q und V_0 Viererskalare sind, ist auch $\rho\sqrt{1-\beta^2}$ ein Viererskalar.

with the volume V_0 in the rest system and the Lorentz contraction $V = V_0\sqrt{1-\beta^2}$. Since the charge q and V_0 are four-scalars this holds also $\rho\sqrt{1-\beta^2}$.

Wir bringen nun die Kontinuitätsgleichung in Lorentz-invariante Form. Aus $\dot\rho + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ folgt

We bring the equation of continuity in Lorentz-invariant form. From $\dot\rho + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ one obtains

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0, \tag{24.19}$$

da $\partial j^0/\partial x^0 = \partial\rho/\partial t$. Wir betrachten nun die Transformations-Eigenschaften der Ableitungen $\partial/\partial x^\mu$

since $\partial j^0/\partial x^0 = \partial\rho/\partial t$. We consider now the transformation properties of the derivatives $\partial/\partial x^\mu$

$$\frac{\partial f}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial f}{\partial x^\nu} = \Lambda_\mu{}^\nu\frac{\partial f}{\partial x^\nu}, \tag{24.20}$$

das heisst die Ableitung transformiert sich gemäß

that is the derivatives transform according to

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu{}^\nu\frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{24.21}$$

wie $x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu$. Man schreibt daher

as $x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu$. Thus one writes

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu, \quad (\partial_\mu) = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla). \tag{24.22}$$

Man achte auf die Stellung der Indices. Ähnlich gilt

Watch the positions of the indices. Similarly one has

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \partial^\mu, \quad (\partial^\mu) = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla). \tag{24.23}$$

Man kann dann die Kontinuitätsgleichung als

Then the equation of continuity can be written

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{24.24}$$

schreiben. Generell ist die Viererdivergenz $\partial_\mu P^\mu = \partial^\mu P_\mu$ eines Viervektors P ein Viererskalar.

. Generally the four-divergency $\partial_\mu P^\mu = \partial^\mu P_\mu$ of a four-vector P is a four-scalar.

24.d Viererpotential

24.d Four-Potential

Wir fassen nun $\mathbf{A}$ und Φ zusammen zum Viererpotential

We combine the potentials $\mathbf{A}$ and Φ in the four-potential

$$(A^\mu) = (\Phi, \mathbf{A}), \tag{24.25}$$

dann gilt

then one has

$$\Box A^\mu = -\frac{4\pi}{c}j^\mu \tag{24.26}$$

in der Lorenz-Eichung mit der Eichbedingung

in the Lorenz gauge with the gauge condition

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\dot\Phi = 0 \to \partial_\mu A^\mu = 0. \tag{24.27}$$

Dabei ist der d'Alembert-Operator

There the d'Alembert operator

$$\Box = \triangle - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 = -\partial_\mu\partial^\mu \tag{24.28}$$

ein Viererskalar $\Box' = \Box$.

is a four-scalar $\Box' = \Box$.

Wir zeigen nun, dass die retardierte Lösung A^μ_r manifest Lorentz-invariant ist. Wir behaupten

We now show that the retarded solution A^μ_r is manifestly Lorentz-invariant. We claim

$$A^\mu_\mathrm{r}(x) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4y\, j^\mu(y)\delta(\frac{1}{2}s^2)\theta(x^0-y^0) \tag{24.29}$$

$$s^2 = (x^\mu - y^\mu)(x_\mu - y_\mu) = c^2(t_y-t_x)^2 - (\mathbf{x}-\mathbf{y})^2 \tag{24.30}$$

$$\theta(x^0) = \begin{cases} 1 & x^0 > 0 \\ 0 & x^0 < 0 \end{cases} \tag{24.31}$$

Wir betrachten nun generell die Integration über eine δ-Funktion, die von einer Funktion f abhängt. Offensichtlich tragen nur die Nullstellen t_i von f bei,

We consider now generally the integration over a δ-function, which depends on a function f. Apparently only the zeroes t_i of f contribute,

$$\int g(t)\delta(f(t))\mathrm{d}t = \sum_i \int_{t_i-\epsilon}^{t_i+\epsilon} g(t)\delta(f(t))\mathrm{d}t \quad \begin{matrix}\text{mit}\\ \text{with}\end{matrix} \quad f(t_i) = 0. \tag{24.32}$$

Mit $z = f(t)$, $\mathrm{d}z = f'(t)\mathrm{d}t$ folgt dann

With $z = f(t)$, $\mathrm{d}z = f'(t)\mathrm{d}t$ one obtains

$$\int g(t)\delta(f(t))\mathrm{d}t = \sum_i \int_{-\epsilon f'(t_i)}^{\epsilon f'(t_i)} g(t_i)\delta(z)\frac{\mathrm{d}z}{f'(t_i)} = \sum_i \frac{g(t_i)}{|f'(t_i)|}. \tag{24.33}$$

Damit ergeben sich die Nullstellen in der δ-Funktion von (24.29) zu $t_y = t_x \pm |\mathbf{x}-\mathbf{y}|/c$ und die Ableitungen zu $f'(t_y) = c^2(t_y - t_x) = \pm c|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$, was

Thus the zeroes in the δ-function of (24.29) are $t_y = t_x \pm |\mathbf{x}-\mathbf{y}|/c$ and their derivatives are given by $f'(t_y) = c^2(t_y - t_x) = \pm c|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$, which yields

$$A^\mu_r(x) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4y\, j^\mu\delta(\frac{1}{2}s^2)\theta(t_x-t_y) = \int \mathrm{d}^3y \frac{1}{c|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} j^\mu(\mathbf{y}, t_x - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c}) \tag{24.34}$$

ergibt. Wegen $\theta(t_x - t_y)$ erhalten wir die retardierte Lösung. Sie ist in Übereinstimmung mit (21.14) und (21.15). Ersetzen wir die θ-Funktion durch $\theta(t_y - t_x)$, so ergibt sich die avancierte Lösung. Man beachte, dass sich das Vorzeichen der Zeitdifferenz längs des Lichtkegels unter eigentlichen Lorentz-Transformationen nicht ändert.

. The factor $\theta(t_x - t_y)$ yields the retarded solution. The solution is in agreement with (21.14) and (21.15). If we replace the θ-function by $\theta(t_y - t_x)$, then we obtain the advanced solution. Remember that the sign of the time difference does not change under proper Lorentz transformations.

25 Elektromagnetischer Feldtensor

25 Electromagnetic Field Tensor

25.a Feldtensor

Aus dem Viererpotential (A^μ) erhalten wir die Felder **E** und **B**,

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad}\Phi - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}, \tag{25.1}$$

zum Beispiel

$$B_1 = \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} = \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3, \quad E_1 = -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} = \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1. \tag{25.2}$$

Wir führen daher den elektromagnetischen Feldtensor ein

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}. \tag{25.3}$$

Er ist ein antisymmetrischer Vierertensor. Explizit lautet er

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{25.4}$$

25.b Maxwell-Gleichungen

25.b.α Die inhomogenen Gleichungen

Die Gleichung $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$ lässt sich ausdrücken

$$\partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \frac{4\pi}{c} j^0. \tag{25.5}$$

Aus der 1-Komponente von $\operatorname{rot}\mathbf{B} - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$ folgt

$$\frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^3} - \frac{\partial E_1}{\partial x^0} = \frac{4\pi}{c} j^1 \to \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} + \partial_0 F^{01} = \frac{4\pi}{c} j^1, \tag{25.6}$$

ähnlich für die anderen Komponenten. Diese vier Komponenten-Gleichungen lassen sich zusammenfassen zu

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu. \tag{25.7}$$

Setzen wir die Darstellung der Felder durch die Potentiale ein, (25.3), so folgt

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} j^\nu. \tag{25.8}$$

Mit der Bedingung für die Lorenz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$, (24.27) folgt dann

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu \tag{25.9}$$

25.b Maxwell's Equations

25.b.α The Inhomogeneous Equations

The equation $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$ reads

From the 1-component of $\operatorname{curl}\mathbf{B} - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$ one obtains

similarly for the other components. These four component-equations can be combined to

If we insert the representation of the fields by the potentials, (25.3), we obtain

Together with the condition for the Lorenz gauge $\partial_\mu A^\mu = 0$, (24.27) one obtains

in Übereinstimmung mit (24.26) und (24.28).

in agreement with (24.26) and (24.28).

25.b.β Die homogenen Gleichungen

Ähnlich kann man die homogenen MAXWELL-Gleichungen umschreiben. Aus $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ wird

$$\partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} = 0 \tag{25.10}$$

und aus $(\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}})_x = 0$ wird

$$-\partial^2 F^{30} - \partial^3 F^{02} - \partial^0 F^{23} = 0. \tag{25.11}$$

Diese Gleichungen lassen sich zusammenfassen zu

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0. \tag{25.12}$$

Man beachte, dass die Gleichung nur für $\lambda \neq \mu \neq \nu \neq \lambda$ nicht trivial ist. Sind zwei Indices gleich, so verschwindet die linke Seite identisch. Man kann diese Gleichungen auch mit Hilfe des dualen Feldtensors

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda} \tag{25.13}$$

ausdrücken. Dabei ist $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$ vollständig antisymmetrisch gegen Vertauschung der Indices. Das heißt, er ändert sein Vorzeichen, wenn zwei Indices vertauscht werden. Das impliziert, dass er verschwindet, wenn zwei Indices gleich sind. Er ist daher nur von Null verschieden, wenn alle vier Indices verschieden sind. Wir normieren ihn auf $\epsilon^{0123} = 1$. Damit hat man explizit

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{25.14}$$

und (25.12) lässt sich schreiben

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \tag{25.15}$$

Man überzeuge sich, dass ϵ ein invarianter Pseudotensor vierter Stufe ist, das heißt es gilt

$$\epsilon'^{\mu\nu\kappa\lambda} = \det(\Lambda)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}, \tag{25.16}$$

wobei $\det(\Lambda)$ gemäß der Diskussion nach (23.19) nur die Werte ± 1 annimmt und für eigentliche LORENTZ-Transformationen gleich $+1$ ist (23.21).

25.b.β The Homogeneous Equations

Similarly the homogeneous MAXWELL's equations can be written. From $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ one obtains

and $(\operatorname{curl}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}})_x = 0$ reads

These equations can be combined to

One observes that these equations are only non-trivial for $\lambda \neq \mu \neq \nu \neq \lambda$. If two indices are equal, then the left-hand side vanishes identically. One may represent the equations equally well by the dual field tensor

. Here $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$ is completely antisymmetric against interchange of the four indices. Thus it changes sign, if two of the indices are exchanged. This implies that it vanishes, if two indices are equal. It is only different from zero, if all four indices are different. It is normalized to $\epsilon^{0123} = 1$. Then one obtains explicitely

and (25.12) can be written

One should convince oneself that ϵ is an invariant pseudo-tensor of fourth order, i.e.

where $\det(\Lambda)$ takes only the values ± 1 according to the discussion after (23.19). For proper LORENTZ transformations it equals $+1$ (23.21).

25.c Transformation der elektrischen und magnetischen Felder

Da sich (∂^μ) und (A^ν) wie Vierer-Vektoren transformieren, gilt

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\kappa \Lambda^\nu{}_\lambda F^{\kappa\lambda} \tag{25.17}$$

25.c Transformation of the Electric and Magnetic Fields

Since (∂^μ) and (A^ν) transform like four-vectors, one has

für die Transformation des elektromagnetischen Feldes. Wählen wir speziell

for the transformation of the electromagnetic field. If we choose in particular

$$(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \tag{25.18}$$

so folgt

then one obtains

$$E'_1 = F'^{10} = \Lambda^1{}_{\kappa}\Lambda^0{}_{\lambda}F^{\kappa\lambda} = \gamma F^{10} - \beta\gamma F^{13} = \gamma(E_1 - \beta B_2), \tag{25.19}$$

also

thus

$$E'_1 = \gamma(E_1 - \frac{v}{c}B_2), \tag{25.20}$$

ähnlich

similarly

$$B'_1 = \gamma(B_1 + \frac{v}{c}E_2) \tag{25.21}$$

$$E'_2 = \gamma(E_2 + \frac{v}{c}B_1), \qquad B'_2 = \gamma(B_2 - \frac{v}{c}E_1) \tag{25.22}$$

$$E'_3 = E_3, \qquad B'_3 = B_3, \tag{25.23}$$

was wir auch zu

which can be combined to

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}, \qquad B'_{\parallel} = B_{\parallel}, \qquad \begin{matrix}\text{Komponente}\\ \text{component}\end{matrix} \parallel \mathbf{v} \tag{25.24}$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}), \qquad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}), \qquad \begin{matrix}\text{Komponenten}\\ \text{components}\end{matrix} \perp \mathbf{v} \tag{25.25}$$

zusammenfassen können.

.

25.d Felder einer gleichförmig bewegten Punktladung

Wir können daraus zum Beispiel die Felder einer Ladung, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$ bewegt, berechnen. Im Ruhesystem S' der Ladung, die im Ursprung ist, gilt

$$\mathbf{E}' = q\frac{\mathbf{r}'}{r'^3}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{0}. \tag{25.26}$$

Im System S gilt für die Ladung $x_q = y_q = 0$, $z_q = vt$. Wir drücken nun $\mathbf{r}'$ aus durch $\mathbf{r}$ und t und erhalten

25.d Fields of a Point Charge in Uniform Motion

From this we can determine the fields of a charge which moves with constant velocity $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$. In the rest system S' of the charge, which is supposed to be in the origin of S', one has

In the system S the coordinates of the charge are $x_q = y_q = 0$, $z_q = vt$. Now we express $\mathbf{r}'$ by $\mathbf{r}$ and t and obtain

$$\mathbf{E}' = \left(\frac{qx}{N}, \frac{qy}{N}, \frac{q\gamma(z-vt)}{N}\right), \tag{25.27}$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{0}, \tag{25.28}$$

$$N = r'^3 = (x^2 + y^2 + \gamma^2(z-vt)^2)^{3/2}. \tag{25.29}$$

Es folgt

It follows that

$$\left.\begin{aligned} E_1 = \gamma(E'_1 + \tfrac{v}{c}B'_2) = \tfrac{q\gamma x}{N} \\ E_2 = \gamma(E'_2 - \tfrac{v}{c}B'_1) = \tfrac{q\gamma y}{N} \\ E_3 = E'_3 = \tfrac{q\gamma(z-vt)}{N} \end{aligned}\right\} \mathbf{E} = \frac{q\gamma(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)}{N} \tag{25.30}$$

$$\left.\begin{array}{c} B_1 = \gamma(B'_1 - \frac{v}{c}E'_2) = -\frac{q\gamma\beta y}{N} \\ B_2 = \gamma(B'_2 + \frac{v}{c}E'_1) = \frac{q\gamma\beta x}{N} \\ B_3 = B'_3 = 0 \end{array}\right\} \mathbf{B} = \frac{q\gamma(\mathbf{v}\times\mathbf{r})}{cN}. \tag{25.31}$$

Flächen konstanten Ns sind in Bewegungsrichtung abgeplattete Rotations-Ellipsoide. Dabei ist kurze Halbachse / lange Halbachse = $1/\gamma = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, also eine Verkürzung, wie sie auch bei der Längenkontraktion auftritt.

Areas of constant N are oblate rotational ellipsoids. The ratio short half-axis / long half-axis is given by $1/\gamma = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, thus the same contraction as for the Lorentz contraction.

25.e Doppler-Effekt

Wir betrachten eine monochromatische ebene Welle

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\phi}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i\phi} \quad \begin{matrix}\text{mit}\\ \text{with}\end{matrix} \ \phi = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t. \tag{25.32}$$

Wir wissen, wie sich $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ und damit auch $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{B}_0$ transformieren. Es bleibt daher noch der Vierererskalar der Phase ϕ zu betrachten. Schreiben wir

$$(k^\mu) = (\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}), \tag{25.33}$$

so folgt

$$\phi = -k_\mu x^\mu \tag{25.34}$$

. Da (x^μ) ein beliebiger Vierervektor und ϕ ein Viererskalar sind, folgt, dass (k^μ) ein Vierervektor ist. Daher erhält man für die spezielle Lorentz-Transformation (25.18)

$$\omega' = ck'^0 = c\gamma(k^0 - \beta k^3) = \gamma(\omega - \beta c k^3), \quad k'^1 = k^1, \quad k'^2 = k^2, \quad k'^3 = \gamma(k^3 - \beta\frac{\omega}{c}). \tag{25.35}$$

Ist der Winkel zwischen z-Achse und Ausbreitungsrichtung θ, so gilt $k^3 = \frac{\omega}{c}\cos\theta$ und es folgt

$$\omega' = \omega\gamma(1 - \beta\cos\theta). \tag{25.36}$$

Ist daher $\mathbf{v}$ parallel beziehungsweise antiparallel zur Ausbreitungs-Richtung, so hat man die longitudinale Doppler-Verschiebung

$$\theta = 0: \quad \omega' = \omega\sqrt{\tfrac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{25.37}$$

$$\theta = \pi: \quad \omega' = \omega\sqrt{\tfrac{1+\beta}{1-\beta}}. \tag{25.38}$$

Ist dagegen $\theta = \pi/2$ beziehungsweise $\theta' = \pi/2$, so hat man die transversale Doppler-Verschiebung

$$\theta = \frac{\pi}{2}: \quad \omega' = \tfrac{\omega}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{25.39}$$

$$\theta' = \frac{\pi}{2}: \quad \omega' = \omega\sqrt{1-\beta^2}. \tag{25.40}$$

Dabei ist θ' der Winkel zwischen der z'-Achse und der Ausbreitungsrichtung in S'.

25.e Doppler Effect

We consider a monochromatic plane wave

(25.32)

We know, how $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ and thus $\mathbf{E}_0$ and $\mathbf{B}_0$ transform. Thus we are left with considering the phase ϕ which is a four-scalar. If we write

(25.33)

then

(25.34)

follows. Since (x^μ) is an arbitrary four-vector and ϕ is a four-scalar, it follows that (k^μ) has to be a four-vector. Thus one obtains for the special Lorentz transformation (25.18)

(25.35)

If the angle between z-axis and direction of propagation is θ, then $k^3 = \frac{\omega}{c}\cos\theta$ holds, and one obtains

(25.36)

Thus if $\mathbf{v}$ is parallel and antiparallel to the direction of propagation, resp., then one deals with the longitudinal Doppler shift

(25.37)

(25.38)

If however $\theta = \pi/2$ and $\theta' = \pi/2$, resp., then one deals with the transverse Doppler shift.

(25.39)

(25.40)

Here θ' is the angle between the z'-axis and the direction of propagation in S'.

26 Relativistische Mechanik

Einstein erkannte, dass die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und die sich daraus ergebende Lorentz-Transformation nicht auf die Elektrodynamik beschränkt ist, sondern allgemeine Gültigkeit in der Physik hat. Hier betrachten wir ihre Anwendung auf die Mechanik ausgehend von der Kraft auf Ladungen.

26.a Lorentz-Kraftdichte

Die Kraftdichte auf bewegte Ladungen lautet

$$\mathbf{k} = \rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{j}\times\mathbf{B}, \tag{26.1}$$

also zum Beispiel für die erste Komponente

$$k^1 = \rho E_1 + \frac{1}{c}(j^2B_3 - j^3B_2) = \frac{1}{c}(j^0F^{10} - j^2F^{12} - j^3F^{13}) = \frac{1}{c}j_\nu F^{1\nu}. \tag{26.2}$$

Man führt daher den Vierer-Vektor der Lorentz-Kraftdichte

$$k^\mu = \frac{1}{c}j_\nu F^{\mu\nu} \tag{26.3}$$

ein. Wir betrachten die zeitartige Komponente

$$k^0 = \frac{1}{c}j_\nu F^{0\nu} = \frac{1}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}. \tag{26.4}$$

Während die raumartigen Komponenten die mechanische Impulsänderung pro Zeit- und Volumen-Einheit angeben, gibt die zeitartige Komponente die pro Zeit und Volumen zugeführte Energie an

$$(k^\mu) = (\frac{1}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}, \mathbf{k}). \tag{26.5}$$

26.b Lorentz-Kraft auf eine Punktladung

Die Vierer-Stromdichte am Ort $\mathbf{x}$ einer Punktladung q am Ort $\mathbf{x}_\mathrm{q}$ ist

$$j^\nu(\mathbf{x}, t) = q\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{q}(t))v^\nu. \tag{26.6}$$

Daher ist die auf die Punktladung wirkende Kraft gegeben durch

$$K^\mu = \frac{q}{c}v_\nu F^{\mu\nu}. \tag{26.7}$$

Dies ist kein Vierer-Vektor, da (v^μ) kein Vierer-Vektor ist. Multiplizieren wir sie hingegen mit γ so erhält man einen Vierer-Vektor, die Minkowski-Kraft

$$\gamma K^\mu = \frac{q}{c}u_\nu F^{\mu\nu}. \tag{26.8}$$

26 Relativistic Mechanics

Einstein realized that the constance of light velocity in vacuum and the resulting Lorentz transformation is not restricted to electrodynamics, but is generally valid in physics. Here we consider its application to mechanics starting from the force on charges.

26.a Lorentz Force Density

The force density on moving charges reads

$$\mathbf{k} = \rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{j}\times\mathbf{B}, \tag{26.1}$$

that is e.g. for the first component

$$k^1 = \rho E_1 + \frac{1}{c}(j^2B_3 - j^3B_2) = \frac{1}{c}(j^0F^{10} - j^2F^{12} - j^3F^{13}) = \frac{1}{c}j_\nu F^{1\nu}. \tag{26.2}$$

Thus one introduces the four-vector of the Lorentz force density

$$k^\mu = \frac{1}{c}j_\nu F^{\mu\nu} \tag{26.3}$$

. We consider the time-like component

$$k^0 = \frac{1}{c}j_\nu F^{0\nu} = \frac{1}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}. \tag{26.4}$$

The time-like component gives the mechanical energy acquired per time and volume, whereas the space-like components give the rate of change of mechanic momentum per time and volume

$$(k^\mu) = (\frac{1}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}, \mathbf{k}). \tag{26.5}$$

26.b Lorentz Force Acting on a Point Charge

The four-current-density at $\mathbf{x}$ of a point charge q at $\mathbf{x}_\mathrm{q}$ reads

$$j^\nu(\mathbf{x}, t) = q\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{q}(t))v^\nu. \tag{26.6}$$

Thus the force acting on the point charge is given by

$$K^\mu = \frac{q}{c}v_\nu F^{\mu\nu}. \tag{26.7}$$

This is not a four-vector, since (v^μ) is not a four-vector. If we multiply it by γ then we obtain a four-vector, the Minkowski force

$$\gamma K^\mu = \frac{q}{c}u_\nu F^{\mu\nu}. \tag{26.8}$$

K ist der der Punktladung pro Zeiteinheit zugeführte Impuls, cK^0 die der Punktladung pro Zeiteinheit zugeführte Energie. Die Minkowski-Kraft ist dann der pro Eigenzeit zugeführte Impuls beziehungsweise die pro Eigenzeit zugeführte Energie durch c.

K is the momentum which is fed into the point charge per time unit, cK^0 is the power fed into it. The Minkowski force is the momentum and the energy divided by c, resp., fed into it per proper time.

26.c Energie und Impuls eines Massenpunktes

Da Impulsänderung und Energieänderung durch c einen Vierervektor bilden, erwarten wir, dass auch mechanischer Impuls und Energie durch c einen Vierervektor bilden

26.c Energy and Momentum of a Mass Point

We assume that also mechanical momentum and energy/c combine to a four-vector, since the change of momentum and energy divided by c are components of a four-vector

$$(G^\mu) = (\frac{1}{c}E, \mathbf{G}). \tag{26.9}$$

Im Ruhesystem S' erwarten wir $\mathbf{G}' = \mathbf{0}$, das heißt

In the rest system S' we expect $\mathbf{G}' = \mathbf{0}$ to hold, i.e.

$$(G'^\mu) = (\frac{1}{c}E_0, \mathbf{0}). \tag{26.10}$$

Im System S ergibt sich mit der speziellen Transformation (23.23) für $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$

In the system S the special transformation (23.23) yields for $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$

$$\mathbf{G} = \gamma\tfrac{v}{c^2}E_0\mathbf{e}_z = \gamma\mathbf{v}\frac{E_0}{c^2}, \tag{26.11}$$

$$E = cG^0 = c\gamma G'^0 = \gamma E_0. \tag{26.12}$$

Für Geschwindigkeiten klein gegen die Lichtgeschwindigkeit folgt

For velocities small in comparison to light-velocity one obtains

$$\mathbf{G} = \frac{E_0}{c^2}\mathbf{v}\Big(1 + \frac{v^2}{2c^2} + ...\Big). \tag{26.13}$$

In der Newtonschen Mechanik haben wir

In Newton's mechanics we have

$$\mathbf{G}_{\text{Newton}} = m\mathbf{v} \tag{26.14}$$

für einen Massenpunkt der Masse m. Für Geschwindigkeiten $v \ll c$ sollte der Impuls der Newtonschen und der relativistischen Mechanik übereinstimmen. Daraus folgt

for a mass point of mass m. For velocities $v \ll c$ the momentum of Newton's and of the relativistic mechanics should agree. From this one obtains

$$m = \frac{E_0}{c^2} \to E_0 = mc^2, \quad \mathbf{G} = m\gamma\mathbf{v}. \tag{26.15}$$

Für die Energie E folgt dann

Then one obtains for the energy E

$$E = mc^2\gamma = mc^2 + \frac{m}{2}v^2 + O(v^4/c^2). \tag{26.16}$$

Man ordnet dem Teilchen eine Ruheenergie $E_0 = mc^2$ zu. Bei kleinen Geschwindigkeiten kommt dazu der aus der Newtonschen Mechanik bekannte Beitrag $\frac{m}{2}v^2$ hinzu. Damit gilt

One associates a rest energy $E_0 = mc^2$ with the masses. At small velocities the contribution $\frac{m}{2}v^2$ known from Newtonian mechanics has to be added

$$G^\mu = mu^\mu. \tag{26.17}$$

Dieses G bezeichnet man als den Vierer-Impuls. Wir beobachten noch

This G is called four-momentum. We finally observe

$$G^\mu G_\mu = m^2u^\mu u_\mu = m^2c^2, \tag{26.18}$$

woraus

$$-\mathbf{G}^2 + \frac{1}{c^2}E^2 = m^2c^2, \quad E^2 = m^2c^4 + \mathbf{G}^2c^2 \tag{26.19}$$

folgt.

Solange die Teilchen erhalten bleiben, ist die Ruheenergie $E_0 = mc^2$ nicht beobachtbar. Bei der Umwandlung von Teilchen wird sie jedoch beobachtet, zum Beispiel beim Zerfall eines Teilchens in zwei andere

$$\Lambda^0 \to \pi^- + p^+. \tag{26.20}$$

Mit den Massen

$$m_\Lambda = 2182m_e, \quad m_\pi = 273m_e, \quad m_p = 1836m_e \tag{26.21}$$

folgt für das vor dem Zerfall ruhende Λ die Energie- und Impuls-Bilanz

$$m_\Lambda c^2 = \sqrt{m_\pi^2c^4 + \mathbf{G}_\pi^2c^2} + \sqrt{m_p^2c^4 + \mathbf{G}_p^2c^2} \tag{26.22}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{G}_\pi + \mathbf{G}_p. \tag{26.23}$$

Die Lösung des Gleichungssystems ergibt

$$|\mathbf{G}| = 4c\sqrt{M(m_\Lambda - M)(M - m_\pi)(M - m_p)}/m_\Lambda, \quad 2M = m_\Lambda + m_\pi + m_p. \tag{26.24}$$

Mit Hilfe der Vierervektoren kann man aus

$$G_\Lambda{}^\mu = G_\pi{}^\mu + G_p{}^\mu \tag{26.25}$$

nach G_p auflösen und quadrieren

$$G_p{}^\mu G_{p\mu} = (G_\Lambda^\mu - G_\pi^\mu)(G_{\Lambda\mu} - G_{\pi\mu}) = G_\Lambda^\mu G_{\Lambda\mu} + G_\pi^\mu G_{\pi\mu} - 2G_\Lambda^\mu G_{\pi\mu}. \tag{26.26}$$

Dies ergibt

$$m_p^2c^2 = m_\Lambda^2c^2 + m_\pi^2c^2 - 2m_\Lambda E_\pi \tag{26.27}$$

und damit

$$E_\pi = \frac{c^2}{2m_\Lambda}\left(m_\Lambda^2 + m_\pi^2 - m_p^2\right) \tag{26.28}$$

und analog

$$E_p = \frac{c^2}{2m_\Lambda}\left(m_\Lambda^2 - m_\pi^2 + m_p^2\right). \tag{26.29}$$

26.d Bewegungsgleichung

Wir schreiben nun noch explizit die Bewegungsgleichung für Massenpunkte auf

$$\frac{\mathrm{d}G^\mu}{\mathrm{d}t} = K^\mu. \tag{26.30}$$

Wie wir früher schon bemerkten, ist die Gleichung nicht manifest Lorentz-invariant. Wir haben jedoch

$$\frac{\mathrm{d}G^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}G^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{d}G^\mu}{\mathrm{d}t} = \gamma K^\mu, \tag{26.31}$$

26.d Equation of Motion

Finally we write down explicitely the equations of motion for point masses

As mentioned before these equations are not manifestly Lorentz-invariant. We have, however,

wobei die rechte Seite wieder die Minkowski-Kraft ist. In dieser Form ist die Bewegungsgleichung manifest Lorentz-invariant.

where the right-hand side is the Minkowski force. In this form the equations of motion are manifestly Lorentz invariant.

Falls eine Kraft die Ruheenergie eines Teilchens nicht ändert, so folgt aus

If the force does not change the rest energy of a particle, one obtains from

$$G^\mu G_\mu = m^2c^2 \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(G^\mu G_\mu) = 0 \to G^\mu \gamma K_\mu = 0 \to u^\mu K_\mu = 0. \tag{26.32}$$

Die Kraft ist orthogonal zur Weltgeschwindigkeit. Als Beispiel dient die Lorentz-Kraft

The force is orthogonal on the world velocity. An example is the Lorentz force

$$u_\mu K^\mu = \frac{q}{c}\gamma v_\mu v_\nu F^{\mu\nu} = 0, \tag{26.33}$$

da $F^{\mu\nu}$ antisymmetrisch ist. Wir beobachten

since $F^{\mu\nu}$ is antisymmetric. We observe

$$v^\mu K_\mu = -\mathbf{v}\cdot\mathbf{K} + \frac{c}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{26.34}$$

Die Gleichung (26.32) ist also äquivalent zu

Thus equation (26.32) is equivalent to

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{K}, \tag{26.35}$$

die die der Masse zugeführte Leistung angibt.

which yields the power fed into the kinetic energy of the mass.

27 Lagrange-Formulierung

27.a Lagrange-Funktion einer massiven Ladung im elektromagnetischen Feld

Wir behaupten, die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ einer Punktladung q der Masse m im elektromagnetischen Feld kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}} - q\Phi(\mathbf{r},t) + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\cdot\dot{\mathbf{r}} \\ &= -mc^2\sqrt{1+\frac{\dot{x}^\alpha\dot{x}_\alpha}{c^2}} - \frac{q}{c}A^\mu(x)\dot{x}_\mu. \end{aligned} \tag{27.1}$$

Die Wirkung I kann dann

$$I = \int \mathrm{d}t\mathcal{L} = -mc^2\int \mathrm{d}\tau - \frac{q}{c}\int \mathrm{d}tA^\mu\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}t} = \int \mathrm{d}\tau(-mc^2 - \frac{q}{c}A^\mu u_\mu), \tag{27.2}$$

das heißt als Vierer-Skalar geschrieben werden.

Wir überzeugen uns nun, dass hieraus die korrekten Bewegungsgleichungen folgen. Die Bewegungs-Gleichung lautet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_\alpha} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\alpha} = 0, \tag{27.3}$$

woraus mit

$$-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_\alpha} = \frac{m\dot{x}^\alpha}{\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}}} + \frac{q}{c}A^\alpha(\mathbf{r}(t),t) = G^\alpha + \frac{q}{c}A^\alpha \tag{27.4}$$

dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{G} + \frac{q}{c}\dot{\mathbf{A}} + \frac{q}{c}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} + q\nabla\Phi - \frac{q}{c}\nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) = 0 \tag{27.5}$$

folgt. Man beachte, dass in $\dot{\mathbf{A}}$ nur die partielle Zeit-Ableitung von $\mathbf{A}$ steckt, daher haben wir $\mathrm{d}\mathbf{A}/\mathrm{d}t = \dot{\mathbf{A}} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}$. Durch geeignetes Zusammenfassen der Beiträge folgt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{G} + q(\nabla\Phi + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}) - \frac{q}{c}\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A}) &= 0 &(27.6)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{G} - q\mathbf{E} - \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} &= 0. &(27.7)\end{aligned}$$

Also liefert die obige Lagrange-Funktion tatsächlich die korrekte Bewegungsgleichung.

