35 Hamiltonsches Prinzip und Lagrange-Gleichungen für Felder

Wir betrachten nun ein Medium mit Feldern (z.B. Auslenkungen) $\eta_\alpha(\mathbf{x},t)$. Die Lagrange-Funktion kann nun von $\eta(\mathbf{x},t)$, $\dot\eta(\mathbf{x},t)$ und $\operatorname{grad}\eta(\mathbf{x},t)$ abhängen. Allerdings hängt die Lagrange-Funktion von diesen Größen an allen Orten ab. Man muss daher für die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ ein Volumen-Integral über eine Lagrangedichte L einführen

$$\mathcal{L}(t) = \int_V \mathrm{d}^3x L(\eta(\mathbf{x},t), \dot\eta(\mathbf{x},t), \operatorname{grad}\eta(\mathbf{x},t), \mathbf{x}, t). \tag{35.1}$$

Das Wirkungsintegral lautet dann

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t)\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x L(...). \tag{35.2}$$

Es soll nun wieder das Hamiltonsche Prinzip $\delta I = 0$ gelten, wobei die Variation $\delta\eta(\mathbf{x},t) = 0$ zur Anfangs- und Endzeit $t = t_1$ und $t = t_2$, wie auch zu allen Zeiten an den Orten $\mathbf{x}$ der räumlichen Begrenzung verschwinde. Mit

$$\delta\dot\eta = \frac{\partial}{\partial t}\delta\eta, \quad \delta\frac{\partial\eta}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\delta\eta \tag{35.3}$$

folgt für die Variation

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_V \mathrm{d}^3x \left\{ \frac{\partial L}{\partial\eta(\mathbf{x},t)}\delta\eta(\mathbf{x},t) + \frac{\partial L}{\partial\dot\eta(\mathbf{x},t)}\delta\dot\eta(\mathbf{x},t) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\gamma\eta)}\delta(\partial_\gamma\eta) \right\} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_V \mathrm{d}^3x \left\{ \frac{\partial L}{\partial\eta} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{*}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\eta}\right) - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_\gamma}}_{*}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\gamma\eta)}\right) \right\} \delta\eta(\mathbf{x},t) \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_V \mathrm{d}^3x \left\{ \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{*}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\eta}\delta\eta\right) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_\gamma}}_{*}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\gamma\eta)}\delta\eta\right) \right\}.
\end{aligned} \tag{35.4}$$

Von der ersten kamen wir auf die zweite und dritte Zeile durch partielle Integration. Die mit * gekennzeichneten partiellen Ableitungen sind so zu verstehen, dass die Funktion, die abgeleitet wird, als Funktion von $\mathbf{x}$ und t aufgefasst wird. Es wird also nicht nur nach einer expliziten Abhängigkeit der Funktion L von $\mathbf{x}$ und t abgeleitet, sondern auch nach der impliziten Abhängigkeit über $\eta(\mathbf{x},t)$ (vgl. unten 35.12 und 35.13). Der erste Beitrag des letzten Integrals führt auf

$$\int_V \mathrm{d}^3x \left(\frac{\partial L}{\partial\dot\eta}\delta\eta\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} \tag{35.5}$$

Er ist also bei t_1 und t_2 auszuwerten. Da dort $\delta\eta = 0$, verschwindet dieser Beitrag. Ähnlich führt der zweite Beitrag des letzten Integrals in (35.4) mit Hilfe des Gaussschen Satzes auf ein Oberflächen-Integral,

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_{\partial V} \mathrm{d}f_\gamma \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\gamma \eta)} \delta\eta \right). \tag{35.6}$$

Dabei ist

$$\mathrm{d}\mathbf{f} = \mathbf{n}\mathrm{d}f \tag{35.7}$$

das nach außen gerichtete Flächenelement der Oberfläche. $\mathrm{d}f$ bezeichnet den Betrag des Flächenelements, $\mathbf{n}$ den nach außen gerichteten (auf 1 nomierten) Normalenvektor. Man hat

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}f_1 A(\mathbf{x}) = \int_{\partial V} \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \big(\pm A(\mathbf{x}) \big) \tag{35.8}$$

Dabei ist das $+$-Zeichen an der oberen Begrenzung $x_1(x_2, x_3)$ und das $-$-Zeichen an der unteren Begrenzung $x_1(x_2, x_3)$ zu verwenden.

