Klassische Mechanik

Theoretische Physik I Vorlesungs-Skriptum

Franz Wegner
Institut für Theoretische Physik
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
Winter 2004/05

Empfohlene Literatur:

H. Horner, Skriptum zur Mechanik (SS 2003)
(http://www.tphys.uni-heidelberg.de/~horner/Mechanik-03.pdf)
T. Fließbach, Mechanik
W. Greiner, Mechanik I und II
R. Jelitto, Mechanik I und II
H. Goldstein, Classical Mechanics, 3rd Edition expensive and very good
(als deutsche Übersetzung ist nur die der 2. Auflage gebraucht erhältlich, Auflagen-Nummerierung im englischen und deutschen verschieden)
V. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics
F. Scheck, Mechanik
Landau-Lifschitz, Theoretische Physik, Band I Mechanik

Bemerkungen: Nur die 3. Auflage von Goldstein, die Mechanik von Horner und von Scheck enthalten Chaos. Arnold und Scheck sind mathematisch anspruchsvoller, Landau-Lifschitz startet fast sofort mit der Lagrange-Funktion.
Soweit die mathematischen Vorkenntnisse noch nicht ausreichen, sei auf den Mathematischen Vorkurs von Klaus Hefft verwiesen (http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~hefft/vk1/).

Für Hinweise auf Druckfehler bin ich dankbar.

Einleitung

Die theoretische Physik widmet sich der Beschreibung der unbelebten Natur (in neuerer Zeit macht sie erste Schritte in der belebten Natur im Rahmen der Biophysik) durch einheitliche Gesetze, die aus Beobachtungen und Experimenten hergeleitet werden, und möglichst allgemein gültig sein und den Ablauf weiterer Experimente vorhersagen sollen.

Wir befassen uns hier mit der klassischen Mechanik, das heißt:
a) wir behandeln die nicht-relativistische Mechanik. Wir gehen davon aus, dass alle auftretenden Geschwindigkeiten klein gegen die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c sind, und wir setzen einen absoluten Zeitbegriff voraus.
b) wir behandeln die Mechanik nicht quantenmechanisch. Wir betrachten nur makroskopische Körper, bei denen für die Orts- und Impulsauflösung $\Delta x \Delta p \gg h$ mit dem Wirkungsquantum h gilt.

Zu dieser Idealisierung kommt man, wenn man $c \to \infty$ und $h \to 0$ gehen lässt.

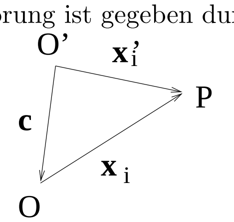
Wichtige Wegbereiter der klassischen Mechanik waren
Galileo Galilei (1564-1642),
Johannes Kepler (1571-1630),
Isaac Newton (1642-1727) und
Joseph Lagrange (1736-1813).

A Grundbegriffe und einfache Systeme

1 Raum und Zeit, Elemente der Vektoralgebra

1.a Ortsvektor

Wir betrachten Massenpunkte i, $i = 1..N$. Dies ist eine Idealisierung, da Massen häufig ausgedehnt sind. Wir denken uns die Masse im Schwerpunkt konzentriert. Diese Massenpunkte durchlaufen eine Bahnkurve $\mathbf{x}_i(t)$. Dabei ist $\mathbf{x}_i$ der Ortsvektor von einem Ursprung O aus zum Schwerpunkt. t ist die Zeit, gemessen von einem geeigneten Zeitpunkt an. Sie wird in der nicht-relativistischen Physik als absolut angenommen, das heißt man geht von einem absoluten Begriff der Gleichzeitigkeit aus. Den Raum nehmen wir als euklidisch und dreidimensional an. Die Transformation zwischen Bezugssystemen mit unterschiedlichem Ursprung ist gegeben durch



$$\overrightarrow{O'P_i} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_i}, \quad (1.1)$$
$$\mathbf{x}'_i = \mathbf{c} + \mathbf{x}_i. \quad (1.2)$$