27 Lagrangian Formulation

27.a Lagrangian of a Massive Charge in the Electromagnetic Field

We claim that the Lagrangian $\mathcal{L}$ of a point charge q of mass m in an electromagnetic field can be written

Then the action I can be written

that is as a four-scalar.

Now we show that this Lagrangian yields the correct equations of motion

from which by use of

one finally obtains

. Note that $\dot{\mathbf{A}}$ contains only the partial time-derivative of $\mathbf{A}$, thus we have $\mathrm{d}\mathbf{A}/\mathrm{d}t = \dot{\mathbf{A}} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}$. By suitable combination of the contributions one obtains

Thus the Lagrangian given above yields the correct equation of motion.

27.b Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes

Die Lagrange-Dichte L des elektromagnetischen Feldes eines Systems von Ladungen setzt sich aus drei Anteilen zusammen

$$L = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{c}A^\mu j_\mu + L_{\text{mech}}. \tag{27.8}$$

Der mechanische Anteil ist für Punktladungen der Masse m_i

$$L_{\text{mech}} = -\sum_i m_i c^3 \int d\tau \delta^4(x - x_i(\tau)), \tag{27.9}$$

der nach Integration über d^4x den entsprechenden Anteil der Wirkung I in (27.1) ergibt. Der zweite Anteil in (27.8) beschreibt die Wechselwirkung zwischen dem Feld und der Ladung. Integration dieses Anteils für Punktladungen unter Verwendung von

$$j_\mu(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \frac{dx_{i,\mu}}{dt}\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \tag{27.10}$$

ergibt den entsprechenden Anteil in (27.1). Der erste Anteil ist der Beitrag des freien Feldes. Dass er die korrekten Maxwell-Gleichungen ergibt, werden wir unten nachprüfen. Die Wirkung selbst ergibt sich zu

$$I = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x L(x) = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x L(\mathbf{x}, t) = \int \mathrm{d}t \mathcal{L}(t), \quad \mathcal{L}(t) = \int \mathrm{d}^3x L(\mathbf{x}, t). \tag{27.11}$$

Die Wirkung muss nun extremal unter Variation der Felder A sein. Dabei betrachten wir F als Funktion von A (25.3), $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Dann ergibt die Variation bezüglich A

$$\begin{aligned}
\delta L &= -\frac{1}{8\pi}F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}j_\nu \delta A^\nu && (27.12)\\
\delta F^{\mu\nu} &= \delta(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu && (27.13)\\
F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} &= F_{\mu\nu}\partial^\mu \delta A^\nu - F_{\mu\nu}\partial^\nu \delta A^\mu = 2F_{\mu\nu}\partial^\mu \delta A^\nu && (27.14)\\
\delta L &= -\frac{1}{4\pi}F_{\mu\nu}\partial^\mu \delta A^\nu - \frac{1}{c}j_\nu \delta A^\nu. && (27.15)
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Variation der Wirkung nach A

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int \mathrm{d}^4x \Big(-\frac{1}{4\pi c}F_{\mu\nu}\partial^\mu \delta A^\nu - \frac{1}{c^2}j_\nu \delta A^\nu \Big)\\
&= -\int \mathrm{d}^4x \frac{1}{4\pi c}\partial^\mu (F_{\mu\nu}\delta A^\nu) + \int \mathrm{d}^4x \Big(\frac{1}{4\pi c}\partial^\mu F_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2}j_\nu \Big)\delta A^\nu. && (27.16)
\end{aligned}$$

Der erste Term der zweiten Zeile ist ein Oberflächen-Term (im vier-dimensionalen Raum). Aus dem zweiten Term folgen die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (25.7)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}j^\nu. \tag{27.17}$$

27.b Lagrangian Density of the Electromagnetic Field

The Lagrangian density L of the electromagnetic field of a system of charges consists of three contributions

$$L = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{c}A^\mu j_\mu + L_{\text{mech}}. \tag{27.8}$$

The mechanical part for point charges of mass m_i reads

$$L_{\text{mech}} = -\sum_i m_i c^3 \int d\tau \delta^4(x - x_i(\tau)), \tag{27.9}$$

which yields after integration over d^4x the corresponding contribution to the action I given in (27.1). The second contribution in (27.8) describes the interaction between field and charge. Integration of this contribution for point charges using

$$j_\mu(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \frac{dx_{i,\mu}}{dt}\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \tag{27.10}$$

yields the corresponding contribution in (27.1). The first contribution is that of the free field. Below we will see that it yields Maxwell's equations correctly. The action itself reads

$$I = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x L(x) = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x L(\mathbf{x}, t) = \int \mathrm{d}t \mathcal{L}(t), \quad \mathcal{L}(t) = \int \mathrm{d}^3x L(\mathbf{x}, t). \tag{27.11}$$

The action has to be extremal if the fields A are varied. There we have to consider F as function of A (25.3), $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Then the variation with respect to A yields

$$\begin{aligned}
\delta L &= -\frac{1}{8\pi}F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}j_\nu \delta A^\nu && (27.12)\\
\delta F^{\mu\nu} &= \delta(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu && (27.13)\\
F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} &= F_{\mu\nu}\partial^\mu \delta A^\nu - F_{\mu\nu}\partial^\nu \delta A^\mu = 2F_{\mu\nu}\partial^\mu \delta A^\nu && (27.14)\\
\delta L &= -\frac{1}{4\pi}F_{\mu\nu}\partial^\mu \delta A^\nu - \frac{1}{c}j_\nu \delta A^\nu. && (27.15)
\end{aligned}$$

Thus the variation of the action with respect to A is

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int \mathrm{d}^4x \Big(-\frac{1}{4\pi c}F_{\mu\nu}\partial^\mu \delta A^\nu - \frac{1}{c^2}j_\nu \delta A^\nu \Big)\\
&= -\int \mathrm{d}^4x \frac{1}{4\pi c}\partial^\mu (F_{\mu\nu}\delta A^\nu) + \int \mathrm{d}^4x \Big(\frac{1}{4\pi c}\partial^\mu F_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2}j_\nu \Big)\delta A^\nu. && (27.16)
\end{aligned}$$

The first term of the second line is a surface-term (in four dimensions). From the second term one concludes Maxwell's inhomogeneous equations (25.7)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}j^\nu. \tag{27.17}$$

Die homogenen Maxwell-Gleichungen sind bereits durch die Darstellung $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\nu$ erfüllt.

Generell erhält man für eine Lagrange-Dichte, die von einem Feld (A^μ) und deren Ableitungen abhängt, durch Variation

Maxwell's homogeneous equations are already fulfilled due to the representation $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\nu$.

Generally one obtains for a Lagrangian density, which depends on a field (A^μ) and its derivatives by variation

$$\begin{aligned} c\delta I &= \int \mathrm{d}^4x \delta L(x) \\ &= \int \mathrm{d}^4x \left(\frac{\delta L}{\delta A^\nu(x)} \delta A^\nu(x) + \frac{\delta L}{\delta \partial^\mu A^\nu(x)} \partial^\mu \delta A^\nu(x) \right) \\ &= \int \mathrm{d}^4x \partial^\mu \left(\frac{\delta L}{\delta \partial^\mu A^\nu(x)} \delta A^\nu(x) \right) + \int \mathrm{d}^4x \left(\frac{\delta L}{\delta A^\nu(x)} - \partial^\mu \left(\frac{\delta L}{\delta \partial^\mu A^\nu(x)} \right) \right) \delta A^\nu(x). \end{aligned} \tag{27.18}$$

Es ist üblich, die partiellen Ableitungen von L nach A beziehungsweise ∂A mit $\delta L/\delta ...$ zu bezeichnen. Da die Variation verschwinden muss, folgen allgemein die Bewegungsgleichungen

Usually one denotes the partial derivatives of L with respect to A and ∂A by $\delta L/\delta ....$ Since the variation has to vanish, one obtains in general the equations of motion

$$\partial^\mu \left(\frac{\delta L}{\delta \partial^\mu A^\nu(x)} \right) - \frac{\delta L}{\delta A^\nu(x)} = 0. \tag{27.19}$$

Dies ist die Verallgemeinerung der Lagrangeschen Bewegungsgleichung (27.3) auf Felder. Neben der Zeitableitung von $\delta L/\delta \dot{A}^\nu$ treten auch die räumlichen Ableitungen von $\delta L/\delta \nabla A^\nu$ auf.

This is the generalization of Lagrange's equations of motion (27.3) for fields. There appear derivatives of $\delta L/\delta \nabla A^\nu$ with respect to the space variables besides the time-derivatives of $\delta L/\delta \dot{A}^\nu$.

28 Energie-Impuls-Tensor und Erhaltungsgrößen

28.a Der Tensor

Im Abschnitt 15.b hatten wir aus der Dichte der Lorentz-Kraft einen Erhaltungssatz für den Impuls des elektromagnetischen Feldes "im Vakuum", das heißt ohne Berücksichtigung zusätzlicher Beiträge in Materie hergeleitet

$$-\mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}_s - \frac{\partial}{\partial x^\beta}T^{\alpha\beta}\mathbf{e}^\alpha, \tag{28.1}$$

$$\mathbf{g}_s = \frac{1}{4\pi c}\mathbf{E}\times\mathbf{B}, \tag{28.2}$$

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\Big(E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta\Big) - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{8\pi}\Big(E^2+B^2\Big). \tag{28.3}$$

Als nullte Komponente müssen wir die Energiedichte betrachten. Für diese hatten wir in Abschnitt 15.a gefunden

$$-k^0 = -\frac{1}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{c}\operatorname{div}\mathbf{S} + \frac{1}{c}\dot{u} \tag{28.4}$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B} \tag{28.5}$$

$$u = \frac{1}{8\pi}\Big(E^2+B^2\Big). \tag{28.6}$$

Wir fassen zusammen

$$-k^\mu = -\partial_\nu T^{\mu\nu} \tag{28.7}$$

mit dem elektromagnetischen Energie-Impuls-Tensor

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -u & -\frac{1}{c}S_1 & -\frac{1}{c}S_2 & -\frac{1}{c}S_3 \\ -cg_{s1} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ -cg_{s2} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ -cg_{s3} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}. \tag{28.8}$$

Dieser Energie-Impuls-Tensor setzt sich also zusammen aus der Energiedichte u, dem Poynting-Vektor (Energiestromdichte) $\mathbf{S}$, der Impulsdichte $\mathbf{g}$ und dem Spannungstensor T.
Man beobachtet, dass $T^{\mu\nu}$ symmetrisch ist, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, da $T_{\alpha\beta}$ symmetrisch ist und $c\mathbf{g}_s = \frac{1}{c}\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ gilt. Man prüft leicht nach, dass

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\Big(-F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^\kappa{}_\lambda F^\lambda{}_\kappa\Big) \tag{28.9}$$

gilt, entweder durch explizites Auswerten und Vergleich oder aus

$$k^\mu = \frac{1}{c}j_\lambda F^{\mu\lambda} = \frac{1}{4\pi}(\partial^\nu F_{\nu\lambda})F^{\mu\lambda} = \frac{1}{4\pi}\partial^\nu(F_{\nu\lambda}F^{\mu\lambda}) - \frac{1}{4\pi}F_{\nu\lambda}\partial^\nu F^{\mu\lambda}. \tag{28.10}$$

28 Energy Momentum Tensor and Conserved Quantities

28.a The Tensor

In section 15.b we have calculated the conservation law for momentum from the density of the Lorentz force in vacuo that is without considering additional contributions due to matter

The zeroth component is the energy-density. For this density we have obtainded in section 15.a

We summarize

with the electromagnetic energy-momentum tensor

This energy-momentum tensor is built up from the energy density u, the Poynting vector (density of energy current) $\mathbf{S}$, the momentum density $\mathbf{g}$, and the stress tensor T.
One observes that $T^{\mu\nu}$ is symmetric, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, since $T_{\alpha\beta}$ is symmetric and $c\mathbf{g}_s = \frac{1}{c}\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ holds. One easily checks that

holds either by explicit calculation and comparison or from

Nun folgt aus

From

$$F_{\nu\lambda}\Big(\partial^\nu F^{\mu\lambda} + \partial^\mu F^{\lambda\nu} + \partial^\lambda F^{\nu\mu}\Big) = 0 \tag{28.11}$$

die Beziehung

one obtains the relation

$$\frac{1}{2}\partial^\mu\Big(F_{\nu\lambda}F^{\lambda\nu}\Big) + 2F_{\nu\lambda}\partial^\nu F^{\mu\lambda} = 0, \tag{28.12}$$

so dass wir schließlich

so that finally we obtain

$$\begin{aligned} k^\mu &= \frac{1}{4\pi}\partial^\nu\Big(F_{\nu\lambda}F^{\mu\lambda}\Big) + \frac{1}{16\pi}\partial^\mu\Big(F_{\nu\lambda}F^{\lambda\nu}\Big) \\ &= \frac{1}{4\pi}\partial_\nu\Big(-F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^\kappa{}_\lambda F^\lambda{}_\kappa\Big) \end{aligned} \tag{28.13}$$

erhalten. $T^{\mu\nu}$ ist ein symmetrischer Vierertensor, das heißt er transformiert sich gemäß

. $T^{\mu\nu}$ is a symmetric four-tensor, i.e. it transforms according to

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\kappa\Lambda^\nu{}_\lambda T^{\kappa\lambda}. \tag{28.14}$$

28.b Erhaltungssätze

Wir gehen aus von einem Vierervektorfeld ($j^\mu(x)$). In jedem dreidimensionalen raumartigen Unterraum R des vierdimensionalen Raums sei (j^μ) nur in einem endlichen Bereich von Null verschieden. Mit raumartig bezeichnen wir einen Raum, wenn je zwei Punkte des Raumes einen raumartigen Abstand haben. Eine Weltlinie, das heißt eine Linie, die überall Unterlichtgeschwindigkeit hat, durchstößt einen raumartigen Unterraum in genau einem Punkt. Trägt man den Unterraum als $x^0(\mathbf{r})$ auf, so ist die Steigung stets kleiner 1. Für die Weltlinie ist die Steigung dagegen überall größer 1. Die Punkte konstanter Zeit eines Inertialsystems bilden zum Beispiel einen raumartigen Raum. Wir integrieren nun die Divergenz $\partial_\mu j^\mu$ über das vierdimensionale Volumen Ω, das von zwei raumartigen Räumen R und R' begrenzt wird und erhalten

28.b Conservation Laws

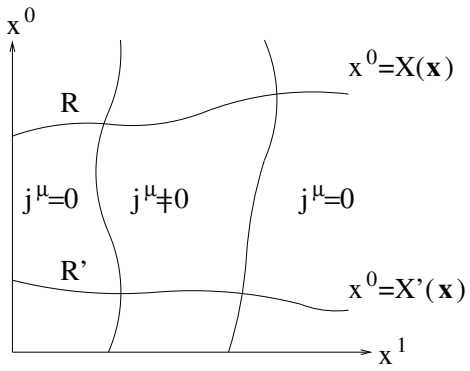
We start out from a four-vector field ($j^\mu(x)$. In any three-dimensional space-like subspace R of the four-dimensional space be (j^μ) different from zero only in a finite region. We call a space space-like if any two points in this space have a space-like distance. A world-line, i.e. a line which everywhere has a velocity below light-speed hits a space-like subspace in exactly one point. If one plots the subspace as a function $x^0(\mathbf{r})$ then its slope is everywhere less then 1. The slope of the world-line is everywhere larger than 1. For example, the points of constant time in an inertial frame constitute such a space-like space. We now integrate the divergence $\partial_\mu j^\mu$ over the four-dimensional volume Ω, which is bounded by two space-like spaces R and R' and obtain

$$\int_\Omega \mathrm{d}^4x\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = \int_R \mathrm{d}^3x\Big(j^0 - \frac{\partial X}{\partial x^\alpha}j^\alpha\Big) - \int_{R'}\mathrm{d}^3x\Big(j^0 - \frac{\partial X'}{\partial x^\alpha}j^\alpha\Big). \tag{28.15}$$

Den Beitrag $\partial_\mu j^\mu$ integriert man einfach in x^μ-Richtung bis zur Begrenzung R beziehungsweise R' oder bis j^μ verschwindet. Für die 0-Komponente ergibt das unmittelbar den angegebenen Beitrag. Für die 1-Komponente bleibt zunächst das Integral $\pm\int \mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 j^1$ an der Berandung.

The contribution $\partial_\mu j^\mu$ is integrated in x^μ-direction until the boundary R or R' or until j^μ vanishes. This yields immediately the contribution given for the 0-component. For the 1-component one obtains initially the integral $\pm\int \mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 j^1$ at the boundary.

Die $\mathrm{d}x^0$-Integration lässt sich aber in eine $\mathrm{d}x^1 \frac{\partial X}{\partial x^1}$-Integration umformen. Wächst (fällt) $X = x^0$ auf der Berandung mit x^1, so handelt es sich um die untere (obere) Grenze der Integration. Daher das Minus-Zeichen vor $\frac{\partial X}{\partial x^1}$. Entsprechendes gilt für die anderen Raumkomponenten.



The $\mathrm{d}x^0$-integration may be transformed into an $\mathrm{d}x^1 \frac{\partial X}{\partial x^1}$-integration. If $X = x^0$ increases (decreases) at the boundary with x^1, then this is the lower (upper) limit of the integration. Thus we have a minus-sign in front of $\frac{\partial X}{\partial x^1}$, similarly for the other space-components.

Wir können uns auch noch davon überzeugen, dass

We may convince ourselves that

$$\int_R \mathrm{d}^3x \Big(j^0 - \frac{\partial X}{\partial x^\alpha} j^\alpha \Big) = \int_R \mathrm{d}V_\mu j^\mu \tag{28.16}$$

mit $(\mathrm{d}V_\mu) = (1, -\nabla X)\mathrm{d}^3x$ ein Viererskalar ist. Führen wir nämlich einen Vierervektor $(\bar{j}^\mu)$ so ein, dass

with $(\mathrm{d}V_\mu) = (1, -\nabla X)\mathrm{d}^3x$ is a four-scalar. If we introduce a four-vector $(\bar{j}^\mu)$, so that

$$\bar{j}^\mu = \begin{cases} j^\mu & \text{in } R \\ 0 & \text{in } R' \end{cases}, \tag{28.17}$$

so folgt

then it follows that

$$\int_R \mathrm{d}V_\mu j^\mu = \int_R \mathrm{d}V_\mu \bar{j}^\mu = \int_\Omega \mathrm{d}^4x \frac{\partial \bar{j}^\mu}{\partial x^\mu}, \tag{28.18}$$

wobei letzteres Integral offensichtlich ein Viererskalar ist, da sowohl d^4x wie auch die Vierer-Divergenz von $\bar{j}$ ein Viererskalar ist. Da aber das Feld (j^μ) beliebig ist, gilt für jedes infinitesimale $(\mathrm{d}V_\mu)$ aus R, dass $\mathrm{d}V_\mu j^\mu$ ein Viererskalar ist. Da (j^μ) Vierervektor ist, muss auch $(\mathrm{d}V^\mu)$ Vierervektor sein. Damit können wir (28.16) schreiben als

where the last integral is obviously a four-scalar, since both d^4x and the four-divergence of $\bar{j}$ is a four-scalar. Since the field (j^μ) is arbitrary, we find that $\mathrm{d}V_\mu j^\mu$ has to be a four-scalar for each infinitesimal $(\mathrm{d}V_\mu)$ in R. Since (j^μ) is a four-vector, $(\mathrm{d}V^\mu)$ must be a four-vector, too. Then (28.16) reads

$$\int_\Omega \mathrm{d}^4x \partial_\mu j^\mu = \int_R \mathrm{d}V_\mu j^\mu - \int_{R'} \mathrm{d}V_\mu j^\mu. \tag{28.19}$$

Dies ist der Gaussssche Satz in vier Dimensionen.

This is the divergence theorem in four dimensions.

Wir ziehen nun Folgerungen daraus:

From this we conclude:

28.b.α Ladung

(j^μ) sei der Viererstrom der Ladungsdichte. Aus der Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ folgt für jedes raumartige R der gleiche Wert

28.b.α Charge

(j^μ) be the four-vector of the current density. One obtains from the equation of continuity $\partial_\mu j^\mu = 0$ for each space-like R the same result

$$q = \frac{1}{c} \int_R \mathrm{d}V_\mu j^\mu \tag{28.20}$$

für die Ladung, da das Integral der Divergenz über Ω in (28.19) verschwindet (da der Integrand verschwindet), und da man immer das gleiche R' wählen kann. Die Ladung ist daher eine Erhaltungsgröße, genauer gesagt haben wir konsistentes Verhalten gefunden, denn wir haben bereits in Unterabschnitt 24.c angenommen, dass die Ladung erhalten ist. Neu ist, dass ihre Bestimmung in einem beliebigen dreidimensionalen Unterraum möglich ist.

for the charge, since the integral of the divergence in Ω in (28.19) vanishes, (since the integrand vanishes) and since one may always choose the same R'. Thus the charge is a conserved quantity, more precisely we have found a consistent behaviour, since we already have assumed in subsection 24.c that charge is conserved. New is that it can be determined in an arbitrary space-like three-dimensional space.

28.b.β Energie und Impuls

Aus

$$k^\mu = \partial_\nu T^{\mu\nu} \tag{28.21}$$

folgt

$$\int_\Omega \mathrm{d}^4 x k^\mu = \int_R \mathrm{d}V_\nu T^{\mu\nu} - \int_{R'} \mathrm{d}V_\nu T^{\mu\nu}. \tag{28.22}$$

In einem ladungsfreien Raum ($k^\mu = 0$), das heißt für freie elektromagnetische Wellen gilt dann, dass die Komponenten des Strahlungs-Impulses

$$G_\mathrm{s}^\mu = -\frac{1}{c}\int_R \mathrm{d}V_\nu T^{\mu\nu} \tag{28.23}$$

unabhängig von R sind. Sie sind also erhalten. Es sei nun (b_μ) ein beliebiger konstanter Vierervektor. Dann ist $b_\mu T^{\mu\nu}$ ein Vierervektor und $\partial_\nu(b_\mu T^{\mu\nu}) = 0$. Damit wird dann $b_\mu G_\mathrm{s}^\mu$ zum Viererskalar und G_s^μ ist ein Vierervektor.

Sind nun im Vierervolumen Ω Ladungen, so gilt

$$G_\mathrm{s}^\mu(R) = -\frac{1}{c}\int_\Omega \mathrm{d}^4 x k^\mu + G_\mathrm{s}^\mu(R'). \tag{28.24}$$

Für Punktladungen q_i hat man (26.7, 26.30)

$$\frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4 x k^\mu = \sum_i \int \mathrm{d}t K_i^\mu = \sum_i \int \mathrm{d}t \dot{G}_i^\mu = \sum_i (G_i^\mu(R) - G_i^\mu(R')). \tag{28.25}$$

Dabei ist $G_i^\mu(R) = m_i u_i^\mu(R)$ der Vierer-Impuls der Ladung #i an der Stelle, an der die Weltlinie der Ladung den Unterraum R durchstößt. Damit ist

$$G^\mu = G_\mathrm{s}^\mu(R) + \sum_i G_i^\mu(R) \tag{28.26}$$

der erhaltene Vierer-Impuls.

28.b.γ Drehimpuls und Schwerpunktsbewegung

Aus (28.7) folgt

$$\partial_\nu\left(x^\lambda T^{\mu\nu} - x^\mu T^{\lambda\nu}\right) = x^\lambda k^\mu - x^\mu k^\lambda + T^{\mu\lambda} - T^{\lambda\mu}. \tag{28.27}$$

28.b.β Energy and Momentum

From

$$k^\mu = \partial_\nu T^{\mu\nu} \tag{28.21}$$

one obtains

$$\int_\Omega \mathrm{d}^4 x k^\mu = \int_R \mathrm{d}V_\nu T^{\mu\nu} - \int_{R'} \mathrm{d}V_\nu T^{\mu\nu}. \tag{28.22}$$

In a charge-free space ($k^\mu = 0$), i.e. for free electromagnetic waves one finds that the components of the momentum of radiation

$$G_\mathrm{s}^\mu = -\frac{1}{c}\int_R \mathrm{d}V_\nu T^{\mu\nu} \tag{28.23}$$

are independent of R. Thus they are conserved. Now be (b_μ) an arbitrary but constant four-vector. Then $b_\mu T^{\mu\nu}$ is a four-vector and $\partial_\nu(b_\mu T^{\mu\nu}) = 0$. Then $b_\mu G_\mathrm{s}^\mu$ is a four-scalar and G_s^μ is a four-vector.

If there are charges in the four-volume Ω, then one obtains.

$$G_\mathrm{s}^\mu(R) = -\frac{1}{c}\int_\Omega \mathrm{d}^4 x k^\mu + G_\mathrm{s}^\mu(R'). \tag{28.24}$$

For point-charges q_i one has (26.7, 26.30)

$$\frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4 x k^\mu = \sum_i \int \mathrm{d}t K_i^\mu = \sum_i \int \mathrm{d}t \dot{G}_i^\mu = \sum_i (G_i^\mu(R) - G_i^\mu(R')). \tag{28.25}$$

Here $G_i^\mu(R) = m_i u_i^\mu(R)$ is the four-momentum of the charge #i at the point where its worldline hits the three-dimensional space R. Then

$$G^\mu = G_\mathrm{s}^\mu(R) + \sum_i G_i^\mu(R) \tag{28.26}$$

is the conserved four-momentum.

28.b.γ Angular Momentum and Movement of Center of Mass

Eq. (28.7) yields

$$\partial_\nu\left(x^\lambda T^{\mu\nu} - x^\mu T^{\lambda\nu}\right) = x^\lambda k^\mu - x^\mu k^\lambda + T^{\mu\lambda} - T^{\lambda\mu}. \tag{28.27}$$

Da der Tensor T symmetrisch ist, kürzen sich die beiden letzten Terme weg. Wir führen den Tensor

Since the tensor T is symmetric, the last two terms cancel. We introduce the tensor

$$M_{\mathrm{s}}^{\lambda\mu}(R) = -\frac{1}{c}\int_R \mathrm{d}V_\nu (x^\lambda T^{\mu\nu} - x^\mu T^{\lambda\nu}) \tag{28.28}$$

ein. Er ist antisymmetrisch $M_{\mathrm{s}}^{\lambda\mu} = -M_{\mathrm{s}}^{\mu\lambda}$. Auf Grund von (28.19) gilt

. It is antisymmetric $M_{\mathrm{s}}^{\lambda\mu} = -M_{\mathrm{s}}^{\mu\lambda}$. Due to (28.19) one has

$$M_{\mathrm{s}}^{\lambda\mu}(R) = -\frac{1}{c}\int_\Omega \mathrm{d}^4x\left(x^\lambda k^\mu - x^\mu k^\lambda\right) + M_{\mathrm{s}}^{\lambda\mu}(R'). \tag{28.29}$$

Für Punktladungen erhält man

For point-charges one obtains

$$\frac{1}{c}\int_\Omega \mathrm{d}^4x\left(x^\lambda k^\mu - x^\mu k^\lambda\right) = \sum_i \int \mathrm{d}t\left(x_i^\lambda K_i^\mu - x_i^\mu K_i^\lambda\right) = \sum_i \int \mathrm{d}t \frac{d}{dt}\left(x_i^\lambda G_i^\mu - x_i^\mu G_i^\lambda\right), \tag{28.30}$$

da $\dot{x}^\lambda G^\mu = \dot{x}^\mu G^\lambda$. Daher ist

since $\dot{x}^\lambda G^\mu = \dot{x}^\mu G^\lambda$. Therefore

$$M^{\lambda\mu}(R) = M_{\mathrm{s}}^{\lambda\mu}(R) + M_{\mathrm{m}}^{\lambda\mu}(R) \tag{28.31}$$

mit dem mechanischen Anteil

including the mechanical contribution

$$M_{\mathrm{m}}^{\lambda\mu}(R) = \sum_i \left(x_i^\lambda G_i^\mu - x_i^\mu G_i^\lambda\right)\Big|_R \tag{28.32}$$

eine Erhaltungsgröße, das heißt $M^{\lambda\mu}(R)$ ist unabhängig von der Wahl von R. Zugleich ist $(M^{\lambda\mu})$ ein Vierertensor.

is a conserved quantity, i.e. $M^{\lambda\mu}(R)$ is independent of the choice of R. Simultaneously $(M^{\lambda\mu})$ is a four-tensor.

Es bleibt noch die Bedeutung von M zu bestimmen. Hierzu betrachten wir M in dem dreidimensionalen Raum R, der durch die konstante Zeit t im Inertialsystem S gegeben ist. Wir haben dann

Finally we have to determine the meaning of M. For this purpose we consider M in the three-dimensional space R given by constant time t for a system of inertia S. Then we have

$$M^{\lambda\mu} = -\frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3x\left(x^\lambda T^{\mu 0} - x^\mu T^{\lambda 0}\right) + \sum_i \left(x_i^\lambda G_i^\mu - x_i^\mu G_i^\lambda\right) \tag{28.33}$$

Wir betrachten zunächst die raumartigen Komponenten

First we consider the space-like components

$$M^{\alpha\beta} = \int \mathrm{d}^3x\left(x^\alpha g_{\mathrm{s}}^\beta - x^\beta g_{\mathrm{s}}^\alpha\right) + \sum_i \left(x_i^\alpha G_i^\beta - x_i^\beta G_i^\alpha\right). \tag{28.34}$$

Dies ist für $\alpha \neq \beta$ eine Komponente des Drehimpulses $\mathbf{L}$, nämlich $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}L_\gamma$. Wir haben damit die Erhaltung des Drehimpulses gefunden.

This is for $\alpha \neq \beta$ a component of the angular momentum $\mathbf{L}$, namely $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}L_\gamma$. Thus we have found the conservation of angular momentum.

Ist eine Komponente zeitartig, so erhält man

If one component is time-like then one finds

$$M^{0\alpha} = ct\Big(\int \mathrm{d}^3x g_s^\alpha + \sum_i G_i^\alpha\Big) - \frac{1}{c}\Big(\int \mathrm{d}^3x x^\alpha u + \sum_i x_i^\alpha E_i\Big). \tag{28.35}$$

Der erste Beitrag stellt ct multipliziert mit dem Gesamtimpuls dar. Der zweite Beitrag ist die Summe aller Energien dividiert durch c multipliziert mit der Ortskoordinate x^α. Man kann diesen zweiten Beitrag als den Energie-Schwerpunkt (tatsächlich die α-Komponente davon) multipliziert mit der Gesamtenergie dividiert durch c auffassen. Da Gesamtimpuls und Energie konstant sind, heißt das, dass sich der Energie-Schwerpunkt mit der konstanten Geschwindigkeit $c^2\frac{\text{Gesamtimpuls}}{\text{Gesamtenergie}}$ bewegt. Für nichtrelativistische Geschwindigkeiten reduziert sich der mechanische Anteil auf

The first contribution is ct multiplied by the total momentum. The second contribution is the sum of all energies times their space-coordinates x^α divided by c. This second contribution can be considered as the center of energy (actually its α-component) multiplied by the total energy divided by c. Since total momentum and total energy are constant, one concludes that the center of energy moves with the constant velocity $c^2\frac{\text{total momentum}}{\text{total energy}}$. For non-relativistic velocities the mechanical part of the energy reduces to

$$M_{\mathrm{m}}^{0\alpha} = c\left(t\sum_i G_i^\alpha - \sum_i m_i x_i^\alpha\right). \tag{28.36}$$

Die Erhaltung dieser Größe beinhaltet die gleichförmige Bewegung des Massenschwerpunkts mit der Geschwindigkeit Gesamtimpuls durch Gesamtmasse. Relativistisch geht das in die gleichförmige Bewegung des Energieschwerpunktes über. Die Lorentz-Invarianz verknüpft diese Erhaltung mit der Erhaltung des Drehimpulses zur Erhaltung des antisymmetrischen Tensors M.

Then the conservation of this quantity comprises the uniform movement of the center of mass with the velocity total momentum divided by total mass. In the theory of relativity this transforms into a uniform moving center of energy. Lorentz invariance combines this conservation with the conservation of angular momentum to the antisymmetric tensor M.