Da auch an der Oberfläche $\delta\eta$ verschwindet, fällt das letzte Integral in (35.4) weg. Was bleibt, ist die zweite Zeile in (35.4), die für beliebige Variationen $\delta\eta(\mathbf{x}, t)$ verschwinden muss. Daher folgt die Lagrange-Bewegungs-Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\eta}\right) - \frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\gamma \eta)}\right) = 0. \tag{35.9}$$

Beispiel: Für das Bravais-Gitter hatten wir die Lagrange-Dichte

$$L = \frac{\rho}{2}\dot{\boldsymbol{\eta}}^2(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2} C_{\alpha\gamma,\beta\delta}\epsilon_{\alpha\gamma}(\mathbf{x}, t)\epsilon_{\beta\delta}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{k}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t) \tag{35.10}$$

mit $\epsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial \eta_\gamma}{\partial x_\alpha}\right)$.

Daraus folgt dann

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_\alpha} = k_\alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot\eta_\alpha} = \rho\dot\eta_\alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial(\partial_\gamma \eta_\alpha)} = -C_{\alpha\gamma\beta\delta}\frac{\partial \eta_\beta}{\partial x_\delta}. \tag{35.11}$$

Wie oben angegeben, erhält man $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\eta}\right)$, indem man es als Funktion von t und $\mathbf{x}$ auffasst, also folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\eta}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\dot\eta_\alpha(\mathbf{x}, t)\right) = \rho\ddot\eta_\alpha(\mathbf{x}, t), \tag{35.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\gamma \eta_\alpha)}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left(C_{\alpha\gamma\beta\delta}\frac{\partial \eta_\beta}{\partial x_\delta}\right). \tag{35.13}$$

Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$k_\alpha(\mathbf{x}, t) - \rho\ddot\eta_\alpha(\mathbf{x}, t) + C_{\alpha\gamma\beta\delta}\frac{\partial^2 \eta_\beta}{\partial x_\gamma \partial x_\delta} = 0. \tag{35.14}$$

Man führt nun den Spannungs-Tensor σ mit den Komponenten

$$\sigma_{\alpha\gamma} = C_{\alpha\gamma\beta\delta}\frac{\partial\eta_\beta}{\partial x_\delta} = C_{\alpha\gamma\beta\delta}\epsilon_{\beta\delta} \tag{35.15}$$

ein. Wegen (34.25) ist er symmetrisch $\sigma_{\alpha\gamma} = \sigma_{\gamma\alpha}$. Mit dem Spannungs-Tensor können wir die Bewegungsgleichung in der Form

$$\rho\ddot{\eta}_\alpha(\mathbf{x}, t) = k_\alpha(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial x_\gamma}\sigma_{\alpha\gamma} \tag{35.16}$$

schreiben. Neben der äußeren Kraftdichte $\mathbf{k}$ ergibt sich aus einer Inhomogenität der Spannung eine innere Kraftdichte $\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\sigma_{\alpha\gamma}$. Man bezeichnet diese auch als Divergenz des Spannungs-Tensors.

Die Bewegungs-Gleichung beschreibt für $\ddot{\eta}_\alpha(\mathbf{x}, t) = 0$ den Verzerrungszustand des Körpers im Gleichgewicht unter dem Einfluss äußerer Kräfte. Unter Berücksichtigung der Zeitableitung beschreibt sie seine elastischen Schwingungen.