1.b Vektoralgebra

Entwicklung nach einer Basis:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = \sum_\alpha a_\alpha \mathbf{e}_\alpha \quad (1.3)$$

oder mit der Einsteinschen Summenkonvention

$$\mathbf{a} = a_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad (1.4)$$

über doppelt auftretende Indices in einem Produkt wird summiert. Wir werden für die Kennzeichnung der kartesischen Komponenten griechische Buchstaben verwenden, während wir verschiedene Massenpunkte mit lateinischen Buchstaben kennzeichnen. Die Einsteinsche Summenkonvention verwenden wir nur für die kartesischen Komponenten. Man schreibt auch

$$\mathbf{a} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

1.b.α Addition

Es gelten das Kommutativgesetz

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} = (a_\alpha + b_\alpha)\mathbf{e}_\alpha, \quad (1.6)$$

das Assoziativgesetz

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}), \tag{1.7}$$

das Setzen der Klammern ist daher überflüssig. Weiter gilt für die Multiplikation mit einer C-Zahl

$$\lambda\mathbf{a}=(\lambda a_\alpha)\mathbf{e}_\alpha. \tag{1.8}$$

Jede Komponente des Nullvektors $\mathbf{0}$ ist 0. $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$.

1.b.β Skalarprodukt

Man definiert das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\sphericalangle\mathbf{a},\mathbf{b})=ab\cos(\sphericalangle\mathbf{a},\mathbf{b}) \tag{1.9}$$

Um dieses Skalarprodukt durch seine Komponenten ausdrücken zu können, müssen wir noch die Metrik unserer Basis festlegen. Wir arbeiten im Folgenden mit einer orthonormierten Basis. Das heißt, die Basis-Vektoren sind Einheits-Vektoren, ihre Länge ist 1, und sie stehen senkrecht aufeinander. Dann gilt

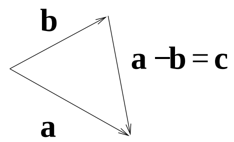
$$\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{e}_\beta=\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}1 & \alpha=\beta\\ 0 & \alpha\neq\beta\end{cases} \tag{1.10}$$

Dabei bezeichnet man $\delta_{\alpha\beta}$ als das Kronecker-Delta. Die Projektion des Vektors $\mathbf{a}$ auf die α-Achse erhält man aus

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\alpha=a_\beta\mathbf{e}_\beta\cdot\mathbf{e}_\alpha=a_\beta\delta_{\beta,\alpha}=a_\alpha. \tag{1.11}$$

Für das Produkt eines Vektors mit sich selbst folgt aus dem Pythagoras

$$a^2=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})=\sum_\alpha a_\alpha^2=a_\alpha a_\alpha \tag{1.12}$$



Für $\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$ folgt dann

$$c^2=\sum_\alpha(a_\alpha-b_\alpha)^2=a^2+b^2-2a_\alpha b_\alpha=a^2+b^2-2ab\cos(\sphericalangle\mathbf{a},\mathbf{b}) \tag{1.13}$$

wobei wir nach dem letzten Gleichheitszeichen den Cosinus-Satz verwendet haben. Damit folgt

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_\alpha b_\alpha. \tag{1.14}$$

Es gilt das Kommutativgesetz

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} \tag{1.15}$$

und das Distributivgesetz

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}, \tag{1.16}$$

$$\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{c}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}. \tag{1.17}$$

Es gilt kein Assoziativgesetz.

1.b.γ Vektorielles Produkt

Definition: Das vektorielle Produkt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ steht senkrecht auf $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$. Sein Betrag ist gegeben durch

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin(\sphericalangle \mathbf{a}, \mathbf{b}) \tag{1.18}$$

Der Betrag ist also gleich der Fläche des von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelograms. Die Richtung wird festgelegt durch die Bedingung, dass $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ in dieser Reihenfolge ein Rechts-System bilden, das heißt: Weist $\mathbf{a}$ in Richtung des Daumens und $\mathbf{b}$ in Richtung des Zeigefingers der rechten Hand, dann weist $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ in Richtung des Mittelfingers dieser Hand. Es gilt das Antikommutativgesetz

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}. \tag{1.19}$$

Beachten Sie das Minus-Zeichen. Das vektorielle Produkt kann in Komponenten folgendermassen ausgedrückt werden:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\alpha b_\beta \mathbf{e}_\gamma \tag{1.20}$$

(Einstein-Konvention) mit dem Levi-Civita-Symbol

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} +1 & (\alpha\beta\gamma) = (123), (231), (312), \\ -1 & \qquad\quad = (132), (213), (321), \\ 0 & \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.21}$$

Das Levi-Civita-Symbol verschwindet, wenn zwei Indices übereinstimmen. Sind alle drei Indices verschieden voneinander, so ist es $+1$, wenn die Indices eine gerade, -1, wenn sie eine ungerade Permutation der Zahlen 1,2,3 darstellen. Offensichtlich ist