29 Feld einer beliebig bewegten Punktladung

29.a Liénard-Wiechert-Potential

Wir bestimmen zunächst das Potential am Punkt (x^μ) einer Punktladung q, die sich auf einer Weltlinie $\mathbf{r}_\mathrm{q}(t)$ bewegt. Ihre Viererstromdichte ist

$$j^\mu(x') = qv^\mu\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{r}_\mathrm{q}(t)), \quad v^\mu = (c, \dot{\mathbf{r}}_\mathrm{q}(t)). \tag{29.1}$$

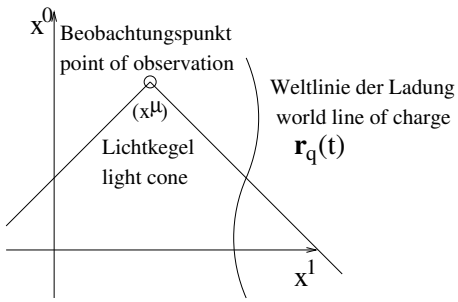
Das Viererpotential ergibt sich dann nach (24.29) zu

$$A^\mu(x) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x'\, j^\mu(x')\delta(\frac{1}{2}s^2)\theta(t-t') = q\int \mathrm{d}t' v^\mu(t')\delta(\frac{1}{2}s^2)\theta(t-t') \tag{29.2}$$

mit

$$s^2 = a^\nu a_\nu, \quad a^\nu = x^\nu - x^\nu_\mathrm{q}(t'). \tag{29.3}$$

(a^ν) ist eine Funktion von (x^ν) und t'. Das Differential von $\frac{1}{2}s^2$ ergibt sich zu



$$\mathrm{d}(\frac{1}{2}s^2) = a_\nu \mathrm{d}a^\nu = a_\nu \mathrm{d}x^\nu - a_\nu v^\nu \mathrm{d}t'. \tag{29.4}$$

Damit erhält man das retardierte Liénard-Wiechert-Potential

$$A^\mu(x) = qv^\mu(t')\frac{1}{|\frac{\partial \frac{1}{2}s^2}{\partial t'}|} = \left.\frac{qv^\mu}{a_\nu v^\nu}\right|_\mathrm{r} = \left.\frac{qu^\mu}{a_\nu u^\nu}\right|_\mathrm{r}. \tag{29.5}$$

Dabei sind die beiden Ausdrücke mit dem Index $_\mathrm{r}$ zu der Zeit t' auszuwerten, zu der $s^2 = 0$ und $t > t'$.

Wir beachten, dass $a_\nu v^\nu = ac - \mathbf{a}\cdot\mathbf{v} > 0$, da $a = c(t - t') = |\mathbf{a}|$. Im momentanen Ruhesystem der Ladung ist $a_\nu u^\nu/c$ der Abstand zwischen Beobachtungspunkt und Ladung.

29.b Die Felder

Aus den Potentialen berechnen wir nun die Felder

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{29.6}$$

29 Field of an arbitrarily Moving Point-Charge

29.a Liénard-Wiechert Potential

First we determine the potential at a point (x^μ) of a point-charge q which moves along a world-line $\mathbf{r}_\mathrm{q}(t)$. Its four-current density reads

$$j^\mu(x') = qv^\mu\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{r}_\mathrm{q}(t)), \quad v^\mu = (c, \dot{\mathbf{r}}_\mathrm{q}(t)). \tag{29.1}$$

According to (24.29) the four-potential reads

$$A^\mu(x) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x'\, j^\mu(x')\delta(\frac{1}{2}s^2)\theta(t-t') = q\int \mathrm{d}t' v^\mu(t')\delta(\frac{1}{2}s^2)\theta(t-t') \tag{29.2}$$

with

$$s^2 = a^\nu a_\nu, \quad a^\nu = x^\nu - x^\nu_\mathrm{q}(t'). \tag{29.3}$$

(a^ν) is a function of (x^ν) and t'. The differential of $\frac{1}{2}s^2$ is given by

$$\mathrm{d}(\frac{1}{2}s^2) = a_\nu \mathrm{d}a^\nu = a_\nu \mathrm{d}x^\nu - a_\nu v^\nu \mathrm{d}t'. \tag{29.4}$$

Thus one obtains the Liénard-Wiechert potential

$$A^\mu(x) = qv^\mu(t')\frac{1}{|\frac{\partial \frac{1}{2}s^2}{\partial t'}|} = \left.\frac{qv^\mu}{a_\nu v^\nu}\right|_\mathrm{r} = \left.\frac{qu^\mu}{a_\nu u^\nu}\right|_\mathrm{r}. \tag{29.5}$$

Here the two expressions with the index $_\mathrm{r}$ are to be evaluated at the time t' at which $s^2 = 0$ and $t > t'$.

We note that $a_\nu v^\nu = ac - \mathbf{a}\cdot\mathbf{v} > 0$, since $a = c(t-t') = |\mathbf{a}|$. $a_\nu u^\nu/c$ is the distance between point of observation and charge in the momentary rest system of the charge.

29.b The Fields

Starting from the potentials we calculate the fields

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{29.6}$$

Hierzu müssen wir die Ableitungen von v, a und t' bilden

In order to do this we have to determine the derivatives of v, a and t'

$$\partial^\mu v^\nu = \frac{\partial v^\nu}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x_\mu} \tag{29.7}$$

$$\partial^\mu a^\nu = \partial^\mu(x^\nu - x_{\rm q}^\nu(t')) = g^{\mu\nu} - v^\nu\frac{\partial t'}{\partial x_\mu} \tag{29.8}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial x_\mu} = \frac{a^\mu}{(a\cdot v)}, \tag{29.9}$$

wobei der letzte Ausdruck wegen $s^2 = 0$ aus (29.4) gewonnen wurde. Hier und im Folgenden verwenden wir

where the last expression has been obtained from $s^2 = 0$ by means of (29.4). Here and in the following we use

$$(a\cdot v) = a^\nu v_\nu = ac - \mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = c(a - \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta}) \tag{29.10}$$

$$(v\cdot v) = v^\nu v_\nu = c^2 - v^2 = c^2(1-\beta^2) \tag{29.11}$$

$$(a\cdot\dot v) = a^\nu\dot v_\nu = -\mathbf{a}\cdot\dot{\mathbf{v}}. \tag{29.12}$$

Damit wertet man aus

One evaluates

$$\partial^\mu v^\nu = \frac{\dot v^\nu a^\mu}{(a\cdot v)} \tag{29.13}$$

$$\partial^\mu a^\nu = g^{\mu\nu} - \frac{v^\nu a^\mu}{(a\cdot v)} \tag{29.14}$$

$$\begin{aligned}\partial^\mu(a\cdot v) &= (\partial^\mu a^\kappa)v_\kappa + a_\kappa(\partial^\mu v^\kappa)\\ &= g^{\mu\kappa}v_\kappa - \frac{v^\kappa a^\mu}{(a\cdot v)}v_\kappa + a_\kappa\frac{\dot v^\kappa a^\mu}{(a\cdot v)}\\ &= v^\mu - a^\mu\frac{(v\cdot v)}{(a\cdot v)} + a^\mu\frac{(a\cdot\dot v)}{(a\cdot v)}.\end{aligned} \tag{29.15}$$

Es folgt dann

Then one obtains

$$\begin{aligned}\partial^\mu A^\nu &= \partial^\mu\left(q\frac{v^\nu}{(a\cdot v)}\right) = q\frac{\partial^\mu v^\nu}{(a\cdot v)} - q\frac{v^\nu\partial^\mu(a\cdot v)}{(a\cdot v)^2}\\ &= a^\mu b^\nu - q\frac{v^\mu v^\nu}{(a\cdot v)^2},\end{aligned} \tag{29.16}$$

$$b^\nu = q\frac{v^\nu(v\cdot v) - v^\nu(a\cdot\dot v) + \dot v^\nu(a\cdot v)}{(a\cdot v)^3}. \tag{29.17}$$

Damit ist

Therefore

$$(b^\nu) = \frac{q}{(a-\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta})^3}\left(1-\beta^2+\frac{\mathbf{a}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}}{c}, \boldsymbol{\beta}(1-\beta^2) + \frac{1}{c}\boldsymbol{\beta}(\mathbf{a}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}) + \frac{1}{c}(a-\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}}\right) \tag{29.18}$$

und die Felder stellen sich dar

and the fields read

$$F^{\mu\nu} = a^\mu b^\nu - a^\nu b^\mu \tag{29.19}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}b^0 - a\mathbf{b} = \frac{q(1-\beta^2)(\mathbf{a}-\boldsymbol{\beta}a)}{(a-\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} + \frac{q\mathbf{a}\times((\mathbf{a}-\boldsymbol{\beta}a)\times\dot{\boldsymbol{\beta}})}{c(a-\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} \tag{29.20}$$

$$\mathbf{B} = -\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{E}}{a} \tag{29.21}$$

Der Beitrag proportional zur Beschleunigung $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ fällt ab wie $1/a$, für diesen Beitrag bilden **a**, **E** und **B** ein Orthogonal-System. Der von $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ unabhängige Beitrag fällt wie $1/a^2$ ab.

The contribution proportional to the acceleration $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ decreases like $1/a$; **a**, **E**, and **B** constiute an orthogonal system for this contribution. The contribution independent of $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ falls off like $1/a^2$.

29.c Gleichförmige Bewegung

(vergleiche Abschnitt 25.d). Der Skalar $\gamma a^\lambda v_\lambda/c$ ist gerade der Abstand zwischen Beobachtungspunkt und Ort der Ladung im Ruhesystem der Ladung. Daher gilt

29.c Uniform Motion

(compare section 25.d). The scalar $\gamma a^\lambda v_\lambda/c$ is the distance between the point of observation and the point of the charge in the rest-system of the charge. Thus one has

$$a - \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\gamma}|\mathbf{r}'|, \quad (a - \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta})^3 = N/\gamma^3. \tag{29.22}$$

Berücksichtigt man $\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t'$, $a = c(t - t')$, so folgt

Considering that $\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t'$, $a = c(t - t')$, one obtains

$$\mathbf{a} - \boldsymbol{\beta}a = \mathbf{r} - \mathbf{v}t' - \mathbf{v}t + \mathbf{v}t' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t \tag{29.23}$$

und damit

and thus

$$\mathbf{E} = \frac{q\gamma(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)}{N}, \quad \mathbf{B} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{v}t')\times(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)q\gamma}{c(t - t')N} = \frac{q\gamma\mathbf{v}\times\mathbf{r}}{cN} \tag{29.24}$$

in Übereinstimmung mit (25.30) und (25.31).

in accordance with (25.30) and (25.31).

29.d Beschleunigte Ladung momentan in Ruhe

Für $\beta = 0$ vereinfachen sich die Gleichungen (29.20) und (29.21) zu

29.d Accelerated Charge Momentarily at Rest

The equations (29.20) and (29.21) simplify for $\beta = 0$ to

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{a}}{a^3} + \frac{q}{ca^3}\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}) \tag{29.25}$$

$$\mathbf{B} = -\frac{q}{ca^2}(\mathbf{a}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}), \tag{29.26}$$

woraus mit der Energiestromdichte $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ die in den Raumwinkel $d\Omega$ abgestrahlte Leistung

from which the power radiated into the solid angle $d\Omega$ can be determined with the energy-current density $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$

$$\frac{\mathrm{d}\dot{U}_\mathrm{s}}{\mathrm{d}\Omega} = a^2\mathbf{S}\cdot\mathbf{n} = \frac{ca}{4\pi}[\mathbf{a},\mathbf{E},\mathbf{B}] = \frac{q^2}{4\pi ca^2}(\mathbf{a}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})^2 = \frac{q^2}{4\pi c^3}(\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{v}})^2 \tag{29.27}$$

und die gesamte abgestrahlte Leistung

and the total radiated power

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\dot{\mathbf{v}}^2 \tag{29.28}$$

(LARMOR-Formel) folgt.

(LARMOR-formula) follows.

Für eine harmonische Bewegung $\mathbf{r}_\mathrm{q} = \mathbf{r}_{0\mathrm{q}}\cos(\omega t)$ und $\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{r}_{0\mathrm{q}}\omega^2\cos(\omega t)$ folgt

For a harmonic motion $\mathbf{r}_\mathrm{q} = \mathbf{r}_{0\mathrm{q}}\cos(\omega t)$ and $\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{r}_{0\mathrm{q}}\omega^2\cos(\omega t)$ one obtains

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{2}{3}\frac{q^2\mathbf{r}_{0\mathrm{q}}^2}{c^3}\omega^4(\cos(\omega t))^2, \quad \overline{\dot{U}_\mathrm{s}} = \frac{1}{3}\frac{p_0^2}{c^3}\omega^4 \tag{29.29}$$

in Übereinstimmung mit Abschnitt 22.b. Dies gilt für $\beta \ll 1$. Sonst hat man in 22.b auch Quadrupol- und höhere Multipolanteile zu berücksichtigen und hier, dass β nicht mehr vernachlässigt werden kann, was auf zusätzliche Beiträge der Ordnung ω^6 und höher führt.

in agreement with section 22.b. This applies for $\beta \ll 1$. Otherwise one has to take into account quadrupole and higher multipole contributions in 22.b, and here that β cannot be neglected anymore, which yields additional contributions in order ω^6 and higher orders.

29.e Abstrahlung, $\beta \neq 0$

29.e Emitted Radiation $\beta \neq 0$

Wir hatten gesehen, dass die Ladung im momentanen Ruhesystem die Leistung $\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\dot{\mathbf{v}}^2$ abstrahlt. Der abgestrahlte Impuls ist Null wegen der Symmetrie der Strahlung (ohne Berücksichtigung des statischen Anteils von **E**, der aber so rasch abnimmt, dass er für hinreichend großes a nichts mehr beiträgt)

We had seen that in the system momentarily at rest the charge emits the power $\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\dot{\mathbf{v}}^2$. The emitted momentum vanishes because of the symmetry of the radiation (without consideration of the static contribution of **E**, which, however, decays that fast that it does not contribute for sufficiently large a)

$$\mathbf{E}(-\mathbf{a}) = \mathbf{E}(\mathbf{a}), \quad \mathbf{B}(-\mathbf{a}) = -\mathbf{B}(\mathbf{a}), \quad T_{\alpha\beta}(-\mathbf{a}) = T_{\alpha\beta}(\mathbf{a}). \tag{29.30}$$

Wir können daher den pro Eigenzeit abgestrahlten Impuls-Energie-Vektor schreiben als

Thus we may write the energy-momentum-vector emitted per proper time

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Big(\frac{1}{c}U_\mathrm{s}, \mathbf{G}_\mathrm{s}\Big) = \frac{u^\mu}{c}\frac{2q^2}{3c^3}\left(-\frac{\mathrm{d}u^\lambda}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}\tau}\right), \tag{29.31}$$

da $\dot{u}^0 = c\dot{\gamma} \propto \mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} = 0$. Da die Formel lorentz-invariant geschrieben ist, gilt sie in jedem Inertialsystem, das heißt

since $\dot{u}^0 = c\dot{\gamma} \propto \mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} = 0$. Since the formula is written in a lorentz-invariant way, it holds in each inertial frame, i.e.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\frac{u^0}{c}\frac{2q^2}{3c^3}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\left(-\frac{\mathrm{d}(\gamma v^\lambda)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}(\gamma v_\lambda)}{\mathrm{d}t}\right)\\
&= \frac{2q^2}{3c^3}\gamma^2\left((\gamma\mathbf{v})\dot{}(\gamma\mathbf{v})\dot{} - c^2\dot{\gamma}^2\right)\\
&= \frac{2q^2}{3c^3}\gamma^2\left(\gamma^2\dot{\mathbf{v}}^2 + 2\gamma\dot{\gamma}(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}) + \dot{\gamma}^2(\mathbf{v}^2 - c^2)\right).
\end{aligned} \tag{29.32}$$

Mit $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t \cdot u^0/c = 1$ und

With $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t \cdot u^0/c = 1$ and

$$\dot{\gamma} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \gamma^3\frac{\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}}{c^2} \tag{29.33}$$

folgt schließlich

one obtains finally

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\left(\gamma^4\dot{\mathbf{v}}^2 + \gamma^6\frac{(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}})^2}{c^2}\right). \tag{29.34}$$

Beim Umlaufen in einem Synchrotron vom Radius r ist die Beschleunigung $\dot{v} = v^2/r$ senkrecht zur Bewegungsrichtung. Daraus folgt

Orbiting in a synchrotron of radius r a charge undergoes the acceleration $\dot{v} = v^2/r$ perpendicular to its velocity. Thus one has

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{2}{3}q^2c\beta^4\gamma^4/r^2 = \frac{2}{3}q^2c(\gamma^2-1)^2/r^2. \tag{29.35}$$

Pro Umlauf ist die abgestrahlte Energie

The radiated energy per circulation is

$$\Delta U_\mathrm{s} = \frac{2\pi r}{v}\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{4\pi}{3}q^2\beta^3\gamma^4/r. \tag{29.36}$$

Bei Desy ergibt sich für ein umlaufendes Elektron der Energie E =7.5 GeV und $m_e c^2$ =0.5 MeV ein Wert $\gamma = E/(m_e c^2) = 15000$. Für r = 32 m folgt dann ΔU = 9.5 MeV. Bei Petra hat man mit E = 19GeV ein γ = 38000 und mit r = 367m eine Energieabstrahlung von ΔU = 34MeV pro Umlauf.

Aufgabe Hera bei Desy hat r = 1008m und arbeitet mit Elektronen von E_e = 30GeV und Protonen von Ep = 820GeV. Man berechne deren Energieabstrahlung pro Umlauf.

At Desy one obtains for an orbiting electron of energy E =7.5 GeV and mass $m_0 c^2$ =0.5 MeV a value $\gamma = E/(m_0 c^2) = 15000$. For r = 32m one obtains ΔU = 9.5MeV. Petra yields with E = 19GeV a γ = 38000 and with r = 367m a radiation ΔU = 34MeV per circulation.

Exercise Hera at Desy has r = 1008m and uses electrons of E_e = 30GeV and protons of Ep = 820GeV. Calculate the energy radiated per circulation.

I

Rückblick und Ausblick

Review and Outlook

©2003 Franz Wegner Universität Heidelberg

In diesem letzten Kapitel wird zum einen ein Rückblick in Form eines knappen Abrisses der geschichtlichen Entwicklung der Elektrodynamik gegeben. Zum anderen aber wollen wir einen einfachen Effekt der allgemeinen Relativitätstheorie, nämlich den, dass der Zeitablauf vom Gravitationspotential abhängt, darstellen.

In this last chapter a review in the form of a short account of the historic development of electrodynamics is given. Additionally we will catch a glimpse of the general theory of relativity by showing that clocks run differently in the presence of gravitation.

30 Kurze Geschichte der Elektrodynamik

Ich schließe mit einer kurzen Geschichte der Elektrodynamik. Dabei habe ich vorwiegend die folgende Literatur verwendet:

30 Short History of Electrodynamics

I conclude with a short history of electrodynamics. For this purpose I have mainly used the following literature:

Sir Edmund Whittaker, A History of the Theories of Aether and Electricity
Emilio Segrè, Die großen Physiker und ihre Entdeckungen, Teil 1, Piper Band 1174
Wilhelm H. Westphal, Physik, Springer-Verlag
Wilhelm H. Westphal, Anhang I, Physikalisches Wörterbuch
Max Born, Emil Wolf, Principles of Optics, Historical Introduction
Edmund Hoppe, Geschichte der Physik
Encyclopedia Brittanica: Stichworte / Article 'Electromagnetic Waves' und / and 'Magnetism'
Woldemar Voigt, Theoretische Physik
J.D. Jackson and L.B. Okun, Historical roots of gauge invariance, Rev. Mod. Phys. 73 (2001) 663.

Eine geschichtliche Entwicklung nachzuzeichnen ist nicht einfach. Zum einen stellt sich die Frage, ob man hinreichend vollständige Quellen hat. Zum zweiten werden häufig mehrere Personen für Entdeckungen oder Erklärungen genannt, zuweilen zu recht unterschiedlichen Zeiten. Dies kann daran liegen, dass diese Personen von ihren Entdeckungen gegenseitig nichts wussten. Es kann aber auch daran liegen, dass sie die Erscheinung unterschiedlich gut beobachtet oder erklärt haben. Manchmal haben sie das Ergebnis auch besonders gut weitergegeben, so dass ihre Arbeit sehr populär wurde und sie als vermeintliche Autoren galten.

It is not easy to redraw a historical development. First of all, there is the question whether one has sufficiently complete sources. Secondly, it often happens that several persons are named for some discovery or explanation, sometimes even at separate times. One reason might be that one person did not know of the other's discovery. But it may also be that they observed or explained the phenomenon differently well. Sometimes they published the result particularly well so that their paper has become rather popular and they were considered alleged authors.

Wer hat zum Beispiel die Entstehung des Regenbogens erklärt? Dietrich von Freiberg, Mahmud al Schirazi und Kamal al-Din, die anfangs des 14. Jahrhunderts fanden, dass im Regentropfen der Sonnenstrahl zweimal gebrochen und ein- oder zweimal reflektiert wird, oder Descartes, der um 1625 fand, dass der dadurch insgesamt entstehende Brechwinkel ein Extremum annimmt, so dass in diese Richtung eine besonders hohe Intensität an Licht gebrochen wird, oder Young und Airy, die um 1820 und 1836 die Wellennatur des Lichts berücksichtigten? Alle haben ein Stück zu unserem Wissen beigetragen.

Anfangs waren es vor allem drei verschiedene Phänomene der Elektrodynamik, die dem Menschen auffielen, ohne dass er Zusammenhänge zwischen diesen erahnte. Das offensichtlichste war das Licht, das ihm hervorragende Orientierung bot und ihm zuweilen mit furchterregenden und auch angenehmen Erscheinungen entgegentrat, wie dem Blitz und dem Regenbogen.

Zwei andere schon im Altertum bekannte Phänomene waren weitaus seltener zu beobachten, die seltsamen Eigenschaften zweier Minerale, Bernstein (*ηλεκτρον*) und Magnetit (*η λιθοζ* Μαγνητιζ). Ersterer zieht leichte Körper an, wenn man ihn reibt, letzterer hat die Kraft, Eisen anzuziehen und trägt seinen Namen von der Stadt Magnesia in Thessalien, wo man ihn findet. Man sagt, Thales von Milet (um 600 v. Chr.) habe bereits die Eigenschaften dieser Minerale gekannt.

Entsprechend entwickelten sich die Untersuchungen dieser Phänomene parallel zueinander in einer Theorie des Lichts, der Elektrostatik und der Magnetostatik, bevor man erkannte, dass diese miteinander verknüpft sind.

Who for example has explained how the rainbow comes about? Dietrich von Freiberg, Mahmud al Schirazi and Kamal al-Din who in the beginning of the 14th century found that sunlight is refracted twice and reflected once or twice inside the raindrop, or Descartes who found around 1625 that the total angle of reflection has an extremum so that a high intensity of light is reflected under a certain angle, or Fresnel and Airy who took around 1820 and 1836 the wave character of light into account? All of them contributed a piece to our knowledge.

Initially there were three different phenomena of electrodynamics observed by man without forseeing their connection. The most obvious one was light which offered him excellent orientation and which sometimes appeared to him both frightening and agreeable as in a flash of lightning and a rainbow.

Two other phenomena already known in antiquity were much rarer observed, the curious properties possessed by two minerals, amber (*ηλεκτρον*) and magnetic iron ore (*η λιθοζ* Μαγνητιζ). The former, when rubbed, attracts light bodies; the latter has the power of attracting iron and has its name from Magnesia in Thessalia, where this stone is found. Thales of Milet (600 BC) is said to have known the properties of these minerals.

Accordingly, the investigation of these phenomena developed in parallel into a theory of light, of electrostatics, and of magnetostatics, before one realized that they are connected.

30.a Theorie des Lichts bis Fresnel

Heron von Alexandrien begründete die Gleichheit von Einfallswinkel und Reflexionswinkel bei einem Spiegel damit, dass das Licht den kürzesten Weg nehme. Generell war man im Altertum und weitgehend im Mittelalter der Ansicht, dass die Naturabläufe einen Endzweck haben. Man fragte sich: *Warum* läuft etwas so ab und nicht *wie* läuft es ab?

Heron und Ptolemäus vertraten die Ansicht, dass man mit Sehstrahlen sah, die vom Auge ausgingen und vom gesehenen Objekt reflektiert wurden. Alhazen (ibn al Haitham) kam zur korrekten Ansicht, dass das Licht von der Sonne oder einem anderen strahlenden Körper ausging und vom Körper reflektiert in unser Auge gelangte.

30.a Theory of Light to Fresnel

Hero of Alexandria argued that reflected light uses the shortest path and thus for light reflected at a mirror the angle of incidence equals the angle of reflexion. In antiquity and the middle ages one assumed that nature has final causes and thus asked *why*, not *how* does nature proceed?

Hero and Ptolemy held the opinion that men saw by means of rays of light issuing from the eye and reflecting from the objects seen. Alhazen held the correct view that light was issued from the sun or from some other luminous source and was reflected from the object seen into the eye.

Alhazen machte bedeutende Entdeckungen auf dem Gebiet der Optik (1030): Lochkamera und Parabolspiegel. Kepler lernte sehr viel aus seinen Werken. Alhazen wusste bereits, dass bei der Brechung der einfallende, der reflektierte und der gebrochene Lichtstrahl in einer Ebene liegen.

Alhazen made important discoveries in optics (1030): pinhole camera and parabolic mirror. Kepler learnt a lot from his work. Alhazen already knew that in refraction the incident, the reflected and the refracted beam lie in one plane.

In das 13. Jahrhundert gehört die Erfindung der Brille.

Eye glasses were invented in the 13th century.

Die Erklärung der Entstehung des Regenbogens durch zweimalige Brechung und ein- oder zweimalige Reflexion des Sonnenlichts im Regentropfen wird zu Beginn des 14. Jahrhunderts von Dietrich von Freiberg und von Al-Schirazi und Kamal al-Din gegeben.

The explanation for the occurence of the rainbow by two refractions and one or two reflections of sunlight in the rain drop was given by Dietrich von Freiberg, Al-Shirazi, and Kamal al-Din at the beginning of the 14th century.

Snellius von Royen fand experimentell das nach ihm benannte Brechungsgesetz um 1621. Descartes gab eine theoretische Herleitung unter der Annahme, dass die Geschwindigkeit in den beiden Medien feste Werte hat und die Komponente parallel zur Grenzfläche erhalten bleibt. Die Herleitung wird korrekt, wenn der Geschwindigkeitsvektor durch den Wellenvektor ersetzt wird. Fermat führte dagegen das Prinzip der kleinsten Zeit (1657) ein und leitete daraus das Brechungsgesetz (1661) her.

In 1621 Snell of Royen found experimentally the law of refraction. Descartes gave a theoretical derivation assuming that the velocity of the beams have given values in both media and that the component of the velocity vector parallel to the boundary is conserved. This derivation becomes correct if the vector of velocity is replaced by the wave-vector. However, Fermat introduced the principle of least time (1657) and derived from this the law of refraction (1661).

Hooke war vermutlich 1667 der erste, der in seiner Arbeit *Micrographia* das Licht als Welle beschrieb, da er Beugungserscheinungen beobachtet hatte, und durch theoretische Betrachtung des Verlaufs der Wellenfronten das Brechungsgesetz herleitete. Huygens hängt ebenfalls der Wellentheorie in seinem *Traité de la lumière* (1678-1690) an. Wichtig wurde später vor allem für die Theorie der Beugung, aber auch der Brechung, das Prinzip von Huygens: Jeder Punkt einer Wellenfront kann selbst wieder als Quelle einer Sekundärwelle betrachtet werden. Newton wird weitgehend mit der Emanationstheorie in Verbindung gebracht, das heißt mit der Vorstellung, Licht sei korpuskularer Natur. Das ist nicht ganz korrekt. Newton vermied es lange Zeit, Vorstellungen einzuführen, die nicht experimentell überprüfbar waren. 'Um einen Disput zu vermeiden und diese Hypothese allgemein zu machen, soll jedermann hier seine Vorliebe haben; nur was immer das Licht sein mag, nehme ich an, dass es aus Strahlen besteht, die sich nach den jeweils herrschenden Umständen durch Größe, Form oder Energie unterscheiden.' Später allerdings favorisierte er die Korpuskular-Theorie.

Hooke was probably the first who described in his *Micrographia* light as a wave, since he had observed diffraction. Considering theoretically the progression of the wave-front he derived the law of refraction. However, Huygens, developed in his *Traité de la lumière* (1678-1690) a wave theory of light. Important for the theory of diffraction but also refraction became his principle, which says: Each point of a wave-front may be regarded as the source of a secondary wave.' Newton is considered having put forward the theory of emanation, i.e. the idea that light is of corpuscular nature. This is not completely correct. Newton disliked to introduce imaginative hypotheses, which could not be proven experimentally. 'To avoid dispute, and make this hypothesis general, let every man here take his fancy; only whatever light be, I suppose it consists of rays differing from one another in contingent circumstances, as bigness, form or vigour.' Later however, he was in favour of the corpuscular nature of light.

Newton untersuchte die Farben dünner Blättchen intensiv. Er nahm an (*Opticks*), dass 'jeder Lichtstrahl bei seinem Durchgang durch eine reflektierende Oberfläche in einen Übergangszustand gebracht wird, welcher beim Fortgang des Strahls sich in gleichen Abständen wiederholt; bei jeder Wiederholung

Newton devoted considerable attention to the colours of thin plates. He supposed (*Opticks*) that 'every ray of light, in its passage through any refracting surface, is put into a certain transient state, which, in the progress of the ray, returns at equal intervals, and disposes the ray, at every return, to be easily transmitted

entlässt er den Strahl leicht durch die nächste reflektierende Oberfläche und zwischen den Wiederholungen lässt er ihn reflektieren.' Er fand, dass die Intervalle zwischen leichtem Durchgang mit der Farbe variieren und diese am größten für rotes, am kürzesten für violettes Licht waren. Hätte er das Wellenbild akzeptiert, so hätte er die Wellenlängen des sichtbaren Lichts bestimmen können.

through the next refracting surface, and, between the returns, to be easily reflected by it.'He found that the intervals between easy transmission vary with colour, being greatest for red and least for violet. If he had accepted the wave picture, he could have determined the wavelengths of visible light.

Das inzwischen bekannte Phänomen der Doppelbrechung erklärte Newton 1717 durch unterschiedlich geformte Querschnitte der Lichtkorpuskel, was der Idee einer transversalen Polarisation nahe kommt. Huygens Wellentheorie maß dem Äther elastische Eigenschaften bei; er zog dabei allerdings nur longitudinale Wellen in Erwägung und musste zur Erklärung der Doppelbrechung zwei verschiedene Arten von Wellen einführen, von denen sich eine isotrop, die andere dagegen sphäroidal ausbreitete. Zu jener Zeit wurde Newton's Erklärung überwiegend akzeptiert.

In 1717 the meanwhile known phenomenon of double-refraction was explained by Newton by light corpuscles of different shape which comes close the idea of a transversal polarization. Huygens' wave theory of light assigned elastic properties to the aether; However, he considered only longitudinal waves, and was forced to introduce two different kinds of these waves for double-refraction, one of which propagated isotropically, the other spheroidally. At that time Newton's explanation was generally accepted.

In diesem Kurs haben wir die Doppelbrechung und die Beugung nicht behandelt. Sie spielten in der Entwicklung der Theorie des Lichts eine wichtige Rolle. Es sei angemerkt, dass Doppelbrechung in anisotropen Kristallen auftritt, in denen die Dielektrizitätskonstante ein Tensor ist.

In this course we did not consider double-refraction and diffraction. They played an important role in the development of the theory of light. It should be remarked that double-refraction appears in anisotropic crystals where the dielectric constant is a tensor.

1675 konnte Römer durch Beobachtung der Verdunklung der Jupitermonde erstmals die Zeit bestimmen, die das Licht für die Strecke Sonne-Erde benötigt. Bis dahin war es nicht klar, ob sich Licht instantan oder mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet.

In 1675 Römer was able to determine the time light needs to transverse the distance from sun to earth by observing the eclipses of the moons of Jupiter. Until that time it was not clear whether light propagates instantly or at a finite velocity.

1728 fand James Bradley die Aberration, das heißt eine Veränderung der Richtung des Lichts von einem Stern auf Grund der senkrechten Bewegung der Erde gegen das Licht. Dies wurde als Beweis für die Korpuskularnatur des Lichts angesehen. bereits 1677 hatte Römer in einem Brief an Huygens ein derartiges Phänomen vermutet.