36 Schwingende Saite und Stab

36.a Bewegungsgleichungen

Für den Stab erhielten wir in (34.10) die Lagrange-Dichte

$$L = \frac{\mu}{2}\dot{\eta}^2 - \frac{Y}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2. \tag{36.1}$$

Gleichzeitig wollen wir auch eine schwingende Saite, die mit einer Kraft K gespannt ist, betrachten. Die potentielle Energie $\mathcal{V}$ ist K multipliziert mit der Saitenlänge

$$\mathcal{V} = K\int_0^l \sqrt{1+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2}\mathrm{d}x = K\int_0^l \left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + O\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^4\right)\mathrm{d}x \tag{36.2}$$

Wir haben eine Taylor-Entwicklung für die Wurzel durchgeführt und begnügen uns mit dem ersten nicht-trivialen Term. Die Konstante lassen wir weg und erhalten damit die Lagrange-Dichte

$$L = \frac{\mu}{2}\dot{\eta}^2 - \frac{K}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2. \tag{36.3}$$

Beide Lagrangedichten (36.1) und (36.3) haben die gleiche Form. Sie unterscheiden sich nur in der Konstanten Y bzw. K. Die zugehörige Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial L}{\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\eta}} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial(\partial\eta/\partial x)} = 0 \tag{36.4}$$

lautet

$$\mu\ddot{\eta} = K\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}. \tag{36.5}$$

Dies ist eine lineare partielle Diffenrentialgleichung.

36.b Unendliche Saite

Wir können die Bewegungs-Gleichung

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = 0, \quad c^2 = \begin{cases} K/\mu & \text{Saite} \\ Y/\mu & \text{Stab} \end{cases} \tag{36.6}$$

schreiben. Führen wir die neuen Koordinaten

$$u = x - ct \qquad x = \frac{1}{2}(u+v) \tag{36.7}$$

$$v = x + ct \qquad ct = \frac{1}{2}(v-u) \tag{36.8}$$

ein und drücken wir die Auslenkung durch diese Koordinaten aus,

$$\eta(x,t) = \hat{\eta}(u(x,t), v(x,t)), \tag{36.9}$$

so folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \partial_x &= \frac{\partial u}{\partial x}\partial_u + \frac{\partial v}{\partial x}\partial_v = \partial_u + \partial_v, & (36.10)\\ \partial_t &= \frac{\partial u}{\partial t}\partial_u + \frac{\partial v}{\partial t}\partial_v = c(\partial_v - \partial_u). & (36.11) \end{aligned}$$

Zur Abkürzung haben wir $\partial_x = \partial/\partial x$ geschrieben und entsprechend für t, u und v. Setzen wir dies in die Bewegungsgleichung ein, so folgt

$$c^2(\partial_v - \partial_u)^2\hat{\eta} - c^2(\partial_u + \partial_v)^2\hat{\eta} = 0 \tag{36.12}$$

oder einfach

$$\partial_u\partial_v\hat{\eta} = 0. \tag{36.13}$$

Die Integration nach u liefert $\partial_v\hat{\eta} = \tilde{g}(v)$ und die zweite Integration

$$\hat{\eta} = g(v) + f(u). \tag{36.14}$$

Wir finden also, dass die Lösung

$$\eta(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \tag{36.15}$$

lautet. Dabei sind die Funktionen f und g beliebig. Allerdings wird man fordern, dass sie zweimal differenzierbar sind. Die Funktion f beschreibt eine Welle (beliebiger Form), die sich mit der Geschwindigkeit c nach rechts, die Funktion g eine Welle, die sich mit der Geschwindigkeit c nach links bewegt.