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \epsilon_{\beta\gamma\alpha} = -\epsilon_{\beta\alpha\gamma}. \tag{1.22}$$

Es gilt das Distributivgesetz

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}. \tag{1.23}$$

1.b.δ Mehrfach-Produkte

Ein häufig vorkommendes Dreifach-Produkt ist das Spat-Produkt aus drei Vektoren

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] := (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\alpha b_\beta c_\gamma. \tag{1.24}$$

Das Spatprodukt verschwindet, wenn die drei Vektoren komplanar oder, was äquivalent ist, wenn sie linear abhängig sind. Es verschwindet insbesondere, wenn zwei der drei Vektoren übereinstimmen. Daraus folgt $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \times$

$\mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$. Daher ist $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ tatsächlich auf $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ orthogonal. Als nächstes betrachten wir

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_\gamma (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\alpha b_\beta \epsilon_{\sigma\tau\gamma} a_\sigma b_\tau. \tag{1.25}$$

Zur weiteren Auswertung ist die Beziehung

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\sigma\tau\gamma} = \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\tau} - \delta_{\alpha\tau}\delta_{\beta\sigma}, \tag{1.26}$$

nützlich, die man sich überlege. Dann folgt

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 &= a_\alpha b_\beta a_\sigma b_\tau (\delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\tau} - \delta_{\alpha\tau}\delta_{\beta\sigma}) = a_\alpha b_\beta a_\alpha b_\beta - a_\alpha b_\beta a_\beta b_\alpha \qquad (1.27) \\ &= a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = a^2 b^2 (1 - \cos^2(\sphericalangle \mathbf{a}, \mathbf{b})) = a^2 b^2 \sin^2(\sphericalangle \mathbf{a}, \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Der Betrag des Vektorprodukts entspricht daher auch der Definition. Verlangen wir noch, dass $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$ ein Rechtssystem bilden, dann kann man durch stetig Veränderung von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ausgehend von $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1$ und $\mathbf{b} = \mathbf{e}_2$ sehen, dass $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ein Rechtssystem bilden. Es gilt daher

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = +1 \text{ und allgemein } [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\gamma] = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}. \tag{1.28}$$

1.c Entwicklung nach verschiedenen orthonormalen Rechtsbasen

Wir betrachten nun zwei verschiedene orthonormale Basen $\{\mathbf{e}\}$ und $\{\mathbf{e}'\}$, die gegeneinander verdreht sind. Der Vektor $\mathbf{x}$ kann nach beiden Basen entwickelt werden

$$\mathbf{x} = x_\alpha \mathbf{e}_\alpha = x'_\beta \mathbf{e}'_\beta \tag{1.29}$$

Wir erhalten dann

$$x'_\beta = (\mathbf{e}'_\beta \mathbf{x}) = (\mathbf{e}'_\beta \mathbf{e}_\alpha) x_\alpha = A_{\beta\alpha} x_\alpha, \quad A_{\beta\alpha} = (\mathbf{e}'_\beta \mathbf{e}_\alpha). \tag{1.30}$$

Für die Komponenten gilt dann

$$x' = Ax, \tag{1.31}$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{1.32}$$

Die Rücktransformation ergibt sich zu

$$x_\alpha = (\mathbf{e}_\alpha \mathbf{x}) = (\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}'_\beta) x'_\beta = A_{\beta\alpha} x'_\beta. \tag{1.33}$$

Wir haben also

$$x = A^{\mathrm{T}} x', \tag{1.34}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}. \tag{1.35}$$

wobei A^{T} die zu A transponierte Matrix ist. Man erhält sie durch Vertauschen von Zeilen und Spalten

$$A^{\mathrm{T}}_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha} \tag{1.36}$$

Transformieren wir hin und zurück, so erhalten wir

$$x' = Ax = AA^{\mathrm{T}}x', \quad x = A^{\mathrm{T}}x' = A^{\mathrm{T}}Ax \tag{1.37}$$

Da diese Beziehungen für beliebige x und x' gelten, muss AA^{T} und $A^{\mathrm{T}}A$ die Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ sein

$$AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A = \mathbb{1} \tag{1.38}$$

mit

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \tag{1.39}$$

Wir erinnern an die Regel für die Matrizen-Multiplikation

$$(AB)_{\alpha\gamma} = A_{\alpha\beta}B_{\beta\gamma} \tag{1.40}$$

Matrizen A mit der Eigenschaft (1.38) bezeichnet man als orthogonal; sie bilden die orthogonale Gruppe $O(3)$. Gehören A und B zur Gruppe $O(3)$, so gehört ihr auch AB an

$$(AB)^{\mathrm{T}}(AB) = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AB = B^{\mathrm{T}}B = \mathbb{1} \tag{1.41}$$