In 1728 James Bradley found the aberration of light, i.e. a change in the direction of the light from a star due to the perpendicular motion of the observer to the direction of the star. This was considered a proof of the corpuscular nature of light. In 1677 Römer already had conjectured such a phenomenon in a letter to Huygens.

1744 griff Maupertuis die Kontroverse zwischen Descartes und Fermat wieder auf. Er war zwar von der Korpuskularnatur des Lichts überzeugt, wollte aber Fermats Methode erhalten. Er forderte daher, dass 'der Weg derjenige ist, für den die Wirkung am kleinsten wird' und erlangte, dass an Stelle von Fermats $\int \mathrm{d}t = \int \mathrm{d}s/v$ jetzt $\int v\mathrm{d}s$ extremal werden sollte. Er führte damit erstmals das Prinzip der kleinsten Wirkung ein, das alsbald auch von Euler und Lagrange aufgegriffen wurde und heute als das Prinzip gilt, das die Dynamik der Natur beherrscht.

In 1744 Maupertuis took up the old controversy between Descartes and Fermat. Convinced of the corpuscular nature of light but wishing to retain Fermat's method, he supposed that 'the path described is that by which the quantity of action is the least' and required that instead Fermat's $\int \mathrm{d}t = \int \mathrm{d}s/v$ the action $\int v\mathrm{d}s$ should be extremal. In this way he introduced for the first time the principle of least action which was soon taken up by Euler and Lagrange, and which today is considered the principle governing all dynamics of nature.

1801 führte Thomas Young das Konzept der Interferenz zweier Wellen ein und brachte damit das Huygenssche Konzept von neuem ins Spiel. Er ist in der Lage, die Newtonschen Ringe mit diesem Konzept zu erklären. Malus fand 1808, dass reflektiertes Licht normalerweise partiell polarisiert ist und fand den Winkel der Totalpolarisation, jetzt als Brewsterscher Winkel bekannt (nach Gl. 18.22). Das Problem, den außergewöhnlichen Strahl in doppel-brechenden Kristallen zu erklären, verblieb mit Erklärungen beider Seiten: Laplace argumentiert 1808 mit der Wirkungsfunktion für Korpuskel, Young 1809 für Wellen, wobei sich beide nur in der Anisotropie des Kristalls einig sind. Die Situation wurde noch komplexer, als Brewster 1815 auch Kristalle mit zwei außergewöhnlichen Strahlen entdeckte (der Fall dreier verschiedener Eigenwerte des Dielektrizitätstensors.

In 1801 Thomas Young introduced the concept of the interference of two waves and brought Huygens' concept anew in play. He is able to explain Newton's rings with this concept. In 1808 Malus found that reflected light is normally partially polarized and found the angle of total polarization, now known as Brewster's angle (after eq. 18.22). The problem to explain the extraordinary beam in double-refracting crystals continued with explanations from both sides, in 1808 Laplace argued for corpuscles, in 1809 Young argued for waves, both agreeing that the medium has to be anisotropic. In 1815 when Brewster discovered crystals with two extraordinary beams (the case of three different eigenvalues of the dielectric tensor) the situation became even more complex.

Für 1818 schrieb die französische Akademie einen Preis für die Erklärung der Beugung aus. Die Anhänger der Emissionstheorie (Laplace, Poisson, Biot) waren siegessicher, aber Fresnel legte eine Arbeit vor, in der er fußend auf den Arbeiten von Huygens and Young die Beugung für mehrere Anordnungen mit der Wellentheorie beschrieb. Poisson, der die Arbeit sorgfältig studierte, fand, dass im Mittelpunkt des Schattens einer kreisförmigen Scheibe ein heller Fleck sein müsste und verlangte eine experimentelle Überprüfung. Arago fand den hellen Fleck und Fresnel gewann den Preis. Nachdem Young auch 1818 die Aberration mit der Wellentheorie erklärt hatte, wurde diese die führende Theorie.

In 1818 the French Academy announced a prize for the explanation of diffraction. The followers of the theory of emission (Laplace, Poisson, Biot) were confident of victory but Fresnel submitted a paper at the basis of the papers by Huygens and Young, in which he explained this phenomenon for several arrangements by means of the wave theory. Poisson who studied the paper carefully found that in the centre of the shadow behind a circular disc there had to be a bright spot and asked for an experimental test. Arago found the bright spot and Fresnel received the prize. Since in 1818 Young was also able to explain aberration by means of the wave theory it became the leading theory.

Young schlug 1817 erstmals vor, bei Licht könne es sich um Transversalwellen handeln. Dies wurde unterstützt durch die Beobachtung, dass zwei senkrecht zueinander polarisierte Lichtstrahlen keine Interferenz zeigen. Fresnel griff diese Idee auf und entwickelte in den Folgejahren eine erfolgreiche Theorie der Doppelbrechung, obwohl ihm die Maxwell-Gleichungen noch nicht zur Verfügung standen. Geschickte Experimente von Airy (1831) zur Unterdrückung von Newtonschen Ringen bei Einstrahlung des Lichts unter dem Brewster-Winkel und die Messung der Lichtgeschwindigkeit in Luft und Wasser bewiesen die Wellennatur des Lichts. (Im Medium größerer Brechzahl sagt die Wellentheorie eine kleinere, die Korpuskulartheorie eine größere Geschwindigkeit vorher.)

In 1817 Young proposed for the first time, light might consist of transversal waves. This was supported by the observation that two light beams polarized perpendicular to each other do not show interferences. Fresnel picked up this idea and developed a successful theory of double-refraction, although Maxwell's equations were not yet available. Clever experiments by Airy (1831) showing that light irradiated under Brewster's angle suppresses Newton's rings, and that light propagated slower in water than air, proved the wave nature of light. (Wave-theory predicts in a medium with larger index of refraction a smaller velocity of light, in the corpuscular theory a larger one.)

Fresnel leitete einen Ausdruck für die Änderung der Lichtgeschwindigkeit in einem bewegten Medium her, der experimentell von Fizeau (1851) bestätigt wurde. Es gab jedoch mehrere verschiedene Theorien

Fresnel derived an expression for the change of velocity of light in moving matter which was confirmed experimentally by Fizeau (1851). However, there were several different theories on this subject among

darüber unter anderem auch eine von Stokes (1846). Verschiedene Ideen rivalisierten bei der Frage, in welchem Umfang Materie den Äther mitführt.

Es sei bemerkt, dass der Äther als elastischer Festkörper in der Folgezeit viele hervorragende Wissenschaftler beschäftigte und die Elastizitätstheorie zur Blüte brachte. Bei der Anwendung auf das Licht blieb es jedoch ein Problem, Longitudinalwellen zu unterdrücken.

Ein Rätsel blieb, ob der Raum oberhalb der Erde ein Plenum sei, das dem Licht die notwendigen elastischen Eigenschaften zur Ausbreitung gibt, oder ein Vakuum, das den Planeten ihre Bewegungen erlaubt. Diese Diskussion bestand schon Jahrhunderte vorher. Nach Descartes war der Raum ein Plenum, von einem Medium ausgefüllt, unseren Sinnen nicht wahrnehmbar, das Kräfte übertragen kann und Effekte auf die materiellen Körper übertragen kann, die in ihm eingebettet sind, genannt Äther. Gassendi, ein Anhänger von Kopernikus und Galilei, führte hingegen die Doktrin der antiken Atomisten wieder ein, dass das Universum aus massebehafteten Atomen, ewig und unveränderlich bestehe, die in einem Raum, der abgesehen von ihnen selbst leer ist. Seine Doktrin wurde bald darauf von Newton aufgenommen und wurde Ausgangspunkt der darausfolgenden Naturphilosophie.

30.b Elektrostatik

Bereits Thales von Milet (600 v. Chr.) berichtet, dass geriebener Bernstein (griechisch 'elektron') leichte Körper anzieht. Um 1600 entdeckte Gilbert, dass viele andere Stoffe durch Reiben die gleiche Eigenschaft annehmen. Er prägte hierfür den Begriff 'elektrisch'. Das Wort 'Elektrizität' wurde von Browne 1646 eingeführt. Gilbert arbeitete auch wesentliche Unterschiede zwischen magnetischen und elektrischen Kräften heraus. (Magnete sind im Gegensatz zu elektrisierten Körpern permanent. Magnetische Kräfte werden durch andere Substanzen nicht abgeschirmt. Magnete ziehen nur magnetisierbare Substanzen an, elektrisierte alle.)

Otto von Guericke, bekannt durch die Herstellung des Vakuums in den Magdeburger Kugeln, machte sehr frühzeitig - 1672 erschien die *Experimenta nova magdeburgica* - eine Reihe wichtiger Entdeckungen auf dem Gebiet der Elektrizität: Er führte das erste Mal die Unterscheidung zwischen Leitern und Nichtleitern ein, beobachtete elektrische Abstoßung und Anziehung, die Influenz und baute die erste brauchbare Elektrisiermaschine. Seine Entdeckungen

others by Stokes (1846). Different ideas competed on the question, to which extend matter would drag the aether.

It may be remarked that the aether as an elastic solid occupied many excellent scientists in the following time and made the theory of elasticity flourishing in the following years. Applied to the theory of light there remained the problem to suppress longitudinal waves.

There remained the puzzle whether the space above the earth is a plenum, which provides the necessary properties of elasticity for the propagation of light, or a vacuum, which allows the planets to move freely. This discussion existed already centuries before. Space was, in Descartes' view, a plenum (in contrast to a vacuum), being occupied by a medium which, though imperceptible to the senses, is capable of transmitting force, and exerting effects on material bodies immersed in it - the aether, as it was called. Gassendi, a follower of Copernicus and Galileo, reintroduced the doctrine of the ancient atomists that the universe is formed of material atoms, eternal and unchangeable, moving about in a space which except for them is empty, thus he re-introduced the vacuum. His doctrine was accepted not long afterwards by Newton and in fact became the departure point for all subsequent natural philosophy.

30.b Electrostatics

Thales of Milet (600 BC) is said to have known that rubbed amber (Greek 'elektron') attracts light bodies. Around 1600 Gilbert discovered that many other materials assume the same property by rubbing. He coined the word 'electric' for this property. The word 'electricity' was introduced by Browne in 1646. Gilbert remarked essential differences between magnetic and electric forces. (Magnets are permanent in contrast to electrified bodies. Magnetic forces are not shielded by other substances. Magnets attract only magnetizable substances, electrified ones all substances.)

Otto of Guericke known for the preparation of the vacuum in the Magdebourgous spheres made pretty early a number of important electric discoveries - his *Experimanta nova magdeburgica* appeared in 1672 - For the first time he introduced the distinction between conductors and non-conductors, he observed electric attraction and repulsion, the phenomenon of influence. He designed the first reasonably working electrostatic generator. It seems that his discoveries

fanden aber offensichtlich keine allgemeine Beachtung.

Wall verglich 1708 den Funken, der von geriebenem Bernstein mit einem Knall überspringt, mit Donner und Blitz, ein Hinweis darauf, dass es sich beim Blitz um eine elektrostatische Entladung handelt.

Gray fand 1729, dass Elektrizität durch bestimmte Stoffe übertragen wird, die Desaguliers Nicht-Elektrika oder Leiter nannte. Gray fand auch, dass sich die Elektrizität auf der Oberfläche von Körpern ansammelt. DuFay beobachtete 1734, dass es zwei Arten von Elektrizität gibt, Glas- und Harzelektrizität und dass sich gleichartige abstoßen, verschiedenartige anziehen.

Verbesserte Elektrisiermaschinen wurden in verschiedenen Varianten zwischen 1744 und 1746 von Johann Heinrich Winkler, George Matthias Bose und Benjamin Wilson entwickelt.

Der Kondensator in Form der Leidener Flasche wurde 1745 von Pieter van Musschenbroek erfunden, unabhängig davon vermutlich etwas früher von Ewald von Kleist, aber erst 1746 von J. G. Krüger beschrieben.

William Watson schloss 1746, dass 'durch das Laden oder Entladen einer Leidener Flasche Elektrizität transferiert wird, aber nicht erzeugt oder vernichtet.' 'Unter geeigneten Umständen war es möglich die Elektrizität in einigen Körpern rarer zu machen als sie natürlicherweise ist, und durch Übertragung auf andere Körper denen eine zusätzliche Menge zu geben und deren Elektrizität dichter zu machen.' Dies war ein erster Hinweis auf die Erhaltung der Ladung.

Ähnliche Experimente, die Benjamin Franklin nach einem Vortrag von Dr. Spence, der von Schottland nach Amerika gekommen war, durchführte, brachten ihn 1747 ebenfalls zur Schlussfolgerung, 'dass die Gesamtmenge Elektrizität eines isolierten Systems unveränderlich ist'. Populär wurde Franklin durch die Erfindung des Blitzableiters. Er bemerkte, dass es sich beim Blitz um eine elektrische Entladung handelt.

Die Einführung der Vorzeichen für die Ladung wird sowohl Franklin als auch Lichtenberg (1777) zugeschrieben: 'Ich nenne diejenige Elektrizität positiv, die, durch blankes Glas erregt, auf leitende Körper geleitet wird; die entgegengesetzte nenne ich negativ.'

Aepinus und Wilcke kamen zu dem Ergebnis, dass 'gewöhnliche Materie' (darunter verstanden sie ungefähr das, was wir heute Materie ohne äußere Elektronen nennen würden) sich abstößt, die Teilchen der 'elektrischen Flüssigkeit' (heute äußere

did not receive general attention.

In 1708 Wall compared the spark which flashes over rubbed amber with thunder and flash, an indication that a flash is an electrostatic discharge.

In 1729 Gray found that electricity is transferred by certain substances which Desaguliers called non-electrics or conductors. Gray found that electricity is assembled at the surface of bodies. In 1734 DuFay observed that there are two kinds of electricity, vitreous and resinous electricity; similar ones repel each other, whereas dissimilar ones attract each other.

Improved electrostatic generators were designed between 1744 and 1746 by Johann Heinrich Winkler, George Matthias Bose and Benjamin Wilson.

The capacitor in form of a Leyden jar was invented in 1745 by Pieter van Musschenbroek, and independently probably a bit earlier by Ewald von Kleist, described by J. G. Krüger in 1746.

In 1746 William Watson concluded that 'in charging or discharging of a Leyden jar electricity is transferred, but it is not created or destroyed.' 'Under certain circumstances, it was possible to render the electricity in some bodies more rare than it naturally is, and, by communicating this to other bodies, to give them an additional quantity, and make their electricity more dense.' This was a first indication of the conservation of charge.

Similar experiments conducted by Benjamin Franklin after a talk by Dr. Spence who had come from Scotland to America, brought him in 1747 to the conclusion that 'the total amount of electricity in an insulated system is invariable.' Franklin became popular by the introduction of the lightning rod. He realized that lightning was an electric discharge.

The introduction of the signs for charges is ascribed to both Franklin and Lichtenberg (1777): 'I call that electricity positive, which, stimulated by blank glass, is transferred to conductiong bodies; the opposite one I call negative.'

Aepinus and Wilcke found that 'ordinary matter' (this is approximately what we nowadays call matter without outer electrons) repels itself, particles of the 'electric fluid' (nowadays called outer electrons) are repelling themselves, too, and ordinary matter and the

Elektronen) sich ebenfalls abstoßen und gewöhnliche Materie und die elektrische Flüssigkeit einander anziehen. Weiterhin stellten sie fest, dass Glas und sogar Luft für die elektrische Flüssigkeit undurchdringlich ist, obwohl sich die elektrische Wechselwirkung über größere Entfernungen erstreckt.

electric fluid attract each other. Further, they realized that glass and even air is impermeable for the electric fluid despite the fact that the electric interaction acts over larger distances.

Das Phänomen der Influenz (auch elektrische Induktion), das schon von Guericke, John Canton und Wilcke beobachtet worden war, erklärte Aepinus 1757 mit den elektrostatischen Kräften und der freien Beweglichkeit der elektrischen Flüssigkeit. Wilcke beschrieb 1762 viele Experimente im Zusammenhang mit der Influenz und argumentiert, dass ein Dielektrikum im elektrischen Feld polarisiert ist.

Aepinus explained in 1757 the phenomenon of influence (or electric induction), which had already been observed by Guericke, Canton, and Wilcke, by the electrostatic forces and the free mobility of the electric fluid. Wilcke described in 1762 many experiments in connection with influence and argues that dielectric media are polarized in an electric field.

Joseph Priestley berichtet 1767 in seinem wenig beachteten Werk *History and present State of Electricity* von einem von Franklin ausgeführten und von ihm wiederholten Experiment, dass im Inneren einer Metalldose keine elektrische Kraft auftritt und die Innenflächen keine Ladungen tragen. Er schließt daraus, dass sich gleichnamige Ladungen mit einer Kraft abstoßen, die umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes ist. 'Können wir nicht aus dem Experiment schließen, dass die Anziehung der Elektrizität denselben Gesetzen wie die Gravitation genügt,... da man leicht zeigen kann, dass die Erde, hätte sie die Form einer Schale, einen Körper im Inneren nicht nach einer Seite mehr anziehen würde als zur anderen.'

Joseph Priestley communicates in his work *The History and present State of Electricity* ... which did not receive much attention an experiment conducted by Franklin and repeated by him that inside a metallic box there is no electric force and the interior sides do not carry any charges. He concludes that charges of equal sign repel each other with a force inversely proportional to the square of the distance. 'May we not infer from this experiment that the attraction of electricity is subject to the same laws with that of gravitation, ... since it is easily demonstrated that were the earth in the form of a shell, a body in the inside of it would not be attracted to one side more than another?'

Daniel Bernoulli hatte 1760 die Vermutung geäußert, dass für die elektrostatische Wechselwirkung ein $1/r^2$-Gesetz gelten sollte. John Robison hatte 1769 vermutlich als erster die $1/r^n$-Abhängigkeit mit $n = 2 \pm 0.06$ gemessen. Cavendish hatte 1771 erklärt, dass die Wechselwirkung mit einer inversen Potenz kleiner als 3 abfällt. Robison und Cavendish ließen Jahre verstreichen, bis sie ihre Ergebnisse veröffentlichten. Cavendish hatte 1775 vergleichende Angaben über die Leitwerte verschiedener Substanzen gemacht (Eisen, Seewasser, etc.).

In 1760 Daniel Bernoulli conjectured that there might be a $1/r^2$-law for the electrostatic interaction. In 1769 John Robison was presumably the first to measure a $1/r^n$-dependence with $n = 2 \pm 0.06$. In 1771 Cavendish declared that the interaction falls off with an inverse power less than 3. It took many years until Robison's and Cavendish's results were published. In 1775 Cavendish gave comparative results for the conductances of various materials. (iron, sea water, etc.)

Coulomb verifizierte 1785 mittels der von Michell und unabhängig von ihm entwickelten Drehwaage das $1/r^2$-Gesetz sehr genau. Die Drehwaage diente auch zur Bestimmung der Gravitationskonstante (Cavendish).

In 1785 Coulomb verified by means of the torsion balance invented by Michell and independently by himself the $1/r^2$-law with high precision. This torsion balance served also for the determination of the gravitional constant (Cavendish).

Poisson stellte 1813 die nach ihm benannte Gleichung für das elektrostatische Potential auf. Laplace hatte 1777 gezeigt, dass der nach ihm benannte Operator angewandt auf das Gravitationspotential in dem Teil des Raums, der materiefrei ist, Null ergibt. Poisson hatte nun die Dichte der Materie mit eingeführt und

In 1813 Poisson showed that the electrostatic potential obeys the equation, now called after him. In 1777 Laplace had shown that the operator, now called Laplacian, applied to the gravitational potential in matter free space yields zero. Poisson had included the regions filled with matter, and explicitely stated

ausdrücklich darauf hingewiesen, dass dies auch analog im elektrostatischen Fall gilt. Er hat damit das elektrostatische Potential eingeführt und darauf hingewiesen, dass es auf der Oberfläche von Leitern konstant ist. George Green hat 1828 die Überlegungen Poissons weitergeführt. Wir kennen das Greensche Theorem (B.67). Die Greensche Funktionen sind nach ihm benannt.

William Thomson (Lord Kelvin) (1845) und Mossotti (1847) stellten auf Grund von Überlegungen Faradays die Zusammenhänge zwischen Polarisation und elektrischem Feld her, die wir in Abschnitt 6 dargelegt haben, $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \epsilon\mathbf{E}$, $\rho_P = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}$.

30.c Magnetostatik

Bereits im Altertum waren Magnete bekannt. Sie sind nach der Stadt Magnesia in Thessalien benannt, in deren Gegend der Magnetstein (Magnetit Fe_3O_4) natürlich vorkommt, der die Eigenschaft hat, anderen Magnetstein und Eisen anzuziehen. Bereits um 1000 waren in China magnetische Nadeln als Richtungsweiser bekannt. Der englische Enzyklopädist Alexander Neckam berichtet vom Kompass.

Der Kreuzfahrer Petrus Peregrinus de Maricourt gab 1269 in seiner *Epistola de magnete* eine genaue Beschreibung der Magnetsteine. Er legte auf einen runden Magnetstein an verschiedenen Stellen eine Eisennadel und markierte die Richtungen, welche die Nadel einnahm. Er fand, dass diese Kreise wie die Meridiane der Erde verliefen und sich in zwei Punkten trafen, die er Pole nannte. Er beobachtete, dass ein zerbrochener Magnet zwei Magnete mit Nord- und Südpol bildet, es also keine magnetischen Monopole gibt.

Von zwei magnetischen Polen der Erde sprach zuerst 1588 Livio Sanuto. William Gilbert gab 1600 eine umfassende Darstellung in seiner Arbeit *De magnete*. Er betont, dass die Erde ein großer Magnet ist.

Ähnlich dem Kraftgesetz zwischen Ladungen untersuchte man auch das Kraftgesetz zwischen den Polen von Magneten. Newton gab an, dass die Wechselwirkung fast mit $1/r^3$ abfällt. Michell fand 1750 auf Grund eigener Messungen wie auch denen von Brook Taylor und Musschenbroek das $1/r^2$-Gesetz, wie auch Tobias Mayer 1760, Lambert 1766. Dies führte rasch zu der Vorstellung von 'magnetischen Flüssigkeiten' im Sinne magnetischer Ladungen analog zu elektrischen. Coulomb vertrat die These, dass der Magnetismus in Molekülen gefangen sei, und nur

that one has an analog equation in electrostatics. Thus he has introduced the electrostatic potential and has stated that it is constant over the surface of a conductor. In 1828 George Green continued the calculations of Poisson. We know Green's theorem (B.67). Green's functions are named after him.

William Thomson (Lord Kelvin) (1845) and Mossotti (1847) formulated on the basis of Faraday's considerations the relation between electric field and polarisation, $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \epsilon\mathbf{E}$, $\rho_P = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}$, which we showed in sect. 6.

30.c Magnetostatics

Magnets were already known in antiquity. Their name is derived from the city of Magnesia in Thessalia, where load stone (magnetite Fe_3O_4) occurs naturally, which has the property to attract other load stone and iron. Already about the year 1000 in China magnetic needles were known to have directive properties. The English encyclopedist Alexander Neckam reports on the compass.

In 1269 The crusader Petrus Peregrinus de Maricourt gave a precise description of magnetic stones in his *Epistola de magnete*. He laid an iron needle on a round magnetic stone and marked the directions which was assumed by the needle. He found that these lines formed circles like the meridians of the earth which passed through two points, which he called poles. He observed that a magnet broken into two pieces constitute again magnets with North and South poles; thus no magnetic monopoles exist.

In 1588 the idea of two magnetic poles of the earth was first noted by Livio Sanuto. In 1600 William Gilbert gave a comprehensive review in his work *De magnete*. He emphasizes that the earth is a large magnet.

Similarly to the force law between charges the force between poles of a magnet was investigated. Newton found a law close to $1/r^3$. In 1750 Michell found the $1/r^2$-law based on own measurements and on those of Brook Taylor and Musschenbroek, similarly in 1760 Tobias Mayer and in 1766 Lambert. This led soon to the idea of a 'magnetic fluid' in the sense of magnetic charges similarly to electric ones. Coulomb put forward the thesis that magnetism is captured in molecules and only inside molecules both magnetic fluids can be separated and yield magnetization.

innerhalb dieser könnten sich die beiden magnetischen Flüssigkeiten trennen und so eine Magnetisierung bewirken. (Die TAYLOR-Reihe ist nach BROOK TAYLOR benannt, obwohl sie schon vorher bekannt war).

(TAYLOR series are named after BROOK TAYLOR, although they were known before.)

POISSON führte 1824 nach dem elektrischen Potential auch ein magnetisches, ähnlich dem in Unterabschnitt 11.b, ein sowie den quantitativen Begriff der Magnetisierung. Eine weiterführende Theorie wurde von GREEN 1828 gegeben.

In 1824 POISSON introduced a magnetic potential besides the electric one similarly to the one in subsection 11.b and introduced magnetization quantitatively. In 1828 this theory was extended by GREEN.

WILLIAM THOMSON (LORD KELVIN) stellte 1847 die Gleichungen $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ und $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{0}$ für den stromfreien Raum auf, führte die Beziehung $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$ ein, fand den Ausdruck für die magnetische Energiedichte und schloss daraus, dass in der Beziehung $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, die schon POISSON 1824 mit einem Tensor μ für anisotrope Kristalle einführte, μ symmetrisch sein muss. Er prägte die Begriffe Suszeptibilität und Permeabilität.

WILLIAM THOMSON (LORD KELVIN) introduced the equations $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ and $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{0}$ for current-free space, introduced the relation $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$, obtained the expression for the magnetic energy density and concluded that in the relation from the expression $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, which had already been given in 1824 by POISSON with a tensor μ for anisotropic crystals the tensor μ has to be symmetric. He coined the notions susceptibility and permeability.

30.d Aufbruch zur Elektrodynamik

Lange stellten Elektrizität und Magnetismus zwei von einander unabhängige Phänomene dar. Einen ersten Hinweis auf eine Beziehung ergab sich durch die Beobachtung, dass ein Blitz eine Kompassnadel ausschlagen ließ. Auch gab es vereinzelt Fälle, in denen durch Blitzschlag Magnete ummagnetisiert wurden oder Eisen magnetisiert wurde: 1731, so wird berichtet, schlug ein Blitz in eine Kiste mit Messern und Gabeln, die schmolzen. Beim Aufheben bemerkte man, dass herumliegende Nägel angezogen wurden. Ein Schiff, das 1681 nach Boston fuhr, wurde vom Blitz getroffen. Anschließend zeigten die Kompassnadeln in die umgekehrte Richtung.

30.d Set out for Electrodynamics

For a long time electricity and magnetism were two separate phenomena. A first hint on a connection was the observation that lightnings made compass needles deflected. Occasionally it happened that during lightning the magnetization of magnets was reversed or that iron became magnetic: It is reported that in 1731 a flash hit a box filled with knives and forks, which melted. When they were taken up some nails which laid around were attracted. In 1681 a ship bound for Boston was hit by a flash. After this stroke the compasses showed into the opposite direction.

Experimentell verbesserte sich die Situation, als VOLTA um 1800 den Prototyp der Batterie mit der nach ihm benannten Säule erfand, die es erlaubte, stetige Ströme zu erzeugen. Tatsächlich stand damit jetzt eine elektrische Leistung zur Verfügung, die die bisherige elektrostatische um einen Faktor 1000 überstieg.

About 1800 the experimental situation improved when VOLTA invented what is called the VOLTA pile, a prototype of battery. Now it was possible to generate continuous electric currents with a power improved by a factor 1000 over the electrostatic one.

1820 beobachtete ØRSTED, dass eine Magnetnadel durch einen parallel dazu fließenden Strom abgelenkt wurde. Diese Entdeckung verbreitete sich wie ein Lauffeuer in Europa. BIOT und SAVART bestimmten noch im gleichen Jahr quantitativ die Kraft eines geraden Stromes auf einen Magneten. Auf Grund einer Rechnung von LAPLACE für einen geraden Draht und einem anderen Experiment mit einem V-förmigen

In 1820 ØRSTED observed that a magnetic needle was deflected by a parallel flowing current. This discovery spread like wildfire in Europe. BIOT and SAVART determined in the same year quantitatively the force of a straight current on a magnet. On the basis of a calculation of LAPLACE for the straight wire and another experiment with a V-shaped wire, BIOT abstracted in 1824 the force between a magnetic pole and a current

Draht erschloss Biot 1824 die Kraft zwischen einem magnetischen Pol und und einem Leiterelement, was im wesentlichen dem nun nach Biot und Savart benannten Gesetz entspricht.

element, which is basically what we now call the law of Biot and Savart.

Ampère nahm 1820 ein Kraft-Gesetz der Form

In 1820 Ampère assumed a law of force of the form

$$\mathbf{K} = I_1 I_2 \oint\oint \hat{\mathbf{r}}_{12}\,(f_1(r_{12})(\mathrm{d}\mathbf{r}_1 \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_2) + f_2(r_{12})(\hat{\mathbf{r}}_{12} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_1)(\hat{\mathbf{r}}_{12} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_2))\,,$$
$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \hat{\mathbf{r}}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}. \tag{30.1}$$

zwischen zwei von Strömen I_1 und I_2 durchflossenen Schleifen an. Durch Vergleich mit seinen Messungen erhielt er $f_1 = A/r_{12}^2$, $f_2 = B/r_{12}^2$. Jeder dieser beiden Beiträge ergibt einzeln bei geeigneter Wahl von A bzw. B die Kraft zwischen zwei geschlossenen Leiterschleifen, vgl. (9.21). Ampère hatte aber bereits beobachtet, dass die Kraft auf ein Leiterelement senkrecht zu diesem steht, was mit $B = -3A/2$ erfüllt wird. So steckt bereits in seinem Kraft-Gesetz die Lorentz-Kraft, obwohl er den Begriff eines magnetischen Feldes nicht verwendet.

between two circuits with currents I_1 and I_2. In comparison with his measurements he obtained $f_1 = A/r_{12}^2$, $f_2 = B/r_{12}^2$. Each one of these contributions yields separately by an appropriate choice of A and B, resp., the force between two closed circuits, compare (9.21). Ampère had already observed that the force on a line element of the conductor is perpendicular to it, which is fulfilled by $B = -3A/2$. Thus his force law includes already the Lorentz force, although he did not use the notion of a magnetic field.

Nach Vorarbeiten von Ampère und Arago konstruierte William Sturgeon 1825 einen Elektromagneten, der das zwanzigfache seines Gewichtes tragen konnte.

After some preliminary work by Ampère and Arago, William Sturgeon constructed in 1825 an electromagnet which could hold twenty times its own weight.

Humphrey Davy fand 1821, dass der Leitwert ('leitende Kraft') von Metallen proportional ihrem Querschnitt und invers proportional ihrer Länge waren. Georg Wilhelm Ohm fand 1826-27 in seiner Arbeit *Die galvanische Kette* den linearen Zusammenhang zwischen dem Strom durch einen Leiter und der Spannung, die am Leiter anliegt. Kirchhoff formulierte 1845 die nach ihm benannten Knoten- und Maschengesetze (13.10, 13.11).

In 1821 Humphrey Davy found that the conductance ('conducting power') of a metal is proportional to its cross-section and inverse proportional to its length. Georg Wilhelm Ohm found in his *Die Galvanische Kette* (1826-1827) the linearity between the current through a conductor and the voltage applied to the conductor. In 1845 Kirchhoff formulated the current and the voltage laws (13.10, 13.11) named after him.

Michael Faraday, ein Buchbindergeselle mit naturwissenschaftlichen Interessen, bewarb sich 1812 um eine Anstellung bei der Royal Institution in London. Sein Direktor, Humphrey Davy, akzeptierte ihn, kaum ahnend, dass er damit einen der größten zukünftigen Experimentatoren in seinem Institut aufgenommen hatte. (Nach Davys Tod wurde Faraday Direktor des Instituts.) Kurz nach der Entdeckung Ørsteds untersuchte Faraday die Experimente zur Elektrizität und zum Magnetismus, die er 1821 in dem *Historical Sketch of Electro-Magnetism* zusammenfasste. Angeregt durch die Influenz elektrischer Ladungen, d.h. die Beeinflussung elektrischer Ladungen auf einem Leiter durch andere Ladungen, untersuchte er, ob ein Strom in einem Leiterkreis einen Strom in einem anderen Leiterkreis anregen könne. Er fand, dass dies

In 1812 Michael Faraday, a bookbinder journeyman interested in science applied for a position at the Royal Institution in London. Its director, Humphrey Davy accepted the application, hardly anticipating that he had accepted one of the greatest future experimentalists to his institute. (After Davy's death Faraday became director of the institute.) Shortly after Ørsted's discovery Faraday investigated the known experiments in electricity and magnetism, which he reviewed in his *Historical Sketch of Electro-Magnetism* (1821). Inspired by the influence i.e. the effect of a charge on charges on a conductor, he investigated, whether a current may excite a current on another circuit. He found that this happened when the current in the first circuit changed. This was the starting point for the law of induction. (1831)

jeweils beim Verändern des Stromes im ersten Leiterkreis geschah. Dies war der Ausgangspunkt für das Induktionsgesetz (1831).