Das Anfangswert-Problem, bei dem die Auslenkung $\eta(x,0) = \eta_0(x)$ zur Zeit 0, sowie deren zeitliche Veränderung $\dot{\eta}(x,t)|_{t=0} = \eta_1(x)$ gegeben ist, ergibt

$$f(x) + g(x) = \eta_0(x), \quad -cf'(x) + cg'(x) = \eta_1(x). \tag{36.16}$$

Wir können hieraus $\eta(x,t)$ durch folgende Zerlegung berechnen:

$$\begin{aligned} 2\eta(x,t) &= 2f(x-ct) + 2g(x+ct) \\ &= f(x-ct) + g(x-ct) + f(x+ct) + g(x+ct) \\ &\qquad + f(x-ct) - f(x+ct) + g(x+ct) - g(x-ct) \\ &= \eta_0(x-ct) + \eta_0(x+ct) \quad + \textstyle\int_{x-ct}^{x+ct}(g'(\xi) - f'(\xi))\mathrm{d}\xi \\ &= \eta_0(x-ct) + \eta_0(x+ct) \quad + \tfrac{1}{c}\textstyle\int_{x-ct}^{x+ct}\eta_1(\xi)\mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{36.17}$$

Die Auslenkung zur Zeit t hängt daher nur von den Auslenkungen und deren zeitlicher Änderung im Intervall von $x - ct$ bis $x + ct$ ab.

36.c Endliche Saite I

Die Saite der Länge l sei an ihren Enden bei $x = 0$ und $x = l$ eingespannt. Dann erhalten wir mit (36.15) aus $\eta(0,t) = 0$

$$\eta(0,t) = 0 = f(-ct) + g(ct) \quad \to \quad g(u) = -f(-u) \tag{36.18}$$

und

$$\eta(x,t) = f(x-ct) - f(-x-ct). \tag{36.19}$$

Aus $\eta(l,t) = 0$ folgt dann

$$\eta(l,t) = 0 = f(l-ct) - f(-l-ct) \quad \to \quad f(x) = f(x+2l). \tag{36.20}$$

Die Funktion f ist daher eine periodische Funktion der Periode $2l$. Wir finden dann weiter

$$\eta(x,t+\frac{2l}{c}) = f(x-ct-2l) - f(-x-ct-2l) = \eta(x,t). \tag{36.21}$$

Die Saite schwingt daher mit der Periode $T = 2l/c$.

Aufgabe Wie hängt η nach einer halben Periode mit dem ursprünglichen η zusammen?

36.d Endliche Saite II

Wir können die Bewegungsgleichung auch mit einem Separationsansatz lösen

$$\eta_s(x,t) = f(x)g(t). \tag{36.22}$$

(f und g haben nun eine andere Bedeutung als in den Abschnitten 36.b und 36.c). Setzen wir diesen Ansatz in die Bewegungsgleichung ein, so folgt

$$f(x)\ddot{g}(t) - c^2 f''(x)g(t) = 0 \tag{36.23}$$

oder nach Division durch fg

$$\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} - c^2 \frac{f''(x)}{f(x)} = 0. \tag{36.24}$$

Da der erste Term unabhängig von x ist und der zweite unabhängig von t, müssen beide unabhängig von x und t, also konstant sein,

$$\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = -\omega^2, \quad \frac{f''(x)}{f(x)} = -k^2. \tag{36.25}$$

Dies ergibt die Lösungen

$$g(t) = a\cos(\omega t - \phi), \quad f(x) = \hat{a}\cos(kx - \psi) \tag{36.26}$$

mit

$$-\omega^2 + c^2k^2 = 0 \quad \to \quad \omega = ck. \tag{36.27}$$

Aus der Randbedingung $f(0) = 0$ folgt $\psi = \pi/2$, aus $f(l) = 0$ dann $kl = \pi n$ mit positivem n. Daraus folgt dann $\omega_n = ck_n = \frac{\pi cn}{l}$. Wir können nun o.E.d.A. $\hat{a} = 1$ setzen und die Lösungen superponieren, da die Differentialgleichung linear ist und erhalten damit

$$\eta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t - \phi_n)\sin(k_n x). \tag{36.28}$$

Dies ist eine Zerlegung in Fourier-Reihen, wahlweise bezüglich x oder t.