Man beachte, dass $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$, da

$$(AB)^{\mathrm{T}}_{\alpha\gamma} = (AB)_{\gamma\alpha} = A_{\gamma\beta}B_{\beta\alpha} = B^{\mathrm{T}}_{\alpha\beta}A^{\mathrm{T}}_{\beta\gamma} = (B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})_{\alpha\gamma}. \tag{1.42}$$

1.c.α Vollständigkeits-Beziehung

Für beliebige Vektoren $\mathbf{x}$ gilt

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_\alpha(\mathbf{e}_\alpha\mathbf{x}) = \mathbf{e}'_\beta(\mathbf{e}'_\beta\mathbf{x}) \tag{1.43}$$

Durch Einschieben des vollständigen Satzes von Projektoren auf die x bzw. x'-Achse erhalten wir wieder den Vektor. Das heißt

$$\mathbf{e}_\alpha)(\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}'_\beta)(\mathbf{e}'_\beta = \mathbb{1} \tag{1.44}$$

Man bezeichnet diese Beziehung als Vollständigkeits-Relation. Nur wenn man die Summation über alle α oder β durchführt, erhält man stets wieder $\mathbf{x}$.

1.c.β Rechts-/Links-Basis

Wir hatten $AA^{\mathrm{T}} = \mathbf{1}$. Daraus folgt mit dem Determinanten-Multiplikationssatz $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

$$\det(A)\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(\mathbb{1}), \tag{1.45}$$

also

$$\det(A)^2 = 1, \quad \det(A) = \pm 1. \tag{1.46}$$

Was ist die Bedeutung der beiden Vorzeichen? Hierzu betrachten wir

$$\begin{aligned}
[\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3] &= [A_{1\alpha}\mathbf{e}_\alpha, A_{2\beta}\mathbf{e}_\beta, A_{3\gamma}\mathbf{e}_\gamma] && (1.47)\\
&= A_{1\alpha}A_{2\beta}A_{3\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] && (1.48)\\
&= \det A[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]. && (1.49)
\end{aligned}$$

Falls $\det A = +1$ und $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ ein Rechtssystem, dann ist auch $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ ein Rechtssystem. Die orthogonalen Matrizen mit $\det A = +1$ bilden die **s**pezielle **o**rthogonale Gruppe $SO(3)$. Unter dieser Transformation wird die Basis in eine andere rotiert.

Die Transformation mit $\det A = -1$ führt ein Rechts- in ein Linkssystem über und umgekehrt. Eine solche Transformation bedeutet eine Rotation der Basis und eine zusätzliche Spiegelung.

1.c.γ Vektor-Definition

Wenn und nur wenn sich ein Tripel von Zahlen a_1, a_2, a_3 beim Übergang von einer ONRB (Orthonormierten Rechts-Basis) $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ in jede andere ONRB $\{\mathbf{e}'_\beta\}$ gemäß $a_\alpha = A_{\beta\alpha}a'_\beta$ transformiert, so stellen die a_α die Komponenten eines Vektors dar.

1.c.δ Allgemeine Transformation, aktive und passive Transformation

Eine allgemeine Transformation zwischen zwei Koordinatensystemen setzt sich aus einer Rotation der Basis und einer Verschiebung des Ursprungs zusammen.

$$x'_\beta = A_{\beta\alpha}x_\alpha + c_\beta. \tag{1.50}$$

Wir haben hier ein und dieselben Orte, das heißt ein und dasselbe System, in verschiedenen Koordinatensystemen betrachtet. Eine solche Transformation bezeichnet man als passive Transformation, da sich am System nichts ändert, nur an seiner Beschreibung.

Davon zu unterscheiden ist die aktive Transformation. Bei dieser behält man das Koordinatensystem bei, verschiebt und verdreht aber das ganze System. Hier gelten natürlich für die Koordinaten des alten und des neuen Systems die gleichen Transformationsgleichungen, aber sie haben nun eine andere Bedeutung.