Als ein Politiker FARADAY fragte, was denn seine Entdeckungen wert seien, antwortete er: 'Im Moment weiss ich es noch nicht, aber eines Tages wird man sie besteuern können.' Bekannt sind natürlich auch FARADAYS Arbeiten zur Elektrolyse. Da er selbst keine klassische Ausbildung genossen hatte, bat er WILLIAM WHEELER, einen Philosophen und Mathematiker aus Cambridge um Hilfe bei der Wahl von Termini. Dabei entstanden die uns geläufigen Begriffe wie Elektrode, Anode, Kathode, Ion, Elektrolyse. FARADAY entdeckte auch den Diamagnetismus.

FARADAY arbeitete sehr viel mit dem Konzept elektrischer und magnetischer Feldlinien. Er machte sie durch Gipskriställchen und Eisenfeilspäne sichtbar. Diese Verfahren waren nicht neu, aber bei mathematischen Physikern in der Nachfolge NEWTONS, die das Konzept der Fernwirkung vorzogen, nicht populär. Bereits WILCKE machte die elektrischen Feldlinien sichtbar. Viele Experimente FARADAYS zur Elektrostatik hatte WILCKE bereits durchgeführt. Eine Zusammenstellung von Experimenten zum gleichen Thema beider Physiker findet sich in der *Geschichte der Physik* von HOPPE. Die magnetischen Kraftlinien wurden schon von NICCOLO CABEO (1629) und PETRUS PEREGRINUS (1269) sichtbar gemacht. Der Leser überlege sich, wieso elektrische und magnetische Kraftlinien durch länglich geformte Körper hoher Dielektrizitätskonstante oder Suszeptibilität sichtbar gemacht werden.

FARADAY hatte eine recht präzise Vorstellung vom magnetischen Feld. Er betrachtete es als Röhren von Feldlinien mit der Eigenschaft, dass das Produkt aus der Feldstärke und dem Querschnitt proportional ist, was der Divergenzfreiheit entspricht. Er stellte fest, dass der induzierte Strom proportional zur Anzahl der Feldlinien ist, die der Leiter überstreicht; wir sagen heute proportional zur Änderung des magnetischen Flusses.

Der Name Elektron wurde 1890 von JOHNSTONE STONEY geprägt. Vorher wurden auch (die heutigen) Elektronen als Ionen bezeichnet.

30.e Elektrodynamik und Wellen

FARADAY beobachtete 1845, dass polarisiertes Licht, das man durch Glas schickt, seine Polarisationsebene ändert, wenn parallel zum Strahl ein Magnetfeld angelegt wird. Das veranlasste ihn zur Vermutung, dass

When a politician asked FARADAY, what his discoveries are worth, he answered 'Presently I do not know, but may be they can be taxed one day.' Well-known are also FARADAY's investigations on electrolysis. Since he himself did not enjoy a classical education he asked WILLIAM WHEELER, a philosopher and mathematician from Cambridge to help him choose appropriate termini. They introduced the names electrode, anode, cathode, ion, electrolysis which are still in use. FARADAY discovered diamagnetism, too.

FARADAY often used the concept of electric and magnetic field lines. He made them visible by plaster shavings and iron filings. These procedures were not new, but they were not popular with mathematical physicists in the succession of NEWTON who preferred the concept of long-distance action. Already WILCKE made electric field lines visible. Many experiments of FARADAY on electrostatics were already performed by WILCKE. A survey of experiments of both physicists on the same topic is given in the *History of Physics* by HOPPE. The lines of magnetic force were already made visible by NICCOLO CABEO (1629) and by PETRUS PEREGRINUS (1269). The reader should consider why electric and magnetic lines of forces can be made visible by prolate bodies of large dielectric constant and susceptibility, resp.

FARADAY had a rather precise imagination of the magnetic field. He considered it as tubes of lines with the property that the product of magnitude and cross-section is constant, which corresponds to a divergency free field. He stated that the induced current is proportional to the number of field lines crossed by the circuit; we say today proportional to the change of the magnetic flux.

In 1890 the name electron was coined by JOHNSTONE STONEY. Before also (today's) electrons were called ions.

30.e Electrodynamics and Waves

In 1845 FARADAY observed that polarized light transversing glass changes its plain of polarization if a magnetic field is applied parallel to the ray. From this he conjectured that light is an electromagnetic

es sich beim Licht um einen elektromagnetischen Vorgang handelt.

Bei den Bemühungen um eine einheitliche Theorie des Elektromagnetismus gab es zwei Stoßrichtungen. Die eine ging vom Induktionsgesetz aus und führte das Vektorpotential **A** ein, die zweite verharrte bei der Fernwirkungstheorie und führte im Anschluss an die Untersuchungen Ampères geschwindigkeitsabhängige Kräfte ein.

Das Vektorpotential wurde auf Grund verschiedener Überlegungen eingeführt. Franz Neumann stellte 1845/48 fest, dass sich die Induktionsspannung als Zeitableitung des Integrals $\oint \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$ schreiben ließ. Auf Grund anderer Überlegungen, die uns heute nicht mehr so zwingend erscheinen, haben 1846 sowohl Wilhelm Weber als auch William Thomson (Lord Kelvin) das Vektorpotential eingeführt. Kirchhoff verwendete es 1857.

Kirchhoff (1848) und Riemann (1858) fiel auf, dass in den Kraftgleichungen für Ladungen und Ströme Faktoren eingehen, deren Dimension das Quadrat einer Geschwindigkeit c ist. Zwei Ladungen q_1 und q_2 im Abstand r üben die Coulomb-Kraft $q_1 q_2/r^2$ aufeinander aus, zwei Ströme I_1 und I_2 der Länge l im Abstand r ($r \ll l$) die Kraft $kI_1I_2l/(c^2r)$ mit einer Zahlenkonstanten k, die der Leser selbst bestimmen möge. Die Bestimmung von c zeigte, dass diese Geschwindigkeit gut mit der Lichtgeschwindigkeit übereinstimmte. Es waren dann Wheatstone 1834, Fizeau und Gounelle 1849, Foucault 1850, die erste Messungen zur Ausbreitungsgeschwindigkeit der Elektrizität durchführten, wobei sie Werte erhielten, die um einen Faktor zwei oder anderthalb zu groß oder zu klein waren. (Dass einige Werte größer als die Lichtgeschwindigkeit waren, war möglich, da nicht alle Anordnungen linear waren.)

Die Einführung unterseeischer Kabel zur Übertragung elektrischer Signale begann 1851 (Dover-Calais). William Thomson (Kelvin) fand 1854, dass sich für hinreichend hohe Frequenzen eine gedämpfte Welle mit nahezu konstanter Geschwindigkeit ausbreitet. Kirchhoff fand 1857, dass diese Geschwindigkeit für kreisförmigen Querschnitt mit der Geschwindigkeit c übereinstimmte, die auch als Quotient zwischen den Kräften zwischen zwei Ladungen und zwei Strömen auftritt. Dieser Wert war kurz zuvor von Wilhelm Weber und Kohlrausch zu 3.1×10^{10}cm/sec gemessen worden.

Schließlich war es Maxwell, dem es auf Grund seiner Vorstellungskraft und analytischen Begabung gelang, die Gleichungen der Elektrodynamik in sich geschlossen darzustellen. Er hatte durch das Studium

phenomenon.

In order to obtain a unified theory of electromagnetism there were mainly two directions of effort. One started out from the law of induction and introduced the vector-potential **A**, the other stayed mainly with the theory of action on distance following Ampère's investigations and introduced velocity dependent forces.

The vector-potential was introduced on the basis of various considerations. In 1845/48 Franz Neumann found in that the voltage of induction could be expressed as the time-derivative of the integral $\oint \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$. In 1846 the vector potential was also introduced by Wilhelm Weber and William Thomson (Lord Kelvin) on the basis of other considerations which today are no longer that convincing. In 1857 Kirchhoff used it.

In 1848 Kirchhoff and in 1858 Riemann realized that the equations of forces for charges and currents differed by a factor which is the square of a velocity c. Two charges q_1 and q_2 at distance r exert the Coulomb force $q_1 q_2/r^2$ on each other, two wires of length l at distance r ($r \ll l$) carrying currents I_1 and I_2 exert the force $kI_1I_2l/(c^2r)$ on each other with a number k, which may be determined by the reader. The determination of c showed that this velocity agreed well with that of light. In 1834 first measurements of the propagation of electricity were performed by Wheatstone, in 1849 by Fizeau and Gounelle, and in 1850 by Foucault. They yielded velocities which were larger or smaller by factors of two or three-half from the velocity of light. (That some velocities were larger then light velocity was only possible because some arrangements were not linear).

In 1851 the construction of cables under water for the transmission of electric signals began (Dover-Calais). In 1854 William Thomson (Kelvin) found that at sufficiently high frequencies a damped wave propagates with approximately constant velocity. Kirchhoff showed by calculation that the velocity for a circular cross-section agrees with the velocity c, which appears in the ratio of the forces between charges and currents. This value had been measured shortly before by Weber and Kohlrausch to 3.1×10^{10}cm/sec.

Finally it was Maxwell who succeeded due to his imagination and analytic facilities to present the equations of electrodynamics in closed form. Studying Faraday's *Experimental Researches* he had learned a

Faradays *Experimenteller Untersuchungen* viel gelernt und doch die notwendige Abstraktion behalten. An Forbes schrieb er 1857, dass er 'keineswegs ein Konvertit zu den Ansichten Faradays' war, aber 1858 schrieb er über Faraday als 'dem Kern alles elektrischen seit 1830.'

Maxwell verwendete immer noch viele mechanische Analogien wenn er etwa die Felder **B** und **D** als Geschwindigkeiten einer inkompressiblen Flüssigkeit betrachtet. Er bemerkte 1861, dass in der Gleichung $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$ der Verschiebungsstrom $\dot{D}/(4\pi)$ zu **j** hinzuzufügen ist, so dass die Erhaltung der Ladung gewährleistet ist. Aus diesen Gleichungen fand er, dass die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit durch c, das im Verhältnis der Kräfte zwischen Ladungen und Strömen auftritt, gegeben ist, was sehr gut mit den gemessenen Werten übereinstimmte. Daraus schloss er 'Wir können kaum die Einlassung umgehen, dass das Licht aus den transversalen Wellen des gleichen Mediums besteht, das die Ursache der elektrischen und magnetischen Phänomene ist.' Maxwells Gleichungen enthielten die Potentiale Φ und **A**, wobei er die Eichung verwendete, die wir Coulomb-Eichung nennen. Den kompletten Satz der Gleichungen der Elektrodynamik hatte er 1864 in seiner Arbeit *On a Dynamical Theory of the Electromagnetic Field* vorgestellt. Sein komplettes Lehrbuch *Treatise on Electricity and Magnetism* erschien 1871.

1867 veröffentlichte Ludvig Valentin Lorenz seine Theorie des Elektromagnetismus, die den Verschiebungs-Strom enthielt und die mit der nach ihm benannten Eichung die Ausdrücke (21.14) und (21.15) für die retardierten Potentiale enthielt. Die Arbeit fußte auf der Potentialtheorie von Franz Neumann. Auch Riemann fand 1858 diese retardierten Potentiale, doch wurde seine Arbeit erst 1867 zusammen mit der Lorenzschen veröffentlicht. Vieles, was Ludvig Lorenz fand, wurde später dem Holländer Hendrick Lorentz zugeschrieben, der umfassende Arbeiten zur Elektrodynamik schrieb. Dabei spielte auch die Fast-Namensgleichheit eine Rolle, wie auch die unberechtigte Kritik Maxwells (1886) 'Aus den Annahmen dieser beiden Arbeiten können wir die Folgerungen ziehen, erstens, dass Kraft und Gegenkraft nicht immer gleich und entgegengesetzt sind, und zweitens, dass man Apparate konstruieren kann, die beliebige Mengen Arbeit aus ihren Mitteln produzieren können.' Ironischerweise hatte Maxwell nicht bedacht, dass auch in den Feldern Energie und Impuls steckt. Die Lorentz-Lorenz-Beziehung (1880), die der Clausius-Mossotti-Beziehung (6.34) äquivalent ist, wenn man ϵ durch das Quadrat n^2 des

lot and still maintained the necessary abstraction. In 1857 he wrote to Forbes that he was 'by no means as yet a convert to the views which Faraday maintained', but in 1858 he wrote about Faraday as 'the nucleus of everything electric since 1830.'

Maxwell still worked a lot using mechanical analogies when he considered the fields **B** and **D** as velocities of an incompressible fluid. In 1861 he realized that in the equation $\operatorname{curl}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$ the displacement current $\dot{D}/(4\pi)$ had to be added to **j**, so that conservation of charge was guaranteed. From these equations he found that the velocity of light in vacuum was given by the factor c appearing in the ratio between forces between charges and currents, which agreed very well with the measured ones. He concluded: 'We can scarcely avoid the interference that light consists in the transverse undulations of the same medium which is the cause of electric and magnetic phenomena.' Maxwell's equations contained the potentials Φ and **A**, where he used the gauge we call Coulomb gauge. In 1864 he presented the complete set of electrodynamic equations in his paper *On a Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*. In 1871 his monograph *Treatise on Electricity and Magnetism* was published.

In 1867 Ludvig Valentin Lorenz published his theory of electromagnetism, which contained the displacement current and the expressions (21.14) and (21.15) for the retarded potentials in which he had used the gauge named after him. The paper was based on the potential theory of Franz Neumann. In 1858 Riemann had found the retarded potentials, too. However, his paper was published only in 1867 together with that of Lorenz. Much of what Ludvig Lorenz found, was later attributed to the Dutch Hendrick Lorentz who wrote comprehensive papers on electrodynamics. This might be also due to their nearly equal names as well as Maxwell's inadequate criticism (1868) 'From the assumptions of both these papers we may draw the conclusions, first, that action and reaction are not always equal and opposite, and second, that apparatus may be constructed to generate any amount of work from its resources.' Ironically Maxwell did not realize that the fields contained energy and momentum. The Lorentz-Lorenz relation (1880) which is equivalent to the Clausius-Mossotti relation (6.34) when one replaces ϵ by the square n^2 of the index of refraction goes back to both of them.

Brechungsindex ersetzt, geht auf beide zurück.

In seinem *Treatise on Electricity and Magnetism* leitete MAXWELL den Spannungstensor des elektromagnetischen Feldes her. Der POYNTING-Vektor als Dichte des elektromagnetischen Energiestroms wurde von POYNTING 1884 und von HEAVISIDE 1885 gefunden. Schließlich fand J.J. THOMSON 1893, dass die elektromagnetische Impulsdichte durch den POYNTING-Vektor ausgedrückt werden kann.

In his *Treatise on Electricity and Magnetism* MAXWELL derived the stress tensor of an electromagnetic field. The POYNTING vector as the current density of electromagnetic energy was found by POYNTING (1884) and by HEAVISIDE (1885). In 1893 J.J. THOMSON finally found that electromagnetic momentum can be expressed by the POYNTING vector.

1889 gab HEAVISIDE den Ausdruck (1.17) für die Kraft an, die auf eine Ladung in einem Magnetfeld wirkt. 1881 hatte J.J. THOMSON, der Kathodenstrahlen untersuchte, den halben Wert dafür angegeben. LORENTZ gibt das korrekte Ergebnis in seiner Arbeit aus dem Jahr 1895 an. Sie wird heute als LORENTZ-Kraft bezeichnet. MAXWELL gab bereits 1864 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ als Beitrag zur elektromotorischen Kraft in einem bewegten Körper an.

In 1889 HEAVISIDE gave the expression (1.17) for the force on a charge moving in a magnetic field. J.J. THOMSON who investigated cathode rays, had given it as half this amount in 1881. In 1895 LORENTZ gives the correct result in his treatise. Today it is called LORENTZ force. Already in 1864 MAXWELL gave the contribution $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ to the electromotive force in a moving body.

Schon WILCKE (1758) und FARADAY (1837) hatten den Begriff der Polarisierung eines Isolators eingeführt. Die Vorstellung, dass die Magnetisierung auf atomaren Strömen beruht, findet sich bereits bei COULOMB, AMPÈRE und THOMSON (KELVIN). Dieser Zusammenhang tritt in den Formulierungen MAXWELLS nicht klar heraus. Es ist das Verdienst LORENTZ', dass er 1895 mit seiner *Elektronentheorie* die Felder **E** und **B** als elementare Felder einführte und klarstellte, dass die beiden anderen **D** und **H** nur durch Polarisation und Magnetisierung entstehen. 'Sitz des elektromagnetischen Feldes ist der leere Raum. Es gibt in diesem nur *einen* elektrischen und *einen* magnetischen Feld-Vektor. Dieses Feld wird erzeugt durch atomistische elektronische Ladungen, auf welche das Feld ponderomotorisch zurückwirkt. Eine Verknüpfung des elektromagnetischen Feldes mit der ponderablen Materie besteht nur dadurch, dass elektrische Elementarladungen mit atomistischen Bausteinen der Materie starr verbunden sind.' Lorentz hat damit eine klare Trennung zwischen Elektrodynamik und den Eigenschaften der kondensierten Materie durchgeführt.

Already WILCKE (1758) and FARADAY (1837) introduced the notion of polarization of an insulator. The idea that magnetization is related to atomic currents was already found in the work of COULOMB, AMPÈRE and THOMSON (KELVIN). This connection is not clearly stated in MAXWELL's formulation. It is the merit of LORENTZ that in 1895 he introduced in his *Elektronentheorie* the fields **E** and **B** as fundamental fields and clarified that **D** and **H** are due to polarization and magnetization. 'Seat of the electromagnetic field is the empty space. In this space there is only one electric and one magnetic field-vector. This field is generated by atomistic electronic charges, onto which the fields in turn act ponderomotorically. A connection of the electromagnetic field with the ponderable matter exists only since the electric elementary charges are rigidly tied to the atomistic building blocks of matter.' Lorentz was able to provide a clear cut between electrodynamics and the properties of condensed matter.

ALFRED LIÉNARD und EMIL WIECHERT gaben 1898 und 1900 die Potentiale einer beliebig bewegten Punktladung an.

ALFRED LIÉNARD (1898) and EMIL WIECHERT (1900) determined the potentials of an arbitrarily moving point charge.

MAXWELL fand bereits 1873, dass das Magnetfeld unter der Eichtransformation $\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\chi$ invariant ist. Doch untersuchte er nicht die Konsequenzen für das skalare Potential. LORENTZ gab 1904 die allgemeine Eichtransformation an.

In 1873 MAXWELL already realized that the magnetic field is invariant under a gauge transformation $\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\chi$. However, he did not consider the consequences for the scalar potential. In 1904 LORENTZ gave the general gauge transformation.

Neben LORENTZ haben wir es vor allem auch HENRI POINCARÉ, OLIVER HEAVISIDE und HEINRICH HERTZ zu verdanken, dass sie die Grundzüge der

Besides to LORENTZ we are indebted to HENRI POINCARÉ, OLIVER HEAVISIDE and HEINRICH HERTZ for working out MAXWELL's theory more clearly so that it

Maxwellschen Theorie klarer herausgearbeitet haben, so dass diese eine allgemeine Verbreitung fand.

Larmor und Schwarzschild führten 1900 und 1903 das Prinzip der kleinsten Wirkung für das kombinierte System des elektromagnetischen Felds und geladener Teilchen ein.

Michelson und Mitarbeiter bestimmten seit 1878 die Lichtgeschwindigkeit mit hoher Präzision. Es war letztendlich Heinrich Hertz, dem es 1886 gelang, elektromagnetische Wellen herzustellen (Hertzscher Dipol) und zu detektieren, zunächst im Meter-Bereich, dann auch kürzere. Wiener wies 1890 die Wellennatur des Lichtes nach, indem er es auf einen Spiegel auffallen ließ und die periodische Schwärzung der Photoschicht durch die stehenden Wellen erhielt.

found a broad distribution.

In 1900 and 1903, resp., Larmor and Schwarzschild introduced the principle of least action for the combined system of the electromagnetic field and charged particles.

Since 1878 Michelson and collaborators determined the velocity of light with high precision. Finally Heinrich Hertz succeeded in 1886 to produce electromagnetic waves (Hertzscher Dipol) and to detect them, initially in the range of meters, later also shorter ones. In 1890 Wiener proved the wave-nature of light by reflecting it on a mirror and obtaining a periodic blackening of the photographic emulsion by the standing waves.

30.f Relativitätstheorie

Um die Geschwindigkeit der Erde gegen den postulierten Äther zu bestimmen, führten Michelson und Morley ihr Experiment erstmals 1887 mit negativem Ergebnis durch: Keine Bewegung gegen den Äther konnte festgestellt werden. Fitzgerald postuliert 1889, dass sich alle Gegenstände in Richtung der Bewegung gegen den Äther verkürzen. Lorentz gibt 1892 die Verkürzung bis Ordnung v^2/c^2 an (Lorentz-Kontraktion, Unterabschnitt 23.b.β). Wesentlich war Lorentz' Beobachtung, dass die Annahme eines Äthers, der sich mit Materie bewegt, falsch war.

Voigt fand 1887, dass die homogene Gleichung $\Box\Phi = 0$ mit dem d'Alembert-Operator $\Box$ (20.13) unter einer Klasse von linearen Transformationen der $\mathbf{x}$ und t invariant ist. Larmor gab in seiner 1898 fertiggestellten und 1900 erschienen Arbeit *Äther und Materie* bereits die Transformation (23.2) an. Welchen Einfluss dies auf Lorentz hatte, ist nicht bekannt. 1898 zog Poincaré bereits den Begriff der Gleichzeitigkeit in Zweifel. 1899 gab Lorentz die nach ihm benannte Transformation mit einem unbestimmten Skalenfaktor, der dem Faktor f nach Gleichung (23.14) entspricht, an.

1904 fand Lorentz, dass die Maxwell-Gleichungen ohne Ladungen und Ströme invariant unter den Transformationen (23.2) sind, falls man die Felder in geeigneter Weise mittransformiert (siehe Abschnitt 25). 1905 bemerkte Poincaré, dass man die Ladungs- und Stromdichten so transformieren kann, dass der volle Satz Maxwell-Gleichungen invariant unter Lorentz-Transformationen ist (vgl. Abschnitte 24 und 25).

30.f Theory of Relativity

In order to determine the velocity of the earth against the postulated ether Michelson and Morley performed their experiment initially in 1887 with the negative result: No motion against the ether was detected. In 1889 Fitzgerald postulated that all material objects are contracted in their direction of motion against the ether. Lorentz gave an expression for this contraction in 1892 up to order v^2/c^2 (Lorentz contraction, subsection 23.b.β). Essential was Lorentz's observation that the assumption of an aether carried along with matter was wrong.

In 1887 Voigt realized that the homogeneous equation $\Box\Phi = 0$ with the d'Alembert operator $\Box$ (20.13) is form invariant under a class of linear transformations of $\mathbf{x}$ and t. Larmor gives in his paper *Ether and Matter* written in 1898 and published in 1900 already the transformation (23.2). It is unknown whether this had an influence on Lorentz. Already in 1898 Poincaré expressed doubts on the concept of simultaneity. In 1899 Lorentz stated the transformation called after him, but with an undetermined scale factor, which corresponds to the factor f after eq. (23.14).

In 1904 Lorentz found that Maxwell's equations without charges and currents are invariant under the transformations (23.2) provided that the fields are transformed in an appropriate way (see section 25). In 1905 Poincaré realized that the charge and current densities could be transformed so that the full set of Maxwell's equations are invariant in form under Lorentz transformations (compare sections 24 and 25).

Einstein formulierte 1905 in Unkenntnis der Arbeit von Lorentz und gleichzeitig mit der oben genannten Arbeit von Poincaré die spezielle Relativitätstheorie in einer allgemeinen und vollständigen Weise. Er bemerkte, dass die Idee einer konstanten Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen eine Realität ist, die nicht nur die Elektrodynamik, sondern die gesamte Physik einschließlich der Mechanik beherrscht, und welche die Galilei-Invarianz ablöst. Der Grund, dass es so lange dauerte, die (spezielle) Relativitätstheorie zu entwickeln und die Wissenschaftler davon zu überzeugen, dass diese die Realität beschreibt, ist die Rolle, welche die Zeit in ihr spielt.

In 1905 Einstein without the knowledge of Lorentz's paper and simultaneously with Poincaré's work mentioned above formulated the theory of special relativity in a general and complete way. He realized that the idea of a constant velocity of light in all systems of inertia constitutes a reality which governs all physics including mechanics and not only electrodynamics and which has to replace Galileian invariance. The reason that it took so long to develop the theory of (special) relativity and to convince scientists that it describes the reality, is the role of time in this theory.

Es war (und ist für manchen noch heute) schwierig zu akzeptieren, dass man den Begriff einer absoluten (d. h. vom Inertialsystem unabhängigen) Gleichzeitigkeit aufgeben muss. Mehr zur Geschichte findet man in *A. Pais, "Raffiniert ist der Herrgott..." Albert Einstein, Vieweg Verlag Braunschweig*. Ein anderes Problem besteht darin, dass damit der Äther als Referenzsystem verschwand.

It was (and still is for some persons) difficult to accept that the idea of absolute (that is independent of the system of inertia) simultaneity has to be abandoned. More on the history can be found in *A. Pais, "Subtle is the Lord ..." Albert Einstein, Oxford University Press*. Another problem is that now the ether as a system of reference disappeared.

Eine elegante Formulierung des vierdimensionalen Raums wurde von Minkowski 1908 eingeführt, die von Einstein zunächst als überflüssig bezeichnet, später von ihm aber als nützlich geschätzt wurde. Ausgehend von der speziellen Relativitätstheorie, die in einem ebenen Raum beschrieben wird, entwickelte Einstein die allgemeine Relativitätstheorie unter der Annahme, dass die Gravitation durch eine Krümmung des Raums bewirkt wird.

An elegant formulation of the four-dimensional space was introduced by Minkowski in 1908, which was considered by Einstein initially as superfluous, but later as very useful. Starting from the special theory of relativity, which acts in a planar space, Einstein developped the general theory of relativity assuming that gravitation yields a curved space.

30.g Von der klassischen zur Quanten-Elektrodynamik

Im Jahre 1900 stellte Max Planck zunächst eine Interpolationsformel zwischen den beiden Grenzfällen für die Energieverteilung des schwarzen Strahlers in Abhängigkeit der Strahlungsfrequenz her, nämlich dem Rayleigh-Jeans-Gesetz (1900-1905) für niedrige Frequenzen und dem Wienschen Gesetz (1896) für hohe Frequenzen, das Plancksche Strahlungs-Gesetz. Dieses stimmte hervorragend mit der Beobachtung überein. Wenige Monate später postulierte er, dass dies dadurch zu erklären sei, dass elektromagnetische Strahlung der Frequenz $\nu = \omega/(2\pi)$ keine beliebige Energie haben könne, sondern nur in ganzzahligen Vielfachen von $h\nu$ auftrete, wobei h eine neue Elementarkonstante ist, die man heute als Plancksches Wirkungsquantum bezeichnet. Diese Energiequantelung wurde alsbald durch den lichtelektrischen Effekt bestätigt: Die kinetische Energie der an einer

30.g From Classical to Quantum Electrodynamics

In 1900 Max Planck derived an interpolation formula between the two limit cases of the energy distribution of a black body radiator as a function of the frequency radiated, namely the Rayleigh-Jeans law (1900-1905) for low frequencies and the Wien law (1896) for high frequencies, the Planck radiation law. It agreed excellently with the observations. A few months later he postulated that this can be explained by the fact that electromagnetic radiation of frequency $\nu = \omega/(2\pi)$ cannot have arbitary energies but only integer multiples of $h\nu$, where h is a new fundamental constant now called Planck constant. This quantization of energy was soon confirmed by the photoelectric effect: The kinetic energy of electrons emitted from the surface of a metal by means of light is independent of the intensity of light but depends on its frequency (Lenard 1902).

Metalloberfläche ausgelösten Elektronen ist von der Lichtintensität unabhängig und hängt nur von der Frequenz des Lichts ab (Lenard 1902).

Von dieser Beobachtung bis zu einer Quanten-Theorie der Elektrodynamik dauerte es ein Vierteljahrhundert. Erst musste die Quantentheorie für die Teilchen, die man bisher als punktförmige Massen angesehen hatte, entwickelt werden, bis auch das elektromagnetische Feld quantisiert werden konnte (P.A.M. Dirac 1927, P. Jordan und W. Pauli, 1928; W. Heisenberg und W. Pauli, 1929; siehe z.B. W. Heitler, The Quantum Theory of Radiation).

It took a quarter of a century from this observation to the quantum theory of electrodynamics. First the quantum theory for the particles which hitherto had been considered point masses had to be developed until it was possible to quantize the electromagnetic field (P.A.M. Dirac 1927, P. Jordan and W. Pauli, 1928; W. Heisenberg and W. Pauli, 1929; see e.g. W. Heitler, The Quantum Theory of Radiation).

31 Gravitations-Zeitdilatation

31.a Lichtquant im Gravitationsfeld

Wir wollen hier noch einen Effekt der allgemeinen Relativitätstheorie betrachten, der sich elementar herleiten lässt, nämlich den unterschiedlichen Gang von Uhren im Gravitationspotential. Die Aussage ist, dass Uhren in verschiedenen Entfernungen eines massiven Körpers unterschiedlich rasch gehen, weiter entfernt schneller, näher daran langsamer. Dies ist ein Effekt, der beim Hafele-Keating-Experiment bereits beobachtet wurde. Bei diesem Experiment ließ man Caesium-Atomuhren im Flugzeug um die Erde fliegen (J. C. Hafele and R. E. Keating, Science 177, 166 (1972)). Dabei kann man einmal die Zeitdilatation beobachten, aber der Effekt, dass Uhren in verschiedenen Höhen unterschiedlich gehen, ist von der gleichen Größenordnung. Diesen zweiten Effekt wollen wir nun erklären.

Wir geben zwei Erklärungen: Die erste macht Gebrauch von der Erhaltung der Energie. (Zwar gilt in der allgemeinen Relativitätstheorie der Satz von der Erhaltung der Energie nicht mehr generell. In einem Raum, der außen hinreichend flach wird, gilt er aber trotzdem. Wir brauchen daher diesen Einwand nicht zu beachten.) Fällt ein Körper der Masse m um die Höhe h in einem Gravitationsfeld der Beschleunigung g, so gewinnt er $\delta E = mgh$ an kinetischer Energie. Dies gilt zumindest für Massen einer Geschwindigkeit $v \ll c$.

Das hat zur Konsequenz, dass auch Lichtquanten beim Fallen im Gravitationsfeld Energie gewinnen und beim Aufsteigen gegen das Feld Energie verlieren. Wäre das nicht der Fall, so könnte man ein Perpetuum mobile bauen, indem man Teilchen und Antiteilchen fallen lässt, unten in Lichtquanten zerstrahlen lässt. Diese lässt man nach oben fliegen und bildet wieder das Teilchen-Antiteilchenpaar, wobei man dann dem System die gewonnene potentielle Energie entnehmen könnte.
Da sich die Energien aller Masse um $\delta E = mgh = \frac{gh}{c^2}E$ verändert, muss dies auch für Lichtquanten gelten, das heißt wir finden für ein Lichtquant der Energie $E = \hbar\omega$

31 Gravitational Time Dilatation

31.a Light Quantum in the Gravitational Field

Finally we will consider an effect of the general theory of relativity, which can be derived in an elementary way, namely, the different behaviour of clocks in a gravitational potential. The statement is that clocks at different distances from a massive body run differently fast, those at further distance faster, the closer ones slower. This is an effect which had been observed in the Hafele-Keating experiment. In this experiment cesium atomic beam clocks were carried in an airplane around the earth (J.C. Hafele and R. E. Keating, Science 177, 166 (1972)). In this experiment one can observe time dilatation due to different velocities of the airplanes with respect to the center of the earth; but the effect that clocks run differently in different gravitational potentials is of the same order of magnitude. We will now explain this second effect.