Anfangswert-Problem Die Integrationskonstanten a_n und ϕ_n des Anfangswert-Problems

$$\eta(x,0) = \eta_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\phi_n) \sin(k_n x), \tag{36.29}$$

$$\dot{\eta}(x,0) = \eta_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n a_n \sin(\phi_n) \sin(k_n x) \tag{36.30}$$

lassen sich folgendermaßen bestimmen: Man bildet das Integral

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin(k_m x)\eta_0(x)\mathrm{d}x &= \sum_n a_n \cos\phi_n \int_0^l \underbrace{\sin(k_m x)\sin(k_n x)}_{\frac{1}{2}(\cos((k_m-k_n)x)-\cos((k_m+k_n)x))} \mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\phi_n \frac{l}{2}\delta_{m,n} = \frac{l}{2} a_m \cos\phi_m. \end{aligned} \tag{36.31}$$

Man beachte, dass n und m und damit auch k_n und k_m positiv sind. Ähnlich erhält man

$$\int_0^l \sin(k_m x)\eta_1(x)\mathrm{d}x = \frac{l}{2} a_m \omega_m \sin\phi_m, \tag{36.32}$$

Aus den beiden Beziehungen bestimmen sich $a_m \cos\phi_m$ und $a_m \sin\phi_m$, die in (36.28) in der Form

$$\eta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\phi_n \cos(\omega_n t) + a_n \sin\phi_n \sin(\omega_n t)) \sin(k_n x) \tag{36.33}$$

eingesetzt werden können.

Gemäß des Satzes von Dirichlet aus der Theorie der Fourier-Reihen gilt mit den so bestimmten $c_n = a_n \cos\phi_n$ und $s_n = a_n \omega_n \sin\phi_n$

$$\eta_0(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} c_n \sin(k_n x), \tag{36.34}$$

entsprechend für $\eta_1(x)$, falls η_0 und η_1 stetig sind, $\eta_{0,1}(0) = \eta_{0,1}(l) = 0$ und sich das Intervall $0...l$ in endlich viele Teilintervalle zerlegen lässt, in denen η_0 und η_1 monoton sind. Da sich die Funktionen η_0 und η_1 durch das System der Funktionen $\sin(k_n x)$, $n = 1, 2, ...$ darstellen lässt, heißt dieses Funktionensystem vollständig.

37 Membran

37.a Bewegungsgleichungen

Wir betrachten eine Membran der Massendichte (Masse pro Fläche) ν. Die kinetische Energie ist

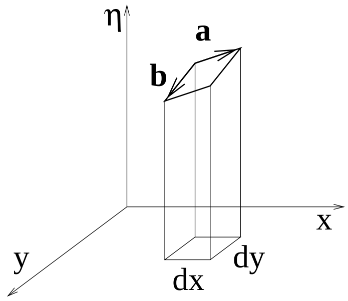
$$\mathcal{T} = \frac{\nu}{2}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\dot{\eta}^2(x,y,t). \tag{37.1}$$

Die Spannung (Kraft pro Länge) in der Membran sei τ. Die potentielle Energie ist dann τ mal Oberfläche der Membran,

$$\mathcal{V} = \tau\sum|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| \tag{37.2}$$

mit den Oberflächenelementen aufgespannt durch Parallelogramme der Seiten

$$\mathbf{a} = (1,0,\frac{\partial\eta}{\partial x})\mathrm{d}x, \quad \mathbf{b} = (0,1,\frac{\partial\eta}{\partial y})\mathrm{d}y. \tag{37.3}$$



Wir erhalten

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \left|\left(-\frac{\partial\eta}{\partial x},\frac{\partial\eta}{\partial y},1\right)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{1+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{37.4}$$

Daraus folgt die potentielle Energie

$$\mathcal{V} = \tau\int\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+O\left(\frac{\partial\eta}{\partial ...}\right)^4\right). \tag{37.5}$$

Vernachlässigen wir wieder die Terme vierter und höherer Ordnung, so folgt die Lagrange-Dichte

$$L = \frac{\nu}{2}\dot{\eta}^2 - \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 - \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 \tag{37.6}$$

und daraus die Bewegungsgleichung

$$\nu\ddot{\eta} = \tau\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right). \tag{37.7}$$