1.d Geschwindigkeit

Wir bezeichnen die Zeitableitung mit einem Punkt und führen die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ als Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit ein

$$\mathbf{v}_i(t) = \dot{\mathbf{x}}_i(t) = \dot{x}_{i\alpha}(t)\mathbf{e}_\alpha. \tag{1.51}$$

$\mathbf{v}_i(t)$ ist ein Vektor, denn

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \dot{x}'_{i\beta}\mathbf{e}'_\beta = \dot{x}'_{i\beta}A_{\beta\alpha}\mathbf{e}_\alpha = \dot{x}_{i\alpha}\mathbf{e}_\alpha, \tag{1.52}$$

also

$$v_{i\alpha} = A_{\beta\alpha}v'_{i\beta}. \tag{1.53}$$

1.e Beschleunigung

Die Beschleunigung $\mathbf{a}$ ist die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit

$$\mathbf{a}_i(t) = \dot{\mathbf{v}}_i(t) = \dot{v}_{i\alpha}(t)\mathbf{e}_\alpha = \ddot{x}_{i\alpha}(t)\mathbf{e}_\alpha. \tag{1.54}$$

Sie ist ebenfalls ein Vektor.

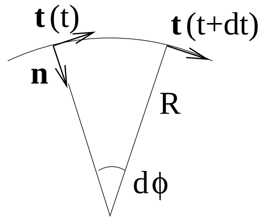
Zerlegung der Beschleunigung in Tangential- und Normalbeschleunigung Wir schreiben

$$\mathbf{v} = v\mathbf{t}, \quad |\mathbf{t}| = 1. \tag{1.55}$$

Dabei ist v der Betrag der Geschwindigkeit und $\mathbf{t}$ der Tangentialvektor an die Bahnkurve[1]. Die Zeitableitung gibt

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\mathbf{t} + v\dot{\mathbf{t}}. \tag{1.56}$$

Der erste Term auf der rechten Seite gibt die Tangentialbeschleunigung, das heißt die Komponente in Richtung der Geschwindigkeit an. Der zweite Term ist orthogonal auf $\mathbf{t}$, da $(\mathbf{t}^2)^{\cdot} = 2\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{t}} = \dot{1} = 0$. Der Einheitsvektor in Richtung von $\dot{\mathbf{t}}$ sei $\mathbf{n}$. Dieser wird als Normalenvektor bezeichnet. Die von $\mathbf{t}$ und $\mathbf{n}$ aufgespannte Ebene wird als Schmiegebene bezeichnet, da sich die Bahn in diese Ebene schmiegt.



Aus

$$\mathrm{d}\mathbf{t} = \mathbf{n}\mathrm{d}\phi = \mathbf{n}\frac{\mathrm{d}s}{R} \tag{1.57}$$

mit dem momentanen Krümmungsradius R der Bahn folgt dann

$$\dot{\mathbf{t}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{n}\frac{v}{R} \tag{1.58}$$

und damit

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\mathbf{t} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n}. \tag{1.59}$$

Die Normal- oder Zentripedalbeschleunigung ist v^2/R.

[1] Man verwechsle nicht $\mathbf{t}$ und t, die hier ganz unterschiedliche Bedeutung haben

2 Newtonsche Bewegungsgesetze

2.a Newtonsches Bewegungsgesetz

2. Newtonsches Gesetz - lex secunda "Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen Linie, nach welcher jene Kraft wirkt."

Jeder Massenpunkt hat einen Impuls, in der nicht-relativistischen Form

$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i \tag{2.1}$$

sonst allgemein $\mathbf{p}_i(m_i, \mathbf{v}_i)$. Dabei ist m_i die träge Masse des Massenpunktes Nummer i. Die zeitliche Änderung des Impulses ist die Kraft $\mathbf{F}_i$ (bei Newton actio), die auf den Massenpunkt wirkt

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_i(t)}{\mathrm{d}t} = m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{F}_i. \tag{2.2}$$

Ein System von N Massenpunkten übt auf den $i$ten Massenpunkt die Kraft $\mathbf{F}_i^{\mathrm{inn}}$ aus. Nun lasse man eine zusätzliche äußere Kraft $\mathbf{F}_i^{\mathrm{aus}}$ auf diesen Massenpunkt wirken. Falls diese nur auf den $i$ten Massenpunkt wirkt und unabhängig von $\mathbf{F}_i^{\mathrm{inn}}$ ist, d.h. falls die Gesamtkraft die Resultierende $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\mathrm{inn}} + \mathbf{F}_i^{\mathrm{aus}}$ ist (Superpositionsprinzip) so kann man $\mathbf{F}^{\mathrm{inn}}$ messen. Dazu wählt man $\mathbf{F}_i^{\mathrm{aus}}$ so, dass sich der Massenpunkt mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, messe $\mathbf{F}_i^{\mathrm{aus}}$ (z.B. mit einer Federwaage) und findet $\mathbf{F}_i^{\mathrm{inn}} = -\mathbf{F}_i^{\mathrm{aus}}$. Insoweit ist dieses Gesetz keine Definition der Kraft, sondern tatsächlich Bewegungsgesetz.