We give two explanations: The first one uses the conservation of energy. (Actually, the theorem of conservation of energy does not hold in generally in the general theory of relativity. If however, the space becomes sufficiently plane at large distances then it is still valid. Therefore we need not consider this objection.) If a body of mass m falls the height h in a field of gravitation of acceleration g, then it gains $\delta E = mgh$ of kinetic energy. This holds at least for masses of velocity $v \ll c$.

As a consequence, light quanta will gain energy in falling in the field of gravitation and they loose energy while climbing against the field. If this were not true, then one could construct a perpetuum mobile by letting particles and anti-particles falling in the gravitational field, and having them irradiated into light quanta. These could now move up and recombine to a particle anti-particle pair, where one could extract the gained potential energy from the system.

Since the energies of all masses are changed by $\delta E = mgh = \frac{gh}{c^2}E$, the same has to hold for light quanta, that is we find for light quanta of energy $E = \hbar\omega$

$$\delta\omega = \frac{\delta E}{\hbar} = \frac{gh}{c^2}\frac{E}{\hbar} = \frac{gh}{c^2}\omega. \tag{31.1}$$

Dieser Verlust an Frequenz beim Verlassen eines Gravitationsfeldes ist als Rotverschiebung im Gravitationsfeld bekannt. Sie lässt sich zum Beispiel mit dem Mössbauer-Effekt messen. Der Frequenzverlust bei einem Höhenunterschied von etwa 20 m genügt bereits. Vergleichen wir nun den Gang zweier Atomuhren unten und oben mit einem Höhenunterschied h, dann beobachtet man oben, dass die Frequenz der unteren Uhr um $\delta\omega$ kleiner ist. Die obere Uhr geht also rascher um einen Faktor

This loss of frequency while leaving a gravitational field is known as the red shift in a gravitational field. It can be measured by means of the Mössbauer effect. A loss of frequency at a height of about 20 m is already sufficient. Thus if we compare the course of two atomic clocks down and up at a difference of height h, then one observes that the frequency of the lower clock is smaller by $\delta\omega$. The upper clock is thus faster by a factor of

$$1 + \frac{\delta\omega}{\omega} = 1 + \frac{gh}{c^2}. \tag{31.2}$$

31.b Äquivalenz-Prinzip

Die allgemeine Relativitätstheorie bedient sich nicht der Quantentheorie und damit der Beziehung $E = \hbar\omega$. Sie führt aber das Äquivalenz-Prinzip ein. Dieses

Prinzip sagt aus, dass sich ein Bezugssystem, das sich frei unter der Gravitationskraft bewegt, wie ein Inertialsystem verhält. Nehmen wir also an, wir betrachten ein System, das sich wie ein freifallender Fahrstuhl bewegt. Nehmen wir an, die untere Uhr sei zu einem bestimmten Zeitpunkt bezogen auf den Fahrstuhl in Ruhe und strahle mit der Frequenz ω nach oben. Bis dieses Licht bei der oberen Uhr angekommen ist, vergeht die Zeit $t = h/c$. Betrachtet von unserem freifallenden Fahrstuhl bewegen sich Erde und Uhren nach der Zeit t mit der Geschwindigkeit $v = gt$ nach oben. Ein Beobachter an der oberen Uhr wird also eine Dopplerverschiebung um die Frequenz $\delta\omega = \omega v/c$ beobachten (für das schwache Gravitationsfeld, das wir hier betrachten, genügt es im Unterabschnitt 25.e nur den Beitrag linear in β zu betrachten). Damit folgt eine Dopplerverschiebung von

31.b Principle of Equivalence

The general theory of relativity does not make use of quantum theory, i.e. it does not use the relation $E = \hbar\omega$. Instead it uses the principle of equivalence. This

principle says that a system of reference which moves freely in the gravitational field behaves like a system of inertia. Let us assume we consider a system which moves like a freely falling elevator. Let us assume the lower clock is at a certain time relative to the elevator at rest and radiates upwards with frequency ω. It takes the time $t = h/c$ until the light has arrived the upper clock. During that time the earth and the upper clock have gained the velocity $v = gt$ upwards as seen from the elevator. Thus an observer at the upper clock will observe a Doppler shift by the frequency $\delta\omega = \omega v/c$ (for the weak gravitational field we consider here it is sufficient to consider in subsection 25.e only the contribution linear in β). Thus we obtain the Doppler shift

$$\delta\omega = \frac{gh}{c^2}\omega, \tag{31.3}$$

was mit dem oben gewonnenen Ergebnis übereinstimmt.

which agrees with the result obtained above.

Sie werden jetzt fragen, wie kann man das Äquivalenz-Prinzip anwenden, wenn das Gravitationsfeld nicht überall in die gleiche Richtung und mit der gleichen Stärke wirkt. In der Tat wird dann die Beschreibung komplizierter. Man kann dann nämlich der Beschreibung nicht mehr einen ebenen Raum zu Grunde legen und muss sich dann ernsthaft in die allgemeine Relativitätstheorie einarbeiten.

Now you may ask, how can one apply the principle of equivalence, if the gravitational field does not point everywhere in the same direction and is of the same strength. Then, indeed, the description becomes more complicated. Then the description can no longer be founded on a flat space, and one has to dig seriously into the general theory of relativity.

Anhänge

Appendices

©2003 Franz Wegner Universität Heidelberg

A Umrechnung zwischen Maßsystemen der Elektrodynamik

Neben dem Gaussschen Maßsystem werden noch eine Reihe weiterer cgs-Systeme sowie das SI-System (internationales Maßsystem, Giorgi-System) verwendet.

Während das Gausssche Maßsystem alle elektromagnetischen Größen in cm, g und s ausdrückt, verwendet das Giorgi-System neben den mechanischen Einheiten m, kg und s noch zwei weitere Einheiten A (Ampere) und V (Volt), allerdings nicht unabhängig voneinander, vielmehr gilt für die Einheit der Energie

$$1\ \mathrm{kg\ m^2\ s^{-2}} = 1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{W\ s} = 1\ \mathrm{A\ V\ s}. \tag{A.1}$$

Die Umrechnung einiger gebräuchlicher Maßsysteme ineinander kann durch drei Umrechnungsfaktoren ϵ_0, μ_0 und ψ beschrieben werden. Dabei können ϵ_0 und μ_0 (im SI-System als Dielektrizitätskonstante und Permeabilitätskonstante des Vakuums bekannt) und die Verkettungskonstante

$$\gamma = c\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \tag{A.2}$$

dimensionsbehaftet sein, während ψ ein dimensionsloser Zahlenfaktor ist. Man unterscheidet zwischen rationalen Maßsystemen ($\psi = 4\pi$) und nicht rationalen Maßsystemen ($\psi = 1$). Die Umrechnungsfaktoren einiger gebräuchlicher Maßsysteme sind

Maßsystem / System of Units	ϵ_0	μ_0	γ	ψ
Gauss / Gaussian	1	1	c	1
Elektrostatisch / Electrostatic (esu)	1	c^{-2}	1	1
Elektromagnetisch / Electromagnetic (emu)	c^{-2}	1	1	1
Heaviside-Lorentz	1	1	c	4π
Giorgi (SI)	$(c^2\mu_0)^{-1}$	$\frac{4\pi}{10^7}\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$	1	4π

Die Feldstärken im Gaussschen Maßsystem drücken sich durch die Größen der anderen Maßsysteme (mit einem Stern versehen) folgendermaßen aus

$$\mathbf{E} = \sqrt{\psi\epsilon_0}\mathbf{E}^* \qquad \text{analog elektrisches Potential / analogously electric potential}$$
$$\mathbf{D} = \sqrt{\psi/\epsilon_0}\mathbf{D}^*$$

A Connection between different Systems of Units

Besides the Gaussian system of units a number of other cgs-systems is used as well as the SI-system (international system of units, Giorgi-system).

Whereas all electromagnetic quantities in the Gaussian system are expressed in cm, g und s, the Giorgi-system uses besides the mechanical units m, kg und s two other units, A (ampere) und V (volt). They are not independent, but related by the unit of energy

The conversion of some conventional systems of units can be described by three conversion factors ϵ_0, μ_0 and ψ. The factors ϵ_0 and μ_0 (known as the dielectric constant and permeability constant of the vacuum in the SI-system) and the interlinking factor

can carry dimensions whereas ψ is a dimensionless number. One distinguishes between rational systems $\psi = 4\pi$) and non-rational systems ($\psi = 1$). The conversion factors of some conventional systems of units are

The field intensities are expressed in Gaussian units by those of other systems (indicated by an asterisk) in the following way

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= 1/\sqrt{\psi\epsilon_0}\mathbf{P}^* && \text{analog Ladung, Strom und deren Dichten, analogously charge, current and their densities, elektrische Momente / electric moments}\\
\mathbf{B} &= \sqrt{\psi/\mu_0}\mathbf{B}^* && \text{analog Vektorpotential, magnetischer Fluss analogously vector potential, magnetic flux}\\
\mathbf{H} &= \sqrt{\psi\mu_0}\mathbf{H}^* &&\\
\mathbf{M} &= \sqrt{\mu_0/\psi}\mathbf{M}^* && \text{analog magnetische Momente / analogously magnetic moments}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Für die mit Leitfähigkeit und Widerstand verknüpften Größen gilt

One has for the quantities connected with conductivity and resistance

$$\begin{aligned}
\sigma &= 1/(\psi\epsilon_0)\sigma^* && \text{analog Kapazität / analogously capacity}\\
R &= \psi\epsilon_0 R^* && \text{analog Induktivität / analogously inductance}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Für die elektrische und magnetische Suszeptibilität gilt

For the electric and magnetic susceptibilities one obtains

$$\chi = \chi^*/\psi. \tag{A.5}$$

Wir erhalten damit die folgenden Gleichungen für beliebige Maßsysteme (d.h. der * ist jetzt weggelassen): Die Maxwell-Gleichungen in Materie lauten dann

We obtain the following equations for arbitrary systems of units (the * has now been removed): Maxwell's equations in matter read now

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{\gamma}(\dot{\mathbf{D}} + \frac{4\pi}{\psi}\mathbf{j}_\mathrm{f}), \tag{A.6}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \frac{4\pi}{\psi}\rho_\mathrm{f}, \tag{A.7}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{\gamma}\dot{\mathbf{B}}, \tag{A.8}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \tag{A.9}$$

Für die Materialgleichungen folgt

The material equations read

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \frac{4\pi}{\psi}\mathbf{P}, \tag{A.10}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \frac{4\pi}{\psi}\mathbf{M}. \tag{A.11}$$

Für die Lorentz-Kraft folgt

For the Lorentz force one obtains

$$\mathbf{K} = q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}{\gamma}) \tag{A.12}$$

Für die Energiedichte u und den Poynting-Vektor $\mathbf{S}$ folgen

For the energy density u and the Poynting vector $\mathbf{S}$ on obtains

$$u = \frac{\psi}{4\pi}\int(\mathbf{E}\cdot d\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}), \tag{A.13}$$

$$\mathbf{S} = \frac{\psi\gamma}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}. \tag{A.14}$$

Während im Gaussschen System alle Feldgrößen $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ und $\mathbf{M}$ in der Einheit

Whereas in Gaussian units all the fields $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ und $\mathbf{M}$ are measured in units

$$\sqrt{\mathrm{dyn}}/\mathrm{cm} = \sqrt{\mathrm{erg}/\mathrm{cm}^3} \tag{A.15}$$

gemessen werden, werden im GIORGI-System **E** in V/m, **D** und **P** in As/m^2, **B** in Vs/m^2, **H** und **M** in A/m gemessen.

Je nach Feldgröße entspricht 1 dyn$^{1/2}$ cm^{-1} im GAUSSschen System den folgenden Werten im GIORGI-System (analog für die weiteren in (A.3) und (A.4) angegebenen Größen)

the GIORGI system measures **E** in V/m, **D** and **P** in As/m^2, **B** in Vs/m^2, **H** and **M** in A/m.

Depending on the quantity 1 dyn$^{1/2}$ cm^{-1} in units of the GAUSSIAN system corresponds to (analogously for the quantities listed in (A.3) and (A.4))

$$\mathbf{E} = 3 \cdot 10^4 \text{ V/m} \tag{A.16}$$
$$\mathbf{D} = 10^{-5}/(12\pi) \text{ As/m}^2 \tag{A.17}$$
$$\mathbf{P} = 10^{-5}/3 \text{ As/m}^2 \tag{A.18}$$
$$\mathbf{B} = 10^{-4} \text{ Vs/m}^2 \tag{A.19}$$
$$\mathbf{H} = 10^3/(4\pi) \text{ A/m} \tag{A.20}$$
$$\mathbf{M} = 10^3 \text{ A/m}. \tag{A.21}$$

Für Widerstände gilt $c^{-1} \hat{=} 30\Omega$. Für genaue Berechnungen sind die Faktoren 3 (auch die 3 in $12 = 4 \cdot 3$) durch den Faktor 2.99792458 zu ersetzen. Diese Zahl multipliziert mit 10^8m/s ist die Lichtgeschwindigkeit.

For resistors one has $c^{-1} \hat{=} 30\Omega$. For precise calculations the factors 3 (including the 3 in $12 = 4 \cdot 3$) are to be replaced by the factor 2.99792458. This number multiplied by 10^8 m/s is the speed of light.

Für folgende vielgebrauchte Einheiten im GAUSSschen und im elektromagnetischen System sind eigene Namen üblich:

There are special names for the following often used units in the GAUSSian and electromagnetic system

magnetische Induktion / magnetic induction	1 dyn$^{1/2}$ cm^{-1}=1 G (Gauß)
magnetische Feldstärke / magnetic field intensity	1 dyn$^{1/2}$ cm^{-1}=1 Oe (Oerstedt)
magnetischer Fluss / magnetic flux	1 dyn$^{1/2}$ cm =1 Mx (Maxwell)

Im SI-System haben außer Ampere und Volt folgende Größen einen eigenen Namen:

The following quantities besides Ampere and Volt have their own names in the SI-system:

Ladung / charge	1 As =1 C (Coulomb)
Widerstand / resistance	1 V/A =1 Ω (Ohm)
Leitwert / conductance	1 A/V =1 S (Siemens)
Kapazität / capacitance	1 As/V =1 F (Farad)
Induktivität / inductivity	1 Vs/A =1 H (Henry)
magnetischer Fluss / magnetic flux	1 Vs =1 Wb (Weber)
magnetische Induktion / magnetic induction	1 Vs/m^2=1 T (Tesla).

Historisch ist das internationale oder SI-System aus dem elektromagnetischen System entstanden. Da in diesem die Einheiten für praktische Zwecke unbequem groß oder klein waren, wählte man für die Stromstärke 1 A = 10^{-1} dyn$^{1/2}$ und für die Spannung 1 V = 10^8 dyn$^{1/2}$ cm s^{-1}. GIORGI entdeckte, dass dann beim Übergang auf mks-Einheiten die Beziehung (A.1) gilt. Allerdings ging man dann vom nicht rationalen zum rationalen System über.

Historically the international or SI system was derived from the electromagnetic system. Since the units of this system where inconveniently large or small one introduced as unit for the current 1 A = 10^{-1} dyn$^{1/2}$ and for the voltage 1 V = 10^8 dyn$^{1/2}$ cm s^{-1}. GIORGI realized that changing to mks-units one obtains the relation (A.1). However, one changed also from non-rational to rational units.

B Formeln zur Vektorrechnung

Der Leser möge die Aufgaben B.11, B.15, B.34-B.50 und die Aufgabe nach B.71 selbst lösen oder die Ergebnisse dem Skriptum an anderer Stelle entnehmen.

B.a Vektoralgebra

B.a.α Summationskonvention und orthonormale Basis

Wir verwenden die Summationskonvention, die besagt, daß über alle Indices, die zweimal in einem Produkt auftreten, summiert wird. Daher steht

$$\mathbf{a} = a_\alpha \mathbf{e}_\alpha \tag{B.1}$$

für

$$\mathbf{a} = \sum_{\alpha=1}^{3} a_\alpha \mathbf{e}_\alpha = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3.$$

Wir setzen im Folgenden voraus, daß die Vektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ in der Zerlegung (B.1) ein orthonormales und ortsunabhängiges Rechtssystem darstellen. Dann sind a_1, a_2, a_3 die Komponenten des Vektors $\mathbf{a}$ bezüglich der Basis $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

B.a.β Skalarprodukt

Für das Skalarprodukt gilt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = a_\alpha b_\alpha, \tag{B.2}$$

insbesondere

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1 \begin{matrix}\text{für}\\ \text{for}\end{matrix} \alpha = \beta \\ 0 \begin{matrix}\text{für}\\ \text{for}\end{matrix} \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{B.3}$$

mit dem gegen Vertauschen der Indices symmetrischen KRONECKER-Symbol $\delta_{\alpha,\beta}$, und

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_\alpha = a_\alpha. \tag{B.4}$$

B.a.γ Vektorielles Produkt

Für das vektorielle Produkt gilt

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} a_\alpha b_\beta \mathbf{e}_\gamma = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3 \tag{B.5}$$

B Formulae for Vector Calculus

The reader is asked to solve the exercises B.11, B.15, B.34-B.50 and the exercise after B.71 by her- or himself or to take the results from the script where they are used.

B.a Vector Algebra

B.a.α Summation Convention and Orthonormal Basis

We use the summation convention which says that summation is performed over all indices, which appear twice in a product. Therefore

$$\mathbf{a} = a_\alpha \mathbf{e}_\alpha \tag{B.1}$$

stands for

$$\mathbf{a} = \sum_{\alpha=1}^{3} a_\alpha \mathbf{e}_\alpha = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3.$$

In the following we assume that the vectors $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ in (B.1) represent an orthonormal and space independent right-handed basis. Then a_1, a_2, a_3 are the components of the vector $\mathbf{a}$ with respect to the basis $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

B.a.β Scalar Product

The scalar product is defined by

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = a_\alpha b_\alpha, \tag{B.2}$$

in particular we have

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1 \begin{matrix}\text{für}\\ \text{for}\end{matrix} \alpha = \beta \\ 0 \begin{matrix}\text{für}\\ \text{for}\end{matrix} \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{B.3}$$

with the KRONECKER symbol $\delta_{\alpha,\beta}$ which is symmetric in its indices, and

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_\alpha = a_\alpha. \tag{B.4}$$

B.a.γ Vector Product

The vector product is given by

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} a_\alpha b_\beta \mathbf{e}_\gamma = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3 \tag{B.5}$$

mit dem total antisymmetrischen Levi-Civita-Symbol

with the total antisymmetric Levi-Civita symbol

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} +1 & \text{für / for } (\alpha,\beta,\gamma) = (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2) \\ -1 & \text{für / for } (\alpha,\beta,\gamma) = (1,3,2),(2,1,3),(3,2,1) \\ 0 & \text{sonst / otherwise} \end{cases} \tag{B.6}$$

Mit Determinanten schreibt man

Using determinants it can be written

$$\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha,1} & \delta_{\beta,1} & \delta_{\gamma,1} \\ \delta_{\alpha,2} & \delta_{\beta,2} & \delta_{\gamma,2} \\ \delta_{\alpha,3} & \delta_{\beta,3} & \delta_{\gamma,3} \end{vmatrix}. \tag{B.7}$$

Durch Multiplikation mit a_α, b_β und $\mathbf{e}_\gamma$ und Ausführen der Summe erhält man aus (B.5)

From (B.5) one obtains by multiplication with a_α, b_β and $\mathbf{e}_\gamma$ and summation

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \mathbf{e}_1 \\ a_2 & b_2 & \mathbf{e}_2 \\ a_3 & b_3 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}. \tag{B.8}$$

Insbesondere gilt

In particular one obtains

$$\mathbf{a}\times\mathbf{a} = \mathbf{0} \tag{B.9}$$

und

and

$$\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}\mathbf{e}_\gamma. \tag{B.10}$$

Man drücke die Summe

Express the sum

$$\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}\epsilon_{\zeta,\eta,\gamma} = \tag{B.11}$$

mit Hilfe von Kronecker-Deltas aus.

by means of Kronecker deltas.

B.a.δ Mehrfachprodukte

Für das Spatprodukt gilt

B.a.δ Multiple Products

For the scalar triple product one has

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}a_\alpha b_\beta c_\gamma = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{B.12}$$

Es ist

One has

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = [\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}] = [\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}] = -[\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b}] = -[\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}] = -[\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}]. \tag{B.13}$$

Für das Dreifach-Produkt folgt

For the vector triple product one has

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}. \tag{B.14}$$

Man drücke das Vierfach-Produkt

Express the quadruple product

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \tag{B.15}$$

mit Hilfe von (B.11) oder (B.14) durch Skalarprodukte aus.

by means of (B.11) or (B.14) in terms of scalar products.

B.b Vektoranalysis

B.b.α Räumliche Differentiation, Nabla-Operator

Die räumliche Differentiation wird mit dem Nabla-Operator ∇ durchgeführt. Er ist ein Differential-Operator mit Vektoreigenschaften, in kartesischen Koordinaten

$$\nabla = \mathbf{e}_\alpha \partial_\alpha, \tag{B.16}$$

wobei ∂_α für $\partial/\partial x_\alpha$ steht. Man bezeichnet

$$\nabla\Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\alpha \partial_\alpha \Phi(\mathbf{r}) = \text{ grad}\,\Phi(\mathbf{r}) \tag{B.17}$$

als Gradient,

$$(\mathbf{b}(\mathbf{r})\nabla)\mathbf{a}(\mathbf{r}) = b_\alpha(\mathbf{r})\partial_\alpha \mathbf{a}(\mathbf{r}) = (\mathbf{b}(\mathbf{r})\,\text{grad}\,)\mathbf{a}(\mathbf{r}) \tag{B.18}$$

als Vektorgradient,

$$\nabla\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \partial_\alpha a_\alpha(\mathbf{r}) = \text{ div}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) \tag{B.19}$$

als Divergenz und

$$\nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) = (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta)\partial_\alpha a_\beta(\mathbf{r}) = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}\partial_\alpha a_\beta(\mathbf{r})\mathbf{e}_\gamma = \text{ rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) \tag{B.20}$$

als Rotation.

B.b.β Zweifache Ableitung, Laplace-Operator

Soweit die Differentiationen vertauschbar sind, gilt

$$\nabla \times \nabla = \mathbf{0}, \tag{B.21}$$

woraus

$$\begin{aligned} \text{rot grad}\,\Phi(\mathbf{r}) &= \mathbf{0}, & \text{(B.22)}\\ \text{div rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) &= 0 & \text{(B.23)} \end{aligned}$$

folgt. Das Skalarprodukt

$$\nabla \cdot \nabla = \partial_\alpha \partial_\alpha = \triangle \tag{B.24}$$

wird als Laplace-Operator bezeichnet. Daher ist

$$\text{div grad}\,\Phi(\mathbf{r}) = \triangle\Phi(\mathbf{r}). \tag{B.25}$$

Man findet

$$\triangle\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \text{ grad div}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) - \text{ rot rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}), \tag{B.26}$$

indem man in (B.14) **a** und **b** durch ∇ ersetzt und den Vektor **c** stets auf die rechte Seite schafft.

B.b Vector Analysis

B.b.α Differentiation in Space, Del Operator

Differentiation in space is performed by means of the del-Operator ∇. It is a differential operator with vector properties. In cartesian coordinates it is written

$$\nabla = \mathbf{e}_\alpha \partial_\alpha, \tag{B.16}$$

where ∂_α stands for $\partial/\partial x_\alpha$. One calls

$$\nabla\Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\alpha \partial_\alpha \Phi(\mathbf{r}) = \text{ grad}\,\Phi(\mathbf{r}) \tag{B.17}$$

the gradient,

$$(\mathbf{b}(\mathbf{r})\nabla)\mathbf{a}(\mathbf{r}) = b_\alpha(\mathbf{r})\partial_\alpha \mathbf{a}(\mathbf{r}) = (\mathbf{b}(\mathbf{r})\,\text{grad}\,)\mathbf{a}(\mathbf{r}) \tag{B.18}$$

the vector gradient

$$\nabla\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \partial_\alpha a_\alpha(\mathbf{r}) = \text{ div}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) \tag{B.19}$$

the divergence and

$$\nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) = (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta)\partial_\alpha a_\beta(\mathbf{r}) = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}\partial_\alpha a_\beta(\mathbf{r})\mathbf{e}_\gamma = \text{ rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) \tag{B.20}$$

the curl.

B.b.β Second Derivatives, Laplacian

As far as differentiations do commute one has

$$\nabla \times \nabla = \mathbf{0}, \tag{B.21}$$

from which

$$\begin{aligned} \text{rot grad}\,\Phi(\mathbf{r}) &= \mathbf{0}, & \text{(B.22)}\\ \text{div rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) &= 0 & \text{(B.23)} \end{aligned}$$

follows. The scalar product

$$\nabla \cdot \nabla = \partial_\alpha \partial_\alpha = \triangle \tag{B.24}$$

is called the Laplacian. Therefore one has

$$\text{div grad}\,\Phi(\mathbf{r}) = \triangle\Phi(\mathbf{r}). \tag{B.25}$$

One obtains

$$\triangle\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \text{ grad div}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) - \text{ rot rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}), \tag{B.26}$$

by replacing **a** and **b** by ∇ in (B.14) and bringing the vector **c** always to the right.

B.b.γ Ableitung von Produkten

Bei Anwendung des Nabla-Operators auf Produkte von zwei Faktoren erhält man gemäß der Produkt-Regel zwei Summanden, indem man einmal den ersten Faktor differenziert und den zweiten konstant hält, und zum zweiten den zweiten Faktor differenziert und den ersten festhält. Dann formt man unter Berücksichtigung des Vektor-Charakters des Nabla-Operators die Ausdrücke so um, dass die konstant gehaltenen Faktoren links, die zu differenzierenden rechts vom Nabla-Operator stehen. Man findet

B.b.γ Derivatives of Products

Application of the del operator onto a product of two factors yields according to the product rule two contributions. In one contribution one differentiates the first factor and keeps the second one constant, in the other contribution one differentiates the second factor and keeps the first constant. Then the expressions have to be rearranged, so that the constant factors are to the left, those to be differentiated to the right of the del operator. In doing this one has to keep the vector character of the del in mind. Then one obtains

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(\Phi\Psi) &= \Phi \operatorname{grad}\Psi + \Psi \operatorname{grad}\Phi && \text{(B.27)}\\
\operatorname{div}(\Phi\mathbf{a}) &= \Phi \operatorname{div}\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot \operatorname{grad}\Phi && \text{(B.28)}\\
\operatorname{rot}(\Phi\mathbf{a}) &= \Phi \operatorname{rot}\mathbf{a} + (\operatorname{grad}\Phi)\times\mathbf{a} && \text{(B.29)}\\
\operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= \mathbf{b}\cdot \operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot \operatorname{rot}\mathbf{b} && \text{(B.30)}\\
\operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a} + (\mathbf{b}\operatorname{grad})\mathbf{a} - (\mathbf{a}\operatorname{grad})\mathbf{b} && \text{(B.31)}\\
\operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) &= \mathbf{a}\times \operatorname{rot}\mathbf{b} + \mathbf{b}\times \operatorname{rot}\mathbf{a} + (\mathbf{b}\operatorname{grad})\mathbf{a} + (\mathbf{a}\operatorname{grad})\mathbf{b} && \text{(B.32)}\\
\triangle(\Phi\Psi) &= \Phi\triangle\Psi + \Psi\triangle\Phi + 2(\operatorname{grad}\Phi)\cdot(\operatorname{grad}\Psi). && \text{(B.33)}
\end{aligned}$$

B.c Spezielle Ausdrücke

Man bestimme für $r = |\mathbf{r}|$ und für konstanten Vektor $\mathbf{c}$

B.c Special Expressions

Calculate for $r = |\mathbf{r}|$ and constant vector $\mathbf{c}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} r^2 &= && \text{(B.34)}\\
\operatorname{div}\mathbf{r} &= && \text{(B.35)}\\
\operatorname{rot}\mathbf{r} &= && \text{(B.36)}\\
\operatorname{grad}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}) &= && \text{(B.37)}\\
(\mathbf{c}\operatorname{grad})\mathbf{r} &= && \text{(B.38)}\\
\operatorname{grad} f(r) &= && \text{(B.39)}\\
\operatorname{div}(\mathbf{c}\times\mathbf{r}) &= && \text{(B.40)}\\
\operatorname{rot}(\mathbf{c}\times\mathbf{r}) &= && \text{(B.41)}\\
\operatorname{grad}\frac{1}{r} &= && \text{(B.42)}\\
\operatorname{div}\frac{\mathbf{c}}{r} &= && \text{(B.43)}\\
\operatorname{rot}\frac{\mathbf{c}}{r} &= && \text{(B.44)}\\
\operatorname{div}\frac{\mathbf{r}}{r^3} &= && \text{(B.45)}\\
\operatorname{rot}\frac{\mathbf{r}}{r^3} &= && \text{(B.46)}\\
\operatorname{grad}\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}}{r^3} &= && \text{(B.47)}\\
\operatorname{div}\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{r}}{r^3} &= && \text{(B.48)}\\
\operatorname{rot}\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{r}}{r^3} &= && \text{(B.49)}
\end{aligned}$$

$$\operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{c}|} \quad = \quad , \tag{B.50}$$

wobei singuläre Punkte auszunehmen seien.

with the exception of singular points.

B.d Integral-Sätze

B.d Integral Theorems

B.d.α Linien-Integrale

Für ein skalares oder vektorielles Feld $A(\mathbf{r})$ gilt

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (\mathrm{d}\mathbf{r}\nabla) A(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}_2) - A(\mathbf{r}_1), \tag{B.51}$$

das heißt

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathrm{d}\mathbf{r} \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}) \quad = \quad \Phi(\mathbf{r}_2) - \Phi(\mathbf{r}_1), \tag{B.52}$$

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (\mathrm{d}\mathbf{r} \operatorname{grad}) \mathbf{a}(\mathbf{r}) \quad = \quad \mathbf{a}(\mathbf{r}_2) - \mathbf{a}(\mathbf{r}_1). \tag{B.53}$$

B.d.α Line Integrals

For a scalar or a vector field $A(\mathbf{r})$ one has

that is

B.d.β Flächen-Integrale

Nach Stokes lässt sich ein Flächenintegral über die Fläche F der Form

$$\int_F (\mathrm{d}\mathbf{f} \times \nabla) A(\mathbf{r}) = \oint_{\partial F} \mathrm{d}\mathbf{r} A(\mathbf{r}) \tag{B.54}$$

in ein Linienintegral über den Rand ∂F umformen, wobei das Linienintegral im Rechtschraubensinn zur Richtung von $\mathrm{d}\mathbf{f}$ zu führen ist (Korkenzieherregel). Insbesondere folgt

$$\int_F \mathrm{d}\mathbf{f} \times \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}) \quad = \quad \oint_{\partial F} \mathrm{d}\mathbf{r} \Phi(\mathbf{r}), \tag{B.55}$$

$$\int_F \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \quad = \quad \oint_{\partial F} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}). \tag{B.56}$$

B.d.β Surface Integrals

According to Stokes a surface integral over F of the form

can be rewritten as a line integral over the curve ∂F bounding the surface. The direction is given by the right-hand rule; that is, if the thumb of your right hand points in the direction of $\mathrm{d}\mathbf{f}$, your fingers curve in the direction $\mathrm{d}\mathbf{r}$ of the line integral,

B.d.γ Volumen-Integrale

Nach Gauss lässt sich ein Volumenintegral der Form

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \nabla A(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} A(\mathbf{r}) \tag{B.57}$$

in ein Integral über die Oberfläche ∂V umformen. Dabei weist $\mathrm{d}\mathbf{f}$ nach außen. Insbesondere folgt

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}) \quad = \quad \int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} \Phi(\mathbf{r}), \tag{B.58}$$

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \quad = \quad \int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}), \tag{B.59}$$

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \quad = \quad \int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}). \tag{B.60}$$

B.d.γ Volume Integrals

According to Gauss a volume integral of the form

can be converted into an integral over the surface ∂V of the volume. The vector $\mathrm{d}\mathbf{f}$ points out of the volume. In particular one has

B.d.δ Volumen-Integrale über Produkte

Setzt man für $\Phi(\mathbf{r})$ oder $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in den Gleichungen (B.58-B.60) Produkte ein und verwendet die Gleichungen (B.27-B.30), so erhält man

B.d.δ Volume Integrals of Products

If one substitutes products for $\Phi(\mathbf{r})$ or $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in equations (B.58-B.60) and applies equations (B.27-B.30), then one obtains

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \Phi(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \Psi(\mathbf{r}) + \int_V \mathrm{d}^3 r \Psi(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} \Phi(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}), \tag{B.61}$$

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \Phi(\mathbf{r}) \operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{r}) + \int_V \mathrm{d}^3 r \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}), \tag{B.62}$$

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \Phi(\mathbf{r}) \operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{r}) + \int_V \mathrm{d}^3 r (\operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r})) \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}), \tag{B.63}$$

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \mathbf{b}(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{r}) - \int_V \mathrm{d}^3 r \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{b}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot (\mathbf{a}(\mathbf{r}) \times \mathbf{b}(\mathbf{r})). \tag{B.64}$$

Diese Gleichungen erlauben die Umformung eines Volumen-Integrals in ein anderes Volumen-Integral und ein Oberflächen-Integral. Dies ist die Übertragung der partiellen Integration von einer auf drei Dimensionen.
In vielen Fällen verschwindet das Oberflächenintegral im Limes eines unendlichen Volumens, so dass die Gleichungen (B.61-B.64) die Umformung eines Volumenintegrals in ein anderes erlauben.