37.b Rechteckige Membran

Die rechteckige Membran erstrecke sich über $0\le x\le a$, $0\le y\le b$. Sie sei am Rand fest eingespannt. Zum Aufsuchen von Lösungen verwenden wir einen Separations-Ansatz

$$\eta_{\mathrm{s}}(x,y,t) = f(x)g(y)h(t). \tag{37.8}$$

Die Bewegungsgleichung ergibt

$$\nu f(x)g(y)\ddot{h}(t) = \tau(f''(x)g(y)h(t) + f(x)g''(y)h(t)). \tag{37.9}$$

Dividieren wir die Gleichung durch fgh, so erhalten wir

$$\nu \underbrace{\frac{\ddot{h}(t)}{h(t)}}_{-\omega^2} = \tau \underbrace{\frac{f''(x)}{f(x)}}_{-k_1^2} + \tau \underbrace{\frac{g''(y)}{g(y)}}_{-k_2^2}. \tag{37.10}$$

Da jeder Term nur von einer der drei Variablen abhängt, müssen alle Terme konstant sein, wobei die Beziehung

$$\nu\omega^2 = \tau(k_1^2 + k_2^2) \tag{37.11}$$

erfüllt sein muss. Man erhält die Lösungen

$$h = \cos(\omega t - \phi), \quad f = \sin(k_1 x), \quad g = \sin(k_2 y). \tag{37.12}$$

mit

$$k_1 a = \pi n_1, \quad k_2 b = \pi n_2, \tag{37.13}$$

wobei n_1 und n_2 natürliche Zahlen sind. Wir haben hierbei die Randbedingung $\eta = 0$, die bei $x = 0$ oder $x = a$ oder $y = 0$ oder $y = b$ gilt, berücksichtigt. (Die *oder* sind hier logische *oder*). Damit erhalten wir die speziellen Lösungen

$$\eta_{\mathrm{s}} = \cos(\omega_{n_1,n_2} t - \phi)\sin(\pi n_1 \frac{x}{a})\sin(\pi n_2 \frac{y}{b}) \tag{37.14}$$

mit den Frequenzen gegeben durch

$$\omega_{n_1 n_2}^2 = \frac{\pi^2\tau}{\nu}\left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}\right). \tag{37.15}$$

Die allgemeine Lösung lautet dann

$$\eta(x,y,t) = \sum_{n_1,n_2} c_{n_1,n_2}\cos(\omega_{n_1,n_2} t - \phi_{n_1 n_2})\sin(\pi n_1 \frac{x}{a})\sin(\pi n_2 \frac{y}{b}), \tag{37.16}$$

wobei die $c_{n_1 n_2}$ und die $\phi_{n_1 n_2}$ Integrationskonstanten sind.

37.c Kreisförmige Membran

Die Membran erstrecke sich über die Kreisfläche $x^2 + y^2 \leq R^2$ mit Radius R (Beispiel: Trommel). Wir gehen auf Polarkoordinaten über

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi, \quad \eta(x,y,t) = \hat{\eta}(r(x,y), \phi(x,y), t). \tag{37.17}$$