4. Newtonsches Gesetz - lex quarta Wir haben hier vom Superpositionsprinzip Gebrauch gemacht "Kräfte addieren sich wie Vektoren".

Die Kraft $\mathbf{F}_i$ ist im allgemeinen eine Funktion der Orte, manchmal auch der Geschwindigkeiten,

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_1, ...\mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1, ...\dot{\mathbf{x}}_N, t) \tag{2.3}$$

mit $i = 1...N$. Dies sind $3N$ gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung oder

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i(t) &= \mathbf{v}_i(t), & (2.4)\\ m\dot{\mathbf{v}}_i(t) &= \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_1, ...\mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, ...\mathbf{v}_N, t) & (2.5) \end{aligned}$$

$6N$ gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung.

<u>Gewöhnliche Differentialgleichungen:</u> Die Funktionen (hier $x_{i\alpha}$ und $v_{i\alpha}$ hängen nur von einer Variablen (hier die Zeit t) ab.

<u>Gegensatz: Partielle Differentialgleichungen:</u> Die Funktionen hängen von mehreren Variablen ab. Zum Beispiel hängen das elektrische und das magnetische Feld von den drei Ortskoordinaten und der Zeit ab. Die Differentialgleichungen enthalten partielle Ableitungen nach diesen unabhängigen Variablen.

Die vorliegenden Bewegungsgleichungen (gewöhnliche Differentialgleichungen) kann man als Anfangswertproblem behandeln. Die Lösung ist durch die Anfangsbedingungen $\mathbf{x}_1(t_0)$, ... $\mathbf{x}_N(t_0)$, $\mathbf{v}_1(t_0)$, ... $\mathbf{v}_N(t_0)$ eindeutig bestimmt, falls die $\mathbf{F}_i$ bezüglich t stetig und bezüglich der $\mathbf{x}$ und $\mathbf{v}$ differenzierbar sind (Scheck, S. 31; Arnold, 1973).

2.b Inertialsystem

Newton hatte die Vorstellung eines absoluten Raumes, für den er die Gesetze der Mechanik formulierte. Die bisher genannten Gesetze gelten für beliebige Bezugssysteme. Aber welches sollen wir wählen? Newton hatte (ein) bestimmte(s) im Auge:

1. Newtonsches Gesetz - lex prima "Jeder Körper beharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern." Das kann man im Hinblick auf das 2. Gesetz als trivial ansehen: Wenn keine Kraft wirkt, bleibt der Impuls konstant. Newton meinte aber, dass es ein ausgezeichnetes Bezugssystem gibt. Genauer: Entfernt man die Massen eines Systems hinreichend weit von einander, so gibt es ein Bezugssystem, in dem die Kräfte auf die Körper beliebig klein werden. Für dieses System soll das 1. Gesetz gelten. Wir bezeichnen solch eine Bezugssystem als Inertialsystem.

Kein Inertialsystem stellt ein Karussel oder ein fahrender Zug (bzw. Straßenbahn oder Bus) dar. Bei ihnen treten große (scheinbare) Beschleunigungen und daher Kräfte auf entfernte Massen auf.
Besser ist es schon mit einem erdfesten Koordinatensystem für Bewegungen nahe der Erde zu arbeiten, aber Abweichungen wegen der Erdrotation und der Rotation der Erde um die Sonne.
Noch besser ist es die Sonne als Ursprung mit Orientierung am Fixsternhimmel zu verwenden.
Weitere Verbesserungen sind nötig und möglich, da sich die Sonne um das Zentrum des Milchstraßensystems bewegt.
Ihre Grenzen findet die Beschreibung dort, wo die Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie (Urknall, schwarze Löcher) dominant werden.

Die Definition des Inertialsystems ist zunächst Postulat. Man postuliert, dass es ein solches gibt, zum andern auch Definition: Aus einer großen Klasse denkbarer Bezugssysteme sondern wir eines (bzw. eine ganze Klasse) aus.