These equations allow the transformation of a volume integral into another one and a surface integral. This is the generalization of integration by parts from one dimension to three.

In many cases the surface integral vanishes in the limit of infinite volume, so that the equations (B.61-B.64) allow the conversion from one volume integral into another one.

Ersetzt man $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in (B.62) durch $\operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{r})$ oder $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ in (B.64) durch $\operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r})$, so folgt wegen (B.22) und (B.23)

If one replaces $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in (B.62) by $\operatorname{curl} \mathbf{a}(\mathbf{r})$ or $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ in (B.64) by $\operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r})$, then one obtains with (B.22) and (B.23)

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot (\mathbf{a}(\mathbf{r}) \times \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r})) = \int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot (\Phi(\mathbf{r}) \operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{r})). \tag{B.65}$$

Ähnlich erhält man aus (B.63)

Similarly one obtains from (B.63)

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}) \times \operatorname{grad} \Psi(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} \times (\operatorname{grad} \Psi(\mathbf{r})) \Phi(\mathbf{r}) = -\int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} \times (\operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r})) \Psi(\mathbf{r}). \tag{B.66}$$

Ersetzt man $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in (B.59) durch $\Phi \operatorname{grad} \Psi - \Psi \operatorname{grad} \Phi$, so folgt der Greensche Satz

If one replaces $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in (B.59) by $\Phi \operatorname{grad} \Psi - \Psi \operatorname{grad} \Phi$, then one obtains Green's theorem

$$\int_V \mathrm{d}^3 r (\Phi(\mathbf{r}) \triangle \Psi(\mathbf{r}) - \Psi(\mathbf{r}) \triangle \Phi(\mathbf{r})) = \int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot (\Phi(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \Psi(\mathbf{r}) - \Psi(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r})). \tag{B.67}$$

B.e Der Laplace-Operator von $1/r$ und Verwandtes

B.e The Laplacian of $1/r$ and Related Expressions

B.e.α Der Laplace-Operator von $1/r$

Für $r \neq 0$ findet man $\triangle(1/r) = 0$. Wertet man das Integral über eine Kugel vom Radius R unter Verwendung von (B.59) aus,

B.e.α The Laplacian of $1/r$

For $r \neq 0$ one finds $\triangle(1/r) = 0$. If one evaluates the integral over a sphere of radius R by use of (B.59),

$$\int \triangle(\frac{1}{r}) \mathrm{d}^3 r = \int \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \operatorname{grad}(\frac{1}{r}) = -\int \mathbf{r} r \mathrm{d}\Omega \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -4\pi \tag{B.68}$$

mit dem Raumwinkelelement $\mathrm{d}\Omega$, so erhält man -4π. Man schreibt daher

with the solid-angle element $\mathrm{d}\Omega$, then one obtains -4π. Therefore one writes

$$\triangle(\frac{1}{r}) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}), \tag{B.69}$$

wobei Diracs Delta-"Funktion" $\delta^3(\mathbf{r})$ (eigentlich eine Distribution) die Eigenschaft

where Dirac's delta "function" $\delta^3(\mathbf{r})$ (actually a distribution) has the property

$$\int_V \mathrm{d}^3 r f(\mathbf{r})\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \begin{cases} f(\mathbf{r}_0) & \text{falls / if } \mathbf{r}_0 \in V \\ 0 & \text{sonst / otherwise.} \end{cases} \tag{B.70}$$

hat. Aus

From

$$\triangle\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \mathbf{c}\triangle\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\mathbf{c}\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

folgt mit (B.26,B.43,B.44)

one obtains with (B.26,B.43,B.44)

$$4\pi\mathbf{c}\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\operatorname{grad}\operatorname{div}\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \operatorname{grad}\frac{\mathbf{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \operatorname{rot}\frac{\mathbf{c}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{B.71}$$

Man bestimme die δ-Funktions-Anteile in (B.45) bis (B.49). Welche Dimension hat $\delta^3(\mathbf{r})$?

Determine the δ-function contributions in (B.45) to (B.49). What is the dimension of $\delta^3(\mathbf{r})$?

B.e.β Darstellung eines Vektorfeldes als Summe eines rotationsfreien und eines divergenzfreien Feldes

B.e.β Representation of a Vector Field as a Sum of an Irrotational and a Divergence-free Field

Wir schreiben das Vektorfeld $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ als

We rewrite the vector field $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in the form

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}^3 r' \mathbf{a}(\mathbf{r}')\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{B.72}$$

und erhalten aus (B.71), da $\mathbf{a}(\mathbf{r}')$ nicht von $\mathbf{r}$ abhängt,

and obtain from (B.71), since $\mathbf{a}(\mathbf{r}')$ does not depend on $\mathbf{r}$

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3 r' \operatorname{grad}\frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3 r' \operatorname{rot}\frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \tag{B.73}$$

was sich als

which may be written as

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}) + \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \tag{B.74}$$

mit

with

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3 r' \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{B.75}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3 r' \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{B.76}$$

schreiben lässt. Falls die Integrale (B.75) und (B.76) existieren, erhält man auf diese Weise eine Darstellung von $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ als Summe des rotationsfreien Feld $-\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r})$ und des divergenzfreien Feldes $\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Mit (B.48) folgt

. If the integrals (B.75) and (B.76) exist, then one obtains in this way a representation of $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ as sum of the irrotational field $-\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r})$ and the divergence free field $\operatorname{curl}\mathbf{A}(\mathbf{r})$. With (B.48) one finds

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0. \tag{B.77}$$

C Kugelflächenfunktionen

C.a Eigenwert-Problem und Separation der Variablen

Gesucht sind die Eigenfunktionen Y

$$\Delta_\Omega Y(\theta,\phi) = \lambda Y(\theta,\phi) \tag{C.1}$$

mit

$$\Delta_\Omega = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, \tag{C.2}$$

wobei die Operatoren (Multiplikationen mit Funktionen und Differentiationen) von rechts nach links angewendet werden (vergleiche 5.16). Man führt dann den Separations-Ansatz ein

$$Y = g(\cos\theta)h(\phi). \tag{C.3}$$

Mit

$$\xi = \cos\theta, \quad \frac{dg}{d\theta} = -\sin\theta\frac{dg}{d\cos\theta} = -\sqrt{1-\xi^2}\frac{dg}{d\xi} \tag{C.4}$$

folgt durch Einsetzen in die Eigenwertgleichung und Division durch $h(\phi)$

$$\frac{d}{d\xi}((1-\xi^2)\frac{dg}{d\xi}) + \frac{g(\xi)}{1-\xi^2}(\frac{d^2h(\phi)}{d\phi^2}/h(\phi)) = \lambda g(\xi). \tag{C.5}$$

Die Gleichung lässt sich nur erfüllen, wenn $d^2h(\phi)/d\phi^2/h(\phi)$ konstant ist. Da außerdem $h(\phi + 2\pi) = h(\phi)$ sein soll, folgt

$$h(\phi) = e^{im\phi} \text{ mit ganzem } m. \tag{C.6}$$

Damit reduziert sich die Differentialgleichung für g auf

$$\frac{d}{d\xi}((1-\xi^2)\frac{dg}{d\xi}) - \frac{m^2 g(\xi)}{1-\xi^2} = \lambda g(\xi). \tag{C.7}$$

C.b Zugeordnete Legendre-Funktionen

Beachtet man, dass (wenigstens für positives m) der Faktor $e^{im\phi}$ von der analytischen Funktion $(x+iy)^m = r^m(\sin\theta)^m e^{im\phi}$ herrührt, so liegt es nahe, einen Faktor $(sin\theta)^m$ aus g herauszuziehen,

$$g(\xi) = (\sin\theta)^m G(\xi) = (1-\xi^2)^{m/2}G(\xi), \tag{C.8}$$

woraus dann für G die Gleichung

$$-m(m+1)G(\xi) - 2(m+1)\xi G'(\xi) + (1-\xi^2)G'' = \lambda G(\xi) \tag{C.9}$$

folgt.

C Spherical Harmonics

C.a Eigenvalue Problem and Separation of Variables

We are looking for the eigen functions Y of

$$\Delta_\Omega Y(\theta,\phi) = \lambda Y(\theta,\phi) \tag{C.1}$$

with

$$\Delta_\Omega = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, \tag{C.2}$$

where the operators (multiplication by functions and differentiation) apply from right to left (compare 5.16). One introduces the ansatz

$$Y = g(\cos\theta)h(\phi). \tag{C.3}$$

With

$$\xi = \cos\theta, \quad \frac{dg}{d\theta} = -\sin\theta\frac{dg}{d\cos\theta} = -\sqrt{1-\xi^2}\frac{dg}{d\xi} \tag{C.4}$$

one obtains by insertion into the eigenvalue equation and division by $h(\phi)$

$$\frac{d}{d\xi}((1-\xi^2)\frac{dg}{d\xi}) + \frac{g(\xi)}{1-\xi^2}(\frac{d^2h(\phi)}{d\phi^2}/h(\phi)) = \lambda g(\xi). \tag{C.5}$$

This equation can only be fulfilled, if $d^2h(\phi)/d\phi^2/h(\phi)$ is constant. Since moreover one requires $h(\phi + 2\pi) = h(\phi)$, it follows that

$$h(\phi) = e^{im\phi} \text{ with integer } m. \tag{C.6}$$

This reduces the differential equation for g to

$$\frac{d}{d\xi}((1-\xi^2)\frac{dg}{d\xi}) - \frac{m^2 g(\xi)}{1-\xi^2} = \lambda g(\xi). \tag{C.7}$$

C.b Associated Legendre Functions

Considering that (at least for positive m) the factor $e^{im\phi}$ comes from the analytic function $(x+iy)^m = r^m(\sin\theta)^m e^{im\phi}$, it seems appropriate to extract a factor $(\sin\theta)^m$ out of g

$$g(\xi) = (\sin\theta)^m G(\xi) = (1-\xi^2)^{m/2}G(\xi), \tag{C.8}$$

so that one obtains the equation

$$-m(m+1)G(\xi) - 2(m+1)\xi G'(\xi) + (1-\xi^2)G'' = \lambda G(\xi) \tag{C.9}$$

for G.

Für die Funktion G können wir eine Taylor-Entwicklung ansetzen

For G we may assume a Taylor expansion

$$G(\xi) = \sum_k a_k \xi^k, \quad G'(\xi) = \sum_k k a_k \xi^{k-1}, \quad G''(\xi) = \sum_k k(k-1) a_k \xi^{k-2} \tag{C.10}$$

und finden durch Koeffizienten-Vergleich

and find by comparison of the coefficients

$$[m(m+1) + 2(m+1)k + k(k-1) + \lambda] a_k = (k+2)(k+1) a_{k+2}. \tag{C.11}$$

Setzen wir

If we put

$$\lambda = -l(l+1), \tag{C.12}$$

so lautet die Rekursionsformel

then the recurrence formula reads

$$\frac{a_{k+2}}{a_k} = \frac{(m+k+l+1)(m+k-l)}{(k+1)(k+2)}. \tag{C.13}$$

Die Reihenentwicklung bricht bei einem endlichen k ab, wenn der Zähler verschwindet, also insbesondere für ganzes nicht negatives $k = l - m$. Diesen Fall wollen wir weiter untersuchen. Ohne nähere Betrachtung sei erwähnt, dass in den anderen Fällen die Funktion Y ein nichtanalytisches Verhalten für $\cos\theta = \pm 1$ entwickelt.

The series expansion comes to an end at finite k, if the numerator vanishes, in particular for integer not negative $k = l - m$. We continue to investigate this case. Without closer consideration we mention that in the other cases the function Y develops a nonanalyticity at $\cos\theta = \pm 1$.

Der führende Term hat dann den Koeffizienten a_{l-m}. Durch Anwendung der Rekursionsformel findet man

The leading term has then the coefficient a_{l-m}. Application of the recurrence formula yields

$$\begin{aligned}
a_{l-m-2} &= -\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l-1)2} a_{l-m} \\
&= -\frac{(l-m)(l-m-1)l}{(2l-1)2l} a_{l-m}, && \text{(C.14)} \\
a_{l-m-4} &= \frac{(l-m)(l-m-1)(l-m-2)(l-m-3)}{(2l-1)(2l-3)2\cdot 4} a_{l-m} \\
&= \frac{(l-m)(l-m-1)(l-m-2)(l-m-3)l(l-1)}{(2l-1)(2l-3)2l(2l-2)2} a_{l-m}, && \text{(C.15)} \\
a_{l-m-2k} &= (-)^k \frac{(l-m)!l!(2l-2k)!}{(l-m-2k)!(l-k)!(2l)!k!} a_{l-m}. && \text{(C.16)}
\end{aligned}$$

Üblicherweise wählt man

Conventionally one chooses

$$a_{l-m} = \frac{(-)^m (2l)!}{(l-m)! 2^l l!}. \tag{C.17}$$

Dann folgt

Then it follows that

$$\begin{aligned}
G(\xi) &= \frac{(-)^m}{2^l l!} \sum_k \frac{(2l-2k)!}{(l-m-2k)!} \frac{l!}{k!(l-k)!} (-)^k \xi^{l-m-2k} && \text{(C.18)} \\
&= \frac{(-)^m}{2^l l!} \sum_k \binom{l}{k} (-)^k \frac{d^{l+m} \xi^{2l-2k}}{d\xi^{l+m}} = \frac{(-)^m}{2^l l!} \frac{d^{l+m} (\xi^2-1)^l}{d\xi^{l+m}}. && \text{(C.19)}
\end{aligned}$$

Man bezeichnet dann die Lösungen $g(\xi)$ in der Form

The solutions $g(\xi)$ in the form

$$P_l^m(\xi) = (1-\xi^2)^{m/2} \frac{(-)^m}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}} (\xi^2-1)^l \tag{C.20}$$

als zugeordnete LEGENDRE-Funktionen. Bis auf Normierung ist $Y_{lm}(\theta,\phi)$ durch $P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$ gegeben.

are called associated LEGENDRE functions. $Y_{lm}(\theta,\phi)$ is given by $P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$ apart from the normalization.

Die Differentialgleichung für g hängt nur von m^2 ab, aber nicht vom Vorzeichen von m. Wir vergleichen daher P_l^m und P_l^{-m}. Es sei $m \geq 0$, dann folgt

The differential equation for g depends only on m^2, but not on the sign of m. Therefore we compare P_l^m and P_l^{-m}. Be $m \geq 0$, then it follows that

$$\begin{aligned}\frac{d^{l-m}}{d\xi^{l-m}}(\xi^2-1)^l &= \sum_{k=0}^{l-m}\binom{l-m}{k}\frac{d^k(\xi-1)^l}{d\xi^k}\frac{d^{l-m-k}(\xi+1)^l}{d\xi^{l-m-k}} \\ &= \sum_{k=0}^{l-m}\frac{(l-m)!l!l!}{k!(l-m-k)!(l-k)!(m+k)!}(\xi-1)^{l-k}(\xi+1)^{m+k}, \qquad \text{(C.21)}\\ \frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}}(\xi^2-1)^l &= \sum_{k=0}^{l-m}\binom{l+m}{k+m}\frac{d^{m+k}(\xi-1)^l}{d\xi^{m+k}}\frac{d^{l-k}(\xi+1)^l}{d\xi^{l-k}} \\ &= \sum_{k=0}^{l-m}\frac{(l+m)!l!l!}{(m+k)!(l-k)!(l-m-k)!k!}(\xi-1)^{l-k-m}(\xi+1)^k. \qquad \text{(C.22)}\end{aligned}$$

Der Vergleich zeigt

Comparison shows

$$P_l^{-m}(\xi) = \frac{(l-m)!}{(l+m)!}(-)^m P_l^m(\xi), \qquad \text{(C.23)}$$

das heißt, bis auf die Normierung stimmen die beiden Lösungen überein.

that is, apart from the normalization both solutions agree.

C.c Orthogonalität und Normierung

C.c Orthogonality and Normalization

Wir betrachten das Normierungs-Integral

We consider the normalization integral

$$N_{lml'm'} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} d\cos\theta P_l^m(\cos\theta)e^{-im\phi}P_{l'}^{m'}(\cos\theta)e^{im'\phi}. \qquad \text{(C.24)}$$

Die Integration über ϕ ergibt

The integration over ϕ yields

$$\begin{aligned}N_{lml'm'} &= 2\pi\delta_{mm'}\int_{-1}^{+1}P_l^m(\xi)P_{l'}^m(\xi)d\xi \\ &= 2\pi\delta_{mm'}(-)^m\frac{(l'+m)!}{(l'-m)!}\int_{-1}^{+1}P_l^m(\xi)P_{l'}^{-m}(\xi)d\xi \\ &= \frac{2\pi(l'+m)!}{(l'-m)!}\frac{\delta_{mm'}}{2^{2l}l!^2}I_m^{ll'} \qquad \text{(C.25)}\end{aligned}$$

mit

with

$$I_m^{ll'} = (-)^m\int_{-1}^{+1}\frac{d^{l+m}(\xi^2-1)^l}{d\xi^{l+m}}\frac{d^{l'-m}(\xi^2-1)^{l'}}{d\xi^{l'-m}}d\xi. \qquad \text{(C.26)}$$

Durch partielle Integration findet man

Partial integration yields

$$I_m^{ll'} = (-)^m\left[\frac{d^{l+m}(\xi^2-1)^l}{d\xi^{l+m}}\frac{d^{l'-m-1}(\xi^2-1)^{l'}}{d\xi^{l'-m-1}}\right]_{-1}^{+1} + I_{m+1}^{ll'}. \qquad \text{(C.27)}$$

Der erste Faktor in eckigen Klammern enthält mindestens $-m$, der zweite $m+1$ Nullstellen bei $\xi = \pm 1$. Die eckige Klammer verschwindet demnach. Das heißt $I_m^{ll'}$ ist unabhängig von m für $-l \leq m \leq l'$. Für $l' > l$ folgt $I_m^{ll'} = I_{l'}^{ll'} = 0$, da der erste Faktor des Integranden von $I_{l'}^{ll'}$ verschwindet. Für $l' < l$ folgt $I_m^{ll'} = I_{-l}^{ll'} = 0$, da der zweite Faktor des Integranden von $I_{-l}^{ll'}$ verschwindet. Für $l = l'$ werten wir aus

The first factor in square brackets contains at least $-m$, the second $m+1$ zeroes at $\xi = \pm 1$. The contents in square brackets vanishes therefore. Thus $I_m^{ll'}$ is independent of m for $-l \leq m \leq l'$. For $l' > l$ it follows that $I_m^{ll'} = I_{l'}^{ll'} = 0$, since the first factor of the integrand of $I_{l'}^{ll'}$ vanishes. For $l' < l$ one obtains $I_m^{ll'} = I_{-l}^{ll'} = 0$, since the second factor of the integrand of $I_{-l}^{ll'}$ vanishes. For $l = l'$ we evaluate

$$I_m^{ll} = I_l^{ll} = (-)^l \int_{-1}^{+1} \frac{d^{2l}(\xi^2-1)^l}{d\xi^{2l}} (\xi^2-1)^l d\xi. \tag{C.28}$$

Der erste Faktor im Integranden ist die Konstante $(2l)!$

The first factor in the integrand is the constant $(2l)!$

$$I_m^{ll} = (2l)! \int_{-1}^{+1} (1-\xi^2)^l d\xi. \tag{C.29}$$

Das letztere Integral ergibt $2^{2l+1} l!^2/(2l+1)!$ (man findet das, in dem man den Integranden $(1+\xi)^l(1-\xi)^l$ schreibt und l mal partiell integriert, in dem man jeweils die Potenz von $1-\xi$ differenziert und die von $1+\xi$ integriert. Das ergibt das Normierungsintegral

The last integral yields $2^{2l+1} l!^2/(2l+1)!$ (one obtains this by writing the integrand $(1+\xi)^l(1-\xi)^l$ and performing partial integration l times, by always differentiating the power of $1-\xi$ and integrating that of $1+\xi$. This yields the norm

$$N_{lml'm'} = 2\pi \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \delta_{m,m'}. \tag{C.30}$$

Damit ergeben sich die orthonormierten Kugelflächenfunktionen

Thus the normalized spherical harmonics read

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}. \tag{C.31}$$

C.d Bemerkung zur Vollständigkeit

C.d Remark on Completeness

Entwickeln wir eine in den drei kartesischen Koordinaten x, y, z in der Umgebung des Ursprungs analytische Funktion f in eine Taylor-Reihe

If we expand a function f which is analytic in the Cartesian coordinates x, y, z in the vicinity of the origin in a Taylor expansion

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{ijk} a_{ijk} x^i y^j z^k = \sum_n r^n f_n(\theta,\phi), \tag{C.32}$$

so sind die Beiträge proportional zu r^n in denen mit $i+j+k = n$ enthalten. Dies sind insgesamt $(n+1) + n + (n-1) + ... = (n+2)(n+1)/2$ Terme

then the contributions proportional to r^n are contained in those with $i+j+k = n$. These are in total $(n+1) + n + (n-1) + ... = (n+2)(n+1)/2$ terms

$$f_n(\theta,\phi) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} a_{n-j-k,j,k} (\frac{x}{r})^{n-j-k} (\frac{y}{r})^j (\frac{z}{r})^k. \tag{C.33}$$

Andererseits können wir die Funktion f_n auch durch die Funktionen $Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{...}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi}$, darstellen, da sich diese als $(\sin\theta)^{|m|}e^{im\phi} = ((x \pm iy)/r)^{|m|}$ multipliziert mit einem Polynom in $\cos\theta$ der Ordnung $l - |m|$ schreiben lassen. Dabei können die auftretenden Potenzen $(\cos\theta)^{l-|m|-2k} = (z/r)^{l-|m|-2k}((x^2 + y^2 + z^2)/r^2)^k$ geschrieben werden. Zusätzlich führen wir noch einen Faktor $((x^2 + y^2 + z^2)/r^2)^{(n-l)/2}$ ein. Dann erhalten wir Beiträge für $l = n, n-2, n-4, ...$ Da m jeweils von $-l$ bis l läuft, ergibt das insgesamt $(2n + 1) + (2n - 3) + (2n - 7) + ... = (n+2)(n+1)/2$ linear unabhängige (weil orthogonale) Beiträge. Der Raum dieser Funktionen hat daher die gleiche Dimension wie der der f_n. Wir können daher jede Funktion f_n durch eine Linearkombination von Kugelflächenfunktionen ausdrücken.

On the other hand we may represent the function f_n equally well by the functions $Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{...}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi}$, since they can be written $(\sin\theta)^{|m|}e^{im\phi} = ((x \pm iy)/r)^{|m|}$ multiplied by a polynomial in $\cos\theta$ of order $l - |m|$. The appearing powers of the $\cos\theta$ can be written $(\cos\theta)^{l-|m|-2k} = (z/r)^{l-|m|-2k}((x^2 + y^2 + z^2)/r^2)^k$. In addition we introduce a factor $((x^2+y^2+z^2)/r^2)^{(n-l)/2}$. Then we obtain contributions for $l = n, n-2, n-4, ...$ Since m runs from $-l$ to l, one obtains in total $(2n + 1) + (2n - 3) + (2n - 7) + ... = (n + 2)(n + 1)/2$ linearly independent (since orthogonal) contributions. Therefore the space of these functions has the same dimension as that of the f_n's. Thus we may express each f_n as a linear combination of the spherical harmonics.

Namensregister

Abraham, Max (1875-1922), 73
Aepinus, Franz Ulrich Theodor (1724-1802), 150
Airy, George B. (1801-1892), 144, 147
Alhazen (ibn al Haitham) (965-1038), 145
Ampère, André Marie (1775-1836), 153, 155
Arago, Dominique François Jean (1786-1853), 147, 153

Bernoulli, Daniel (1700-1782), 150
Biot, Jean Baptiste (1774-1862), 48, 147, 153
Bose, George Matthias, 149
Bradley, James (1692-1762), 146
Brewster, David (1781-1868), 89, 147
Browne, Thomas, 148

Cabeo, Niccolo (1585-1650), 154
Canton, John (1718-1772), 150
Cavendish, Henry (1731-1810), 150
Clausius, Rudolf Julius Emmanuel (1822-1888), 32, 157
Coulomb, Charles Augustin de (1736-1806), 6, 150, 152, 157

d'Alembert, Jean Baptiste le Rond (1717-1783), 98
Davy, Humphrey (1778-1829), 153, 154
Desaguliers, Jean Théophile (1683-1744), 149
Descartes, René (1596-1650), 144–146, 148
Dirac, Paul Adrien Maurice (1902-1984), x, 160
Doppler, Christian (1803-1853), 123
Dufay, Charles (1698-1739), 149

Einstein, Albert (1879-1955), 112, 124, 159
Euler, Leonhard (1707-1783), 146

Faraday, Michael (1791-1867), 59, 154–157
Fermat, Pierre (1601-1665), 145, 146
Fitzgerald, George Francis (1851-1901), 111, 158
Fizeau, Armand Hippolyte (1819-1896), 148, 155
Foucault, Léon (1819-1868), 155
Fourier, Jean Baptiste Joseph (1768-1830), 79, 80
Franklin, Benjamin (1706-1790), 149, 150
Freiberg, Dietrich von (1250-1310), 144, 145
Fresnel, Augustin Jean (1788-1827), 147, 148

Galilei, Galileo (1564-1642), 148
Gassendi, Pierre (1592-1655), 148
Gauss, Carl Friedrich (1777-1855), viii, 7
Gilbert, William (1540-1603), 148, 151
Giorgi, Giovanni (1871-1950), i, 8
Gounelle, E., 155
Gray, Stephen (1666-1736), 149
Green, George (1793-1841), 37, 151, 152

Name Index

Guericke, Otto von (1602-1686), 149, 150

Hagen, Gotthilf (1797-1884), 90
Heaviside, Oliver (1850-1925), 157
Heisenberg, Werner (1901-1976), 160
Heitler, Walter (1904-1981), 160
Heron von Alexandrien / Hero of Alexandria (2. Jhdt. vor oder nach Chr. / 2nd century BC or AD), 144, 145
Hertz, Heinrich Rudolf (1857-1894), 158
Hooke, Robert (1635-1703), 145
Huygens, Christian (1629-1695), 145–147

Jeans, James Hopwood (1877-1946), 160
Jordan, Pascual (1902-1980), 160

Kamal, al-Din al Farisi (-1320), 144, 145
Kelvin, William Thomson (1824-1907), 151, 152, 155
Kepler, Johannes (1571-1630), 145
Kirchhoff, Gustav Robert (1824-1887), 63, 153, 155
Kleist, Ewald Jürgen von (ca. 1700-1748), 149
Kohlrausch, Rudolf (1801-1858), 50, 155
Kopernikus, Nikolaus (1473-1543), 148
Kronecker, Leopold (1823-1891), iv

Lagrange, Joseph (1736-1813), 146
Lambert, Johann Heinrich (1728-1777), 152
Landau, Lev Davidovich (1908-1968), 73
Laplace, Pierre-Simon Marquise de (1749-1827), 147, 151, 153
Larmor, Sir Joseph (1857-1942), 139, 158
Lenard, Philipp (1862-1947), 160
Lichtenberg, Georg Christoph (1744-1799), 149
Liénard, Alfred-Marie (1869-1958), 137, 157
Lifshitz, Eugenii Mikhailovich (1915-1985), 73
Lorentz, Hendrik Antoon (1853-1928), 6, 9, 98, 111, 157–159
Lorenz, Ludvig Valentin (1829-1891), 98, 157

Malus, Étienne Luis (1775-1812), 147
Maupertuis, Pierre-Louis-Moreau (1698-1759), 146
Maxwell, James Clerk (1831-1879), 5, 45, 68, 156–158
Mayer, Tobias (1723-1762), 152
Michell, John (1724-1793), 152
Michelson, Albert Abraham (1852-1931), 110, 111, 158
Minkowski, Hermann (1864-1909), 73, 111, 159
Mössbauer, Rudolf (1929-), 162

Morley, Edward Williams (1838-1923), 110, 111, 158
Mossotti, Ottaviano Fabrizio (1791-1863), 32, 151, 157
Musschenbroek, Pieter van (1692-1761), 149, 152

Neckam, Alexander (1157-1217), 151
Neumann, Franz Ernst (1798-1895), 155, 157
Newton, Isaac (1643-1727), 145–148, 152

Ørsted, Hans Christian (1777-1851), 153, 154
Ohm, Georg Simon (1787-1854), 62, 153

Pais, Abraham (1918-2000), 159
Pauli, Wolfgang (1900-1958), 160
Peregrinus, Petrus (Pierre de Maricourt) (13. Jhdt.), 151, 154
Planck, Max (1858-1947), 160
Poincaré, Henri (1854-1912), 158, 159
Poisson, Siméon-Denis (1787-1840), 13, 147, 151, 152
Poynting, John Henry (1852-1914), 70, 157
Priestley, Joseph (1733-1804), 150
Ptolemaios, Klaudius (2. Jhdt. n. Chr.), 145

Rayleigh, John William Strutt (1842-1919), 160
Riemann, Bernhard (1826-1866), 155, 157
Robison, John (1739-1805), 150
Römer, Olaf (1644-1710), 146
Rubens, Heinrich (1865-1922), 90

Sanuto, Livio (etwa 1530-1580), 151
Savart, Félix (1791-1841), 48, 153
al-Schirazi, Mahmud ibn (1236-1311), 144, 145
Schwarzschild, Karl (1873-1916), 158
Snellius / Snell, Willibrord van Royen (1581-1626), 87, 145
Sommerfeld, Arnold Johannes Wilhelm (1868-1951), 73
Stokes, George Gabriel (1819-1903), viii, 148
Stoney, Johnstone (1826-1911), 154
Sturgeon, William (1783-1850), 153

Taylor, Brook (1685-1731), 152
Thales v. Milet (640-546), 144, 148
Thomson, Joseph John (1856-1940), 157
Thomson, William (Lord Kelvin) (1824-1907), 151, 152, 155, 157

Voigt, Woldemar (1850-1919), 158
Volta, Alessandro Graf (1745-1827), 152

Wall, 149
Watson, William (1715-1787), 149
Weber, Wilhelm (1804-1894), 50, 155
Wheatstone (1802-1875), 155
Wheeler, William, 154
Wideröe, Rolf (1902-), 60
Wiechert, Emil (1861-1928), 137, 157
Wien, Wilhelm (1864-1928), 160
Wiener, Otto Heinrich (1867-1927), 158
Wilcke, Johann Carl (1732-1796), 150, 154, 157
Wilson, Benjamin (1721-1788), 149
Winkler, Johann Heinrich, 149

Young, Thomas (1773-1829), 144, 146, 147

Sachregister

Aberration, 146, 147
Abstand, 115
  lichtartig, 116
  raumartig, 115
  zeitartig, 115
Additions-Theorem
  Geschwindigkeiten, 117
Amperegesetz, 47

Batterie, 152
Bernstein, 144, 148
Betatron, 60
Beugung, 147
Bewegungsgleichungen, 126
Biot-Savart Gesetz, 48
Blitz, 144
Bohrsches Magneton, 53
Brechung, 87–91
Brechzahl, 87
Brewsterscher Winkel, 89, 147
Brille, 145

Clausius-Mossotti-Beziehung, 33
Coulomb-Gesetz, 150
Coulomb-Kraft, 6, 14

d'Alembert-Operator, 98, 119
dielektrische Verschiebung, 29
Dielektrizitätskonstante, 29
  Clausius, Mossotti, 32
Dipol
  elektrischer
    Drehmoment, 19
    Energie, 19
    Feld, 17
    Kraft, 19
    Potential, 17
  magnetischer
    Drehmoment, 53
    Feld, 52
    Kraft, 53
Dipolmoment
  elektrisches, 17–18, 25
  magnetisches, 52
    Ringstrom, 52
    Spin, 53
Dipolstrahlung
  elektrische, 104
  magnetische, 106
Dirac delta, x, 4
Divergenz, vi
Doppelbrechung, 146, 147
Doppler-Effekt, 123
Doppler-Verschiebung, 123
Drehimpulserhaltung, 134
Drehmoment
  auf elektrischen Dipol, 20
  auf magnetischen Dipol, 53