Wir müssen nun die partiellen Ableitungen umformen

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{37.18}$$

und entsprechend für y. Aus

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \cos\phi \mathrm{d}r - r\sin\phi \mathrm{d}\phi, && (37.19)\\
\mathrm{d}y &= \sin\phi \mathrm{d}r + r\cos\phi \mathrm{d}\phi && (37.20)
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}r &= \cos\phi \mathrm{d}x + \sin\phi \mathrm{d}y, && (37.21)\\
\mathrm{d}\phi &= -\frac{\sin\phi}{r}\mathrm{d}x + \frac{\cos\phi}{r}\mathrm{d}y. && (37.22)
\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich dann die Umrechnungen für die Ableitungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \cos\phi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}, && (37.23)\\
\frac{\partial}{\partial y} &= \sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} && (37.24)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= (\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi})(\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi})\\
&= \cos^2\phi\frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2\frac{\cos\phi\sin\phi}{r}\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial r} + \frac{\sin^2\phi}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\\
&\quad + \frac{\cos\phi\sin\phi}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\sin^2\phi}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\phi\cos\phi}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi}, && (37.25)\\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= (\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi})(\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi})\\
&= \sin^2\phi\frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2\frac{\sin\phi\cos\phi}{r}\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial r} + \frac{\cos^2\phi}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\\
&\quad - \frac{\sin\phi\cos\phi}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\cos^2\phi}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos\phi\sin\phi}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi}. && (37.26)
\end{aligned}$$

Addieren wir die beiden Terme, dann heben sich die Beiträge mit Faktoren $\cos\phi\sin\phi$ weg, während sich die Koeffizienten mit $\cos^2\phi$ und $\sin^2\phi$ zu 1 addieren. So erhalten wir das wesentlich einfachere Ergebnis

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}. \tag{37.27}$$

Wir suchen nun wieder Lösungen mittels eines Separations-Ansatzes auf und setzen

$$\hat{\eta}(r,\phi,t) = f(r)g(\phi)h(t). \tag{37.28}$$

Dies führt auf die Differentialgleichung

$$\nu f(r)g(\phi)\ddot{h}(t) = \tau\left(\partial_r^2 f(r) + \frac{1}{r}\partial_r f(r)\right)g(\phi)h(t) + \frac{\tau}{r^2}f(r)\partial_\phi^2 g(\phi)h(t). \tag{37.29}$$

Mit

$$\ddot{h}(t) = -\omega^2 h(t), \quad \partial_\phi^2 g(\phi) = -m^2 g(\phi), \tag{37.30}$$

deren Lösung

$$h(t) = \cos(\omega t - \chi), \quad g(\phi) = cos(m(\phi - \psi)) \tag{37.31}$$

lautet, erhalten wir für die Radialfunktion $f(r)$ die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} - \frac{m^2}{r^2} f + \frac{\nu\omega^2}{\tau} f = 0. \tag{37.32}$$

Man beachte, dass m ganz sein muss, damit $g(\phi)$ eine eindeutige Funktion ist. Mit der Substitution

$$r = \sqrt{\frac{\tau}{\nu}}\frac{z}{\omega} \tag{37.33}$$

lautet die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} - \frac{m^2}{z^2} f + f = 0. \tag{37.34}$$

Dies ist die Differentialgleichung der Bessel-Funktionen. Die bei $z = 0$ reguläre Lösung ist die Bessel-Funktion $J_m(z)$ mit positivem m. Da die Amplituden der Eigenschwingungen bei $r = R$ verschwinden müssen, erhalten wir die Randbedingung

$$J_m(\omega_{mn}\sqrt{\frac{\nu}{\tau}}R) = 0. \tag{37.35}$$

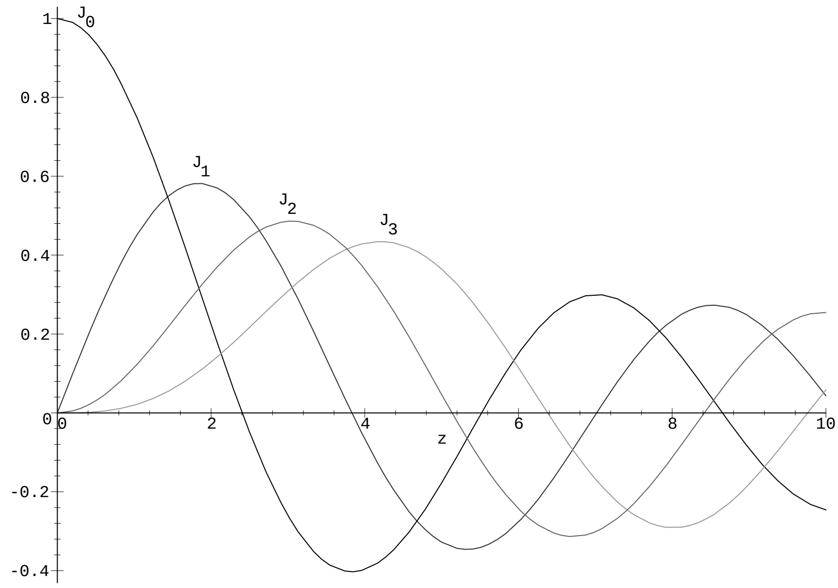
Dabei zählt n die Nullstellen. Daher gilt