Eichtransformation, 98
Eichung
  Coulomb, 98, 156
  Lorenz, 98, 157
Eigenzeit, 115, 116
Einheiten, i–iii, 7–9
Elastizitätstheorie, 148
Elektromagnet, 153
elektromotorische Kraft, 62
Elektron, 154
Elektronenradius
  klassisch, 14
Elektrostatik, 11–46
  Geschichte, 148–151
Energie
  Dipol
    elektrischer, 20
    magnetischer, 65
  elektrostatische, 14, 41
  Induktivität, 63
  Quadrupol
    elektrischer, 20
Energie-, Impulserhaltung, 134
Energie-Impuls-Tensor, 131–136
Energiebilanz, 70–71
Energiedichte, 131
  ebene Welle, 79
  elektromagnetische, 71
  elektrostatische, 14
Energiestrom
  ebene Welle, 79
Energiestromdichte, 71, 131
Erhaltungssätze, 132–136

Feld
  Dipol
    elektrischer, 17
    magnetischer, 52
  einer Stromverteilung, 48–49
  Ladungsverteilung, 12
  magnetisches, divergenzfrei, 154
Felder
  Punktladung, 122
Feldlinien

Sichtbarmachung, 154
Feldstärke
elektrische, 12
magnetische, 55
Feldtensor, 120–121
dualer, 121
Flächen-Integrale, viii
Flächenladungsdichte, 4
Fluss
dielektrische Verschiebung, 29
elektrischer, 12
magnetischer, 47, 60
Fourier-Integral, 79–80
Fourier-Reihe, 79–80

Galilei-Invarianz, 109
Gaussscher Satz, viii
Gradient, vi
Greenscher Satz, ix
Gruppengeschwindigkeit, 96

Hafele-Keating-Experiment, 161
Hagen und Rubens-Gesetz, 90
Hertzscher Dipol, 104
Hohlleiter, 92–96

Impuls
elektromagnetischer, 157
Impuls-Bilanz, 72–75
Impulsdichte, 131
Strahlungs-, 72
Induktion
magnetische, 47–50
Induktionsgesetz, 59–60, 154
Induktivität, 61–66
Influenz, 149, 150
Influenzladung, 37
Integral-Sätze, viii

Kapazitäten, 35
Kirchhoffsche Regeln, 63
Knotenpunktsgesetz, 63
Komponenten
kontravariante, 111
kovariante, 112
Kondensator, 35
Kugel-, 36
Platten-, 37
Kontinuitätsgleichung, 5, 118
Korkenzieher-Regel, 47
Kraft
auf elektrischen Dipol, 20
auf magnetischen Dipol, 53
Coulomb-, 6
Lorentz-, 6
zwischen Strömen, 153
zwischen Stromkreisen, 50, 65
Kraftdichte, 6
Dielektrikum, 42
elektromagnetische, 70, 72–75, 131
Kronecker delta, iv
Kugel
dielektrische, 31
Kugelflächenfunktionen, xi, 23
Additionstheorem, 26
Kugelkoordinaten, 21
Divergenz, 22
Gradient, 21
Laplace-Operator, 22
Volumenelement, 21

Längenkontraktion, 114
Ladung
Influenz-, 37
Ladungsdichte, 3
freibewegliche, 29, 68
Polarisations-, 29, 68
Ladungserhaltung, 5, 67, 133, 149
Lagrange-Funktion, 128–130
Laplace-Operator, vi, ix
Legendre-Funktionen
zugeordnete, xi
leitende Ebene, 38
leitende Kugel, 39
Leiter, 149
elektrische, 34
Kraft auf, 35
Levi-Civita-Symbol, v
Liénard-Wiechert-Potential, 137
Lichtgeschwindigkeit, 6, 146, 155
Konstanz, 112
Vakuum, 78
Linien-Integrale, viii
Lochkamera, 145
Lorentz-Invarianz, 109
Lorentz-Kraft, 6, 153, 157
Lorentz-Kraftdichte, 124
Lorentz-Transformation, 109–114
eigentliche, 113

Maßsysteme, i–iii, 7–9
Magnetisierung, 55
Magnetit, 144
Magnetostatik, 11, 47–57
Geschichte, 151–152
Maschengesetz, 63
Maxwell-Gleichungen, 5, 67–69, 120
in Materie, 69
Mechanik
relativistische, 124–127

metallische Reflexion, 90
metrischer Tensor, 112
Michelson-Morley-Versuch, 110
Minkowski-Kraft, 124
Minkowski-Raum, 111
Monopol
  elektrischer, 25
  magnetischer, 51, 57, 151
Multipol
  elektrischer, 24–27
    Potential, 25

Nabla Operator, vi

Optik, Geschichte, 148

Parabolspiegel, 145
Permeabilität, 56
Phasengeschwindigkeit, 95
Plasma-Schwingungen, 86
Plasmafrequenz, 86
Poisson-Gleichung, 13
Polarisation, 28
Polstärke, 57
Potential
  avanciertes, 101
  elektrisches, 11
  Ladungs-, Stromverteilung, 100–102
  Ladungsverteilung, 12
  magnetisches, 57, 152
  retardiertes, 101, 119, 157
  skalares, 97
Potentiale, 97–99
Poynting-Vektor, 70, 79, 131, 157
Punktladung, 4, 12
  Abstrahlung, 139
  Feld, 137

Quadrupol
  elektrischer
    Energie, 19
    Potential, 17
Quadrupolmoment
  elektrisches, 17–19, 25
Quadrupolstrahlung
  elektrische, 106

Randbedingung
  elektrisches Feld, 30
  magnetisches Feld, 56
Raumwinkelelement, 21
Reflexion, 87–91
Regenbogen, 144, 145
Relativitätstheorie
  allgemeine, 159
  Geschichte, 158–159
  spezielle, 109–136
Ringstrom, 51
Rotation, vi
Ruheenergie, 126

Schwerpunktsbewegung, 134
Skalarprodukt, iv
Snelliussches Brechungsgesetz, 87, 145
Spannungsquelle, 62
Spannungstensor, 131, 157
  elektromagnetischer, 72
  elektrostatisch, 45
Spatprodukt, v
Spule
  lange, 62
  magnetische, 49, 56–57
Stokesscher Satz, viii
Strahlungsfeld, 103
Strahlungswiderstand, 106
Strom
  elektrischer, 4
Stromdichte
  elektrische, 5
  freibewegliche Ladungs-, 55, 68
  Magnetisierungs-, 55, 68
  Polarisations-, 68
Stromkreis, 62–63
Suszeptibilität
  elektrische, 29
  magnetische, 56

TE-Mode, 93
TEM-Mode, 94
TM-Mode, 93
Totalreflexion, 90
Transformation der Felder, 121
Transversalwelle, 147

Vektoralgebra, iv
Vektoranalysis, vi
Vektorgradient, vi
vektorielles Produkt, iv
Vektorpotential, 49–50, 97, 155
Verschiebungsstrom, 156
Vierer-Impuls, 125
Vierer-Potential, 118
Viererskalar, 115–116
Viererstromdichte, 117
Vierertensor
  antisymmetrischer, 120
  symmetrischer, 132
Vierervektor, 116–119
Volumen-Integrale, viii

Welle
an Oberfläche, 90
ebene, 78–79
elektromagnetische, 77–83
im Leiter, 84–86
longitudinale, 86
Wellen
linear polarisiert, 82
zirkular polarisiert, 82
Wellengleichung, 77–78
Wellenleiter, 92–96
Wellenpaket, 95
Weltgeschwindigkeit, 116
Widerstand, 153
ohmscher, 62
Wirkung, 128, 146

Zeitdilatation, 113
Gravitation, 161
Zeitmittelwerte, 82–83

Subject Index

aberration, 146, 147
action, 128, 146
addition theorem
    velocities, 117
amber, 144, 148
Ampere's law, 47
angular momentum conservation, 134

battery, 152
betatron, 60
Biot-Savart law, 48
Bohr's magneton, 53
boundary condition
    electric field, 30
    magnetic field, 56
Brewster's angle, 89, 147

capacities, 35
capacitor, 35
    plate, 37
    spherical, 36
charge
    influence, 37
charge conservation, 5, 67, 133, 149
charge density, 3
    freely moving, 29, 68
    polarization, 29, 68
charge density per area, 4
circuit
    electric, 62–63
Clausius-Mossotti relation, 33
coil
    long, 62
    magnetic, 49, 56–57
components
    contravariant, 111
    covariant, 112
conducting plane, 38
conducting sphere, 39
conductor, 149
    electric, 34
    force on, 35
conservation laws, 132–136
corkscrew rule, 47
Coulomb force, 6, 14
Coulomb law, 150
curl, vi
current
    electric, 4
current density
    electric, 5
    free charges, 55
    freely moving, 68
    magnetization, 55, 68
    polarization, 68
current law, 63

d'Alembert operator, 98, 119
del operator, vi
density of energy current, 131
density of force, 6
dielectric constant, 29
    Clausius, Mossotti, 32
dielectric displacement, 29
diffraction, 147
dipolar moment
    electric, 17–18, 25
    magnetic, 52
        current loop, 52
        Spin, 53
dipole
    electric
        angular momentum, 19
        energy, 19
        field, 17
        force, 19
        potential, 17
    magnetic
        field, 52
        force, 53
        torque, 53
dipole radiation
    electric, 104
    magnetic, 106
Dirac delta, x, 4
displacement current, 156
distance, 115
    light-like, 116
    space-like, 115
    time-like, 115
divergence, vi
Doppler effect, 123
Doppler shift, 123
double-refraction, 146, 147

elasticity, theory of, 148
electro-magnet, 153
electromotive force, 62
electron, 154
electron radius
    classical, 14
electrostatics, 11–46

history, 148–151
energy
dipole
electric, 20
magnetic, 65
electrostatic, 14, 41
inductance, 63
quadrupole
electric, 20
energy balance, 70–71
energy current
plane wave, 79
energy current density, 71
energy density, 131
electromagnetic, 71
electrostatic, 14
plane wave, 79
energy momentum tensor, 131–136
energy, momentum conservation, 134
equation of continuity, 5, 118
equation of motion, 126
eye glasses, 145

field
charge distribution, 12
dipole
magnetic, 52
magnetic, divergency free, 154
of current distribution, 48–49
field lines
made visible, 154
field strength
electric, 12
magnetic, 55
field tensor, 120–121
dual, 121
fields
point charge, 122
flux
dielectric displacement, 29
electric, 12
magnetic, 47, 60
force
between circuits, 50, 65
between currents, 153
Coulomb, 6
Lorentz, 6
on electric dipole, 20
on magnetic dipole, 53
force density
dielectric matter, 42
electromagnetic, 70, 72–75, 131
four-momentum, 125
four-potential, 118
four-scalar, 115–116
four-tensor
antisymmetric, 120
symmetric, 132
four-vector, 116–119
current density, 117
Fourier integrals, 79–80
Fourier series, 79–80

Galilei invariance, 109
gauge
Coulomb, 98, 156
Lorenz, 98, 157
gauge transformation, 98
Gauss' theorem, viii
gradient, vi
Green's theorem, ix
group velocity, 96

Hafele-Keating experiment, 161
Hagen-Rubens law, 90
Hertz dipole, 104

index of refraction, 87
inductance, 61–66
induction
magnetic, 47–50
influence, 149, 150
influence charge, 37
integral theorems, viii

Kirchhoff's rules, 63
Kronecker delta, iv

Líenard-Wiechert potential, 137
Lagrange function, 128–130
Laplacian, vi, ix
law of induction, 59–60, 154
Legendre functions
associated, xi
Levi-Civita symbol, v
light velocity, 155
constance, 112
lightning, 144
line integrals, viii
loop of current, 51
Lorentz contraction, 114
Lorentz force, 6, 153, 157
Lorentz force density, 124
Lorentz invariance, 109
Lorentz transformation, 109–114
proper, 113

magnetite, 144
magnetization, 55
magnetostatics, 11, 47–57

history, 151–152
MAXWELL's equations, 5, 67–69, 120
in matter, 69
mechanics
relativistic, 124–127
metallic reflection, 90
metric tensor, 112
MICHELSON-MORLEY experiment, 110
MINKOWSKI force, 124
MINKOWSKI space, 111
momentum
electromagnetic, 157
momentum balance, 72–75
momentum density, 131
electromagnetic, 72
monopole
electric, 25
magnetic, 51, 57, 151
movement of center of mass, 134
multipole
electric, 24–27
potential, 25

optics, history, 148

parabolic mirror, 145
permeability, 56
phase velocity, 95
pinhole camera, 145
plasma frequency, 86
plasma oscillations, 86
point charge, 4, 12
field, 137
radiation, 139
POISSON's equation, 13
polarization, 28
potential
advanced, 101
charge distribution, 12
charge, current distribution, 100–102
electric, 11
magnetic, 57, 152
retarded, 157
retarted, 101, 119
scalar, 97
potentials, 97–99
POYNTING vector, 70, 79, 131, 157
proper time, 115, 116

quadrupolar moment
electric, 17–19, 25
quadrupole
electric
energy, 19
potential, 17
quadrupole radiation
electric, 106

radiation field, 103
radiation resistance, 106
rainbow, 144, 145
reflection, 87–91
refraction, 87–91
relativity
general theory, 159
special theory, 109–136
relativity, theory of
history, 158–159
resistor, 153
OHMIC, 62
rest energy, 126

scalar product, iv
scalar triple product, v
Snell's law, 87, 145
solid angle
element of, 21
sphere
dielectric, 31
spherical coordinates, 21
divergence, 22
gradient, 21
Laplacian, 22
volume element, 21
spherical harmonics, xi, 23
addition theorem, 26
STOKES' theorem, viii
strength of pole, 57
stress tensor, 131, 157
electromagnetic, 72
electrostatic, 45
surface integrals, viii
susceptibility
electric, 29
magnetic, 56
systems of units, i–iii, 7–9

TE-mode, 93
TEM-mode, 94
time averages, 82–83
time dilatation, 113
gravitational, 161
TM-mode, 93
torque
on electric dipole, 20
on magnetic dipole, 53
total reflection, 90
transformation of fields, 121

units, i–iii, 7–9

vector algebra, iv
vector analysis, vi
vector gradient, vi
vector potential, 49–50, 97, 155
vector product, iv
velocity of light, 6, 146
    vacuum, 78
voltage law, 63
voltage source, 62
volume integrals, viii

wave
    at surface, 90
    circularly polarized, 82
    electromagnetic, 77–83
    in conductor, 84–86
    linearly polarized, 82
    longitudinal, 86
    plane, 78–79
    transversal, 147
wave equation, 77–78
wave guide, 92–96
wave packet, 95
world velocity, 116

Inhalt Elektrodynamik Contents Electrodynamics

A Grundgleichungen Basic Equations 3

1 Grundgleichungen der Elektrodynamik Basic Equations of Electrodynamics 3
1.a Ladungen und Ströme Charges and Currents . . . 3
1.a.α Ladungsdichte Charge Density . . . 3
1.a.β Strom und Stromdichte Current and Current Density . . . 4
1.a.γ Ladungserhaltung und Kontinuitätsgleichung Conservation of Charge and Equation of Continuity . . . 5
1.b Maxwell-Gleichungen Maxwell's Equations . . . 5
1.c Coulomb- und Lorentz-Kraft Coulomb and Lorentz Force . . . 6

2 Dimensionen und Einheiten Dimensions and Units 7
2.a Gausssches Maßsystem Gaussian Units . . . 7
2.b Andere Einheitensysteme Other Systems of Units . . . 7
2.c Motivation für Gausssche Einheiten Motivation for Gaussian Units . . . 9

B Elektrostatik Electrostatics 11

3 Elektrisches Feld, Potential, Energie des Feldes Electric Field, Potential, Energy of the Field 11
3.a Statik Statics . . . 11
3.b Elektrisches Feld und Potential Electric Field and Potential . . . 11
3.b.α Elektrisches Potential Electric Potential . . . 11
3.b.β Elektrischer Fluss und Ladung Electric Flux and Charge . . . 12
3.b.γ Potential einer Ladungsverteilung Potential of a Charge Distribution . . . 13
3.c Coulombkraft und Feldenergie Coulomb Force and Field Energy . . . 14

4 Elektrischer Dipol und Quadrupol Electric Dipole and Quadrupole 16
4.a Das Feld für $r > R$ The Field for $r > R$ . . . 16
4.b Transformationseigenschaften Transformation Properties . . . 17
4.c Dipol Dipole . . . 18
4.d Quadrupol Quadrupole . . . 18
4.d.α Symmetrien Symmetries . . . 18
4.d.β Symmetrischer Quadrupol Symmetric Quadrupole . . . 19
4.e Energie, Kraft und Drehmoment auf einen Multipol im äußeren Feld Energy, Force and Torque on a Multipole in an external Field . . . 19

5 Multipol-Entwicklung in Kugelkoordinaten Multipole Expansion in Spherical Coordinates 21
5.a Poisson-Gleichung in Kugelkoordinaten Poisson Equation in Spherical Coordinates . . . 21
5.a.α Der Gradient The Gradient . . . 21
5.a.β Die Divergenz The Divergence . . . 22
5.a.γ Der Laplace-Operator The Laplacian . . . 22
5.b Kugelflächenfunktionen Spherical Harmonics . . . 23
5.c Radialgleichung und Multipol-Momente Radial Equation and Multipole Moments . . . 24
5.d Punktladung am Ort $\mathbf{r}'$, zylindersymmetrische Ladungsverteilung Point Charge at $\mathbf{r}'$, Cylindric Charge Distribution . . . 26

6 Elektrisches Feld in Materie Electric Field in Matter 28
6.a Polarisation und dielektrische Verschiebung Polarization and Dielectric Displacement . . . 28
6.b Grenzflächen zwischen Dielektrika Boundaries between Dielectric Media . . . 30
6.c Dielektrische Kugel im homogenen elektrischen Feld Dielectric Sphere in a Homogeneous Electric Field . . . 31

6.d Dielektrizitätskonstante nach Clausius und Mossotti Dielectric Constant according to Clausius and Mossotti 32

7 Elektrizität auf Leitern Electricity on Conductors 34
7.a Elektrische Leiter Electric Conductors 34
7.a.α Randbedingungen an der Leiteroberfläche Boundary Conditions at the Surface of the Conductor 34
7.a.β Kraft auf Leiter (im Vakuum) Force acting on the Conductor (in Vacuo) 35
7.b Kapazitäten Capacities 35
7.c Influenzladungen Influence Charges 37
7.c.α Leiterfreier Raum Space free of Conductors 38
7.c.β Leitende Ebene Conducting Plane 38
7.c.γ Leitende Kugel Conducting Sphere 39

8 Energie, Kräfte und Spannungen im Dielektrikum Energy, Forces and Stress in Dielectric Media 41
8.a Elektrostatische Energie Electrostatic Energy 41
8.b Kraftdichte im isotropen Dielektrikum Force Density in Isotropic Dielectric Matter 42
8.c Maxwellscher Spannungstensor Maxwell's Stress Tensor 45

C Magnetostatik Magnetostatics 47

9 Magnetische Induktion und Vektorpotential Magnetic Induction and Vector Potential 47
9.a Amperegesetz Ampere's Law 47
9.b Magnetischer Fluss Magnetic Flux 47
9.c Feld einer Stromverteilung Field of a Current Distribution 48
9.d Vektorpotential Vector Potential 49
9.e Kraft zwischen zwei Stromkreisen Force Between Two Circuits 50

10 Ringströme als magnetische Dipole Loops of Current as Magnetic Dipoles 51
10.a Lokalisierte Stromverteilung und magnetischer Dipol Localized Current Distribution and Magnetic Dipole 51
10.b Magnetisches Dipolmoment eines Ringstroms Magnetic Dipolar Moment of a Current Loop . 52
10.c Kraft und Drehmoment auf einen Dipol im äußeren magnetischen Feld Force and Torque on a Dipole in an External Magnetic Field 53
10.c.α Kraft Force 53
10.c.β Drehmoment Torque 53

11 Magnetismus in Materie. Feld einer Spule Magnetism in Matter. Field of a Coil 55
11.a Magnetismus in Materie Magnetism in Matter 55
11.b Feld einer Spule Field of a coil 56

D Induktionsgesetz Law of Induction 59

12 Faradaysches Induktionsgesetz Faraday's Law of Induction 59

13 Induktivitäten und Stromkreise Inductances and Electric Circuits 61
13.a Induktivitäten Inductances 61
13.b Stromkreis-Elemente Elements of Circuits 62
13.c Kirchhoffsche Regeln Kirchhoff's Rules 63
13.d Energie von Induktivitäten Energy of Inductances 63
13.d.α Konstante Induktivitäten Constant Inductances 64
13.d.β Gegeneinander bewegte Stromkreise Moving Loops of Currents 64
13.d.γ Konstante magnetische Flüsse Constant Magnetic Fluxes 64
13.d.δ Kraft zwischen zwei Stromkreisen Force between two Electric Circuits 65

13.d.ϵ Energie eines magnetischen Dipols im äußeren Magnetfeld Energy of a Magnetic Dipole in an External Magnetic Induction . . . 65
13.d.ζ Permanente magnetische Momente Permanent Magnetic Moments . . . 65

E Maxwell-Gleichungen Maxwell's Equations 67

14 Vollständige Maxwell-Gleichungen Complete Set of Maxwell's Equations 67
14.a Widerspruchsfreiheit der Maxwell-Gleichungen Consistency of Maxwell's Equations . . . 67
14.b Maxwell-Gleichungen für freibewegliche Ladungen und Ströme Maxwell's Equations for Freely Moving Charges and Currents . . . 68

15 Energie- und Impuls-Bilanz Energy and Momentum Balance 70
15.a Energie Energy . . . 70
15.b Impuls-Bilanz Momentum Balance . . . 72

F Elektromagnetische Wellen Electromagnetic Waves 77

16 Elektromagnetische Wellen im Vakuum und in homogenen isotropen Isolatoren Electromagnetic Waves in Vacuum and in Homogeneous Isotropic Insulators 77
16.a Wellengleichung Wave Equation . . . 77
16.b Ebene Wellen Plane Waves . . . 78
16.c Überlagerung ebener periodischer Wellen Superposition of Plane Periodic Waves . . . 79
16.c.α Einschub über Fourier-Reihen und Integrale Insertion on Fourier Series and Integrals 79
16.c.β Zurück zu den Maxwell-Gleichungen Back to Maxwell's Equations . . . 80
16.c.γ Zeitmittelwerte und Zeitintegrale Time averages and time integrals . . . 82

17 Elektromagnetische Wellen in homogenen Leitern Electromagnetic Waves in Homogeneous Conductors 84
17.a Transversal-Schwingungen bei niedrigen Frequenzen Transverse Oscillations at Low Frequencies . . . 84
17.b Transversal-Schwingungen bei hohen Frequenzen Transverse Oscillations at High Frequencies 85
17.c Longitudinale = Plasma-Schwingungen Longitudinal = Plasma Oscilations . . . 86

18 Reflexion und Brechung an einer ebenen Grenzfläche Reflection and Refraction at a Planar Surface 87
18.a Problemstellung und Ausbreitungsrichtung Problem and Direction of Propagation . . . 87
18.b Grenzbedingungen, Amplituden Boundary Conditions, Amplitudes . . . 88
18.c Diskussion für $\mu_1 = \mu_2$ Discussion for $\mu_1 = \mu_2$ . . . 89
18.c.α Isolator, $|\sin\alpha_2| < 1$: Brechung Insulator, $|\sin\alpha_2| < 1$: Refraction . . . 89
18.c.β Isolator, $|\sin\alpha_2| > 1$: Totalreflexion Insulator, $|sin\alpha_2| > 1$: Total Reflection . . . 90
18.c.γ Metallische Reflexion, $\alpha = 0$ Metallic Reflection, $\alpha = 0$ . . . 90
18.c.δ Oberflächenwellen am Leiter Surface Waves along a Conductor . . . 90

19 Hohlleiter Wave Guides 92
19.a Hohlleiter Wave Guides . . . 92
19.b Lösung für rechteckigen Querschnitt Solution for a Rectangular Cross Section . . . 95
19.c Wellenpakete Wave Packets . . . 95

G Elektrodynamische Potentiale Electrodynamic Potentials 97

20 Elektrodynamische Potentiale, Eichtransformationen Electrodynamic Potentials, Gauge Transformations 97
20.a Potentiale Potentials . . . 97
20.b Eichtransformationen Gauge Transformations . . . 98

21 Die elektromagnetischen Potentiale einer allgemeinen Ladungs- und Stromverteilung Electromagnetic Potentials of a general Charge and Current Distribution 100
21.a Berechnung der Potentiale Calculation of the Potentials . . . 100
21.b Eichbedingung Gauge Condition . . . 101

22 Ausstrahlung harmonischer Schwingungen Radiation from Harmonic Oscillations 103
22.a Strahlungsfeld Radiation Field . . . 103
22.a.α Nahzone (Statische Zone) Near Zone (Static Zone) . . . 103
22.a.β Fernzone (Strahlungszone) Far Zone (Radiation Zone) . . . 103
22.b Elektrische Dipolstrahlung (Hertzscher Dipol) Electric Dipole Radiation (Hertz Dipole) . . . 104
22.c Magnetische Dipolstrahlung und elektrische Quadrupolstrahlung Magnetic Dipole radiation and Electric Quadrupole Radiation . . . 106
22.c.α Magnetische Dipolstrahlung Magnetic Dipole Radiation . . . 106
22.c.β Elektrische Quadrupolstrahlung Electric Quadrupole Radiation . . . 107

H Lorentz-Invarianz der Elektrodynamik Lorentz Invariance of Electrodynamics 109

23 Lorentz-Transformation Lorentz Transformation 109
23.a Galilei- und Lorentz-Transformation Galilei and Lorentz Transformation . . . 109
23.b Lorentz-Transformation Lorentz Transformation . . . 111
23.b.α Zeitdilatation Time Dilatation . . . 113
23.b.β Längenkontraktion Lorentz Contraction . . . 114

24 Vierergrößen und Vierervektoren Four-Scalars and Four-Vectors 115
24.a Abstand und Eigenzeit als Vierergrößen Distance and Proper Time as Four-Scalars . . . 115
24.a.α Raumartiger Abstand $s^2 < 0$ Space-like distance $s^2 < 0$ . . . 115
24.a.β Zeitartiger Abstand $s^2 > 0$ Time-like distance $s^2 > 0$ . . . 115
24.a.γ Lichtartiger Abstand $s^2 = 0$ Light-like distance $s^2 = 0$ . . . 116
24.b Weltgeschwindigkeit als Vierervektor World Velocity as Four-Vector . . . 116
24.c Viererstromdichte Current Density Four-Vector . . . 117
24.d Viererpotential Four-Potential . . . 118

25 Elektromagnetischer Feldtensor Electromagnetic Field Tensor 120
25.a Feldtensor Field Tensor . . . 120
25.b Maxwell-Gleichungen Maxwell's Equations . . . 120
25.b.α Die inhomogenen Gleichungen The Inhomogeneous Equations . . . 120
25.b.β Die homogenen Gleichungen The Homogeneous Equations . . . 121
25.c Transformation der elektrischen und magnetischen Felder Transformation of the Electric and Magnetic Fields . . . 121
25.d Felder einer gleichförmig bewegten Punktladung Fields of a Point Charge in Uniform Motion 122
25.e Doppler-Effekt Doppler Effect . . . 123

26 Relativistische Mechanik Relativistic Mechanics 124
26.a Lorentz-Kraftdichte Lorentz Force Density . . . 124
26.b Lorentz-Kraft auf eine Punktladung Lorentz Force Acting on a Point Charge . . . 124
26.c Energie und Impuls eines Massenpunktes Energy and Momentum of a Mass Point . . . 125
26.d Bewegungsgleichung Equation of Motion . . . 126

27 Lagrange-Formulierung Lagrangian Formulation 128
27.a Lagrange-Funktion einer massiven Ladung im elektromagnetischen Feld Lagrangian of a Massive Charge in the Electromagnetic Field . . . 128
27.b Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes Lagrangian Density of the Electromagnetic Field . . . 129

28 Energie-Impuls-Tensor und Erhaltungsgrößen Energy Momentum Tensor and Conserved Quantities 131
28.a Der Tensor The Tensor . . . 131
28.b Erhaltungssätze Conservation Laws . . . 132
28.b.α Ladung Charge . . . 133
28.b.β Energie und Impuls Energy and Momentum . . . 134
28.b.γ Drehimpuls und Schwerpunktsbewegung Angular Momentum and Movement of Center of Mass . . . 134

29 Feld einer beliebig bewegten Punktladung Field of an arbitrarily Moving Point-Charge 137
29.a Liénard-Wiechert-Potential Liénard-Wiechert Potential . . . 137
29.b Die Felder The Fields . . . 137
29.c Gleichförmige Bewegung Uniform Motion . . . 139
29.d Beschleunigte Ladung momentan in Ruhe Accelerated Charge Momentarily at Rest . . . 139
29.e Abstrahlung, $\beta \neq 0$ Emitted Radiation $\beta \neq 0$ . . . 140

I Rückblick und Ausblick Review and Outlook 143

30 Kurze Geschichte der Elektrodynamik Short History of Electrodynamics 143
30.a Theorie des Lichts bis Fresnel Theory of Light to Fresnel . . . 144
30.b Elektrostatik Electrostatics . . . 148
30.c Magnetostatik Magnetostatics . . . 151
30.d Aufbruch zur Elektrodynamik Set out for Electrodynamics . . . 152
30.e Elektrodynamik und Wellen Electrodynamics and Waves . . . 154
30.f Relativitätstheorie Theory of Relativity . . . 158
30.g Von der klassischen zur Quanten-Elektrodynamik From Classical to Quantum Electrodynamics 159

31 Gravitations-Zeitdilatation Gravitational Time Dilatation 161
31.a Lichtquant im Gravitationsfeld Light Quantum in the Gravitational Field . . . 161
31.b Äquivalenz-Prinzip Principle of Equivalence . . . 162

Anhänge Appendices i

A Umrechnung zwischen Maßsystemen der Elektrodynamik Connection between different Systems of Units i

B Formeln zur Vektorrechnung Formulae for Vector Calculus iv
B.a Vektoralgebra Vector Algebra . . . iv
B.a.α Summationskonvention und orthonormale Basis Summation Convention and Orthonormal Basis . . . iv
B.a.β Skalarprodukt Scalar Product . . . iv
B.a.γ Vektorielles Produkt Vector Product . . . iv
B.a.δ Mehrfachprodukte Multiple Products . . . v
B.b Vektoranalysis Vector Analysis . . . vi
B.b.α Räumliche Differentiation, Nabla-Operator Differentiation in Space, Del Operator . . . vi
B.b.β Zweifache Ableitung, Laplace-Operator Second Derivatives, Laplacian . . . vi
B.b.γ Ableitung von Produkten Derivatives of Products . . . vii
B.c Spezielle Ausdrücke Special Expressions . . . vii
B.d Integral-Sätze Integral Theorems . . . viii
B.d.α Linien-Integrale Line Integrals . . . viii
B.d.β Flächen-Integrale Surface Integrals . . . viii
B.d.γ Volumen-Integrale Volume Integrals . . . viii
B.d.δ Volumen-Integrale über Produkte Volume Integrals of Products . . . ix
B.e Der Laplace-Operator von $1/r$ und Verwandtes The Laplacian of $1/r$ and Related Expressions ix
B.e.α Der Laplace-Operator von $1/r$ The Laplacian of $1/r$ . . . ix

B.e.β Darstellung eines Vektorfeldes als Summe eines rotationsfreien und eines divergenzfreien Feldes Representation of a Vector Field as a Sum of an Irrotational and a Divergence-free Field x

C Kugelflächenfunktionen Spherical Harmonics xi

C.a Eigenwert-Problem und Separation der Variablen Eigenvalue Problem and Separation of Variables xi

C.b Zugeordnete LEGENDRE-Funktionen Associated LEGENDRE Functions xi

C.c Orthogonalität und Normierung Orthogonality and Normalization xiii

C.d Bemerkung zur Vollständigkeit Remark on Completeness xiv

Namensregister Name Index xvii

Sachregister xix

Subject Index xxiii

Inhalt Contents xxvii