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{\tau}{\nu}}\frac{z_{mn}}{R}, \quad J_m(z_{mn}) = 0. \tag{37.36}$$

Die allgemeine Lösung erhält man wieder durch Überlagerung der speziellen Lösungen

$$\hat{\eta}(r, \phi, t) = \Re \sum_{m,n} a_{n,m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{nm}t + m\phi)} J_{|m|}(\omega_{nm}\sqrt{\frac{\nu}{\tau}}r) \tag{37.37}$$

Die Funktionen $J_m(z)$ sind hier für $m = 0, 1, 2, 3$ abgebildet



Die ersten Nullstellen von $J_m(z)$ liegen bei

J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
2.4048	3.8317	5.1356	6.3801	7.5883	8.7715	9.9361
5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	...	...	...
8.6537	...	...	...	...	...	...

Die Taylor-Entwicklung für die Bessel-Funktionen J_m erhält man auf folgende Weise: Wir betrachten zunächst das Verhalten für $z \to 0$. Nehmen wir $f(z) \propto z^\alpha$ an, so erhält man durch Einsetzen in (37.34)

$$(\alpha(\alpha-1)+\alpha-m^2)z^{\alpha-2}+O(z^\alpha)=0. \tag{37.38}$$

Daraus folgt $\alpha = \pm m$. Die bei $z=0$ reguläre Lösung erhält man für positives α. Wir wollen nun $m \geq 0$ annehmen, setzen also $\alpha = m$.[12]

Wir setzen nun die Taylor-Entwicklung

$$J(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{m+2k} \tag{37.39}$$

[12]Es gibt eine zweite Lösung, die bei $z=0$ wie z^{-m} divergiert. Sie wird als Neumann-Funktion $N_m(z)$ bezeichnet. Für $m=0$ divergiert sie wie $\ln z$.

mit unbekannten Koeffizienten c_k an. Einsetzen in die Differentialgleichung (37.34) ergibt

$$\sum_k \underbrace{\left((m+2k)^2 - m^2\right)}_{2k(2m+2k)} c_k z^{m+2k-2} + \sum_k c_k z^{m+2k} = 0. \tag{37.40}$$

Ersetzt man in der zweiten Summe k durch $k-1$, so erhalten wir

$$\sum_k \left(2k(2m+2k)c_k + c_{k-1}\right) z^{m+2k-2} = 0. \tag{37.41}$$

Der Koeffizient bei den z^{m+2k-2} muss verschwinden. Daraus folgt die Rekursionsformel

$$c_k = -\frac{c_{k-1}}{4k(m+k)}, \tag{37.42}$$

was man mit

$$c_k = (-\frac{1}{4})^k \frac{1}{k!(m+k)!} \cdot \text{const} \tag{37.43}$$

lösen kann. Mit const $= (1/2)^m$ folgt die Reihenentwicklung für die Bessel-Funktion

$$J_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k (\frac{z}{2})^{m+2k}}{k!(m+k)!}, \tag{37.44}$$

eine Entwicklung, die für alle z konvergiert.

Wir bemerkewn ohne Beweis, dass die Bessel-Funktion für großes z das asymptotische Verhalten

$$J_m(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}), \quad z \to \infty \tag{37.45}$$

zeigt.