mit unbekannten Koeffizienten c_k an. Einsetzen in die Differentialgleichung (37.34) ergibt

$$\sum_k \underbrace{((m+2k)^2 - m^2)}_{2k(2m+2k)} c_k z^{m+2k-2} + \sum_k c_k z^{m+2k} = 0. \tag{37.40}$$

Ersetzt man in der zweiten Summe k durch $k-1$, so erhalten wir

$$\sum_k (2k(2m+2k)c_k + c_{k-1})\, z^{m+2k-2} = 0. \tag{37.41}$$

Der Koeffizient bei den z^{m+2k-2} muss verschwinden. Daraus folgt die Rekursionsformel

$$c_k = -\frac{c_{k-1}}{4k(m+k)}, \tag{37.42}$$

was man mit

$$c_k = (-\frac{1}{4})^k \frac{1}{k!(m+k)!} \cdot \mathrm{const} \tag{37.43}$$

lösen kann. Mit const $= (1/2)^m$ folgt die Reihenentwicklung für die Bessel-Funktion

$$J_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k (\frac{z}{2})^{m+2k}}{k!(m+k)!}, \tag{37.44}$$

eine Entwicklung, die für alle z konvergiert.

Wir bemerken ohne Beweis, dass die Bessel-Funktion für großes z das asymptotische Verhalten

$$J_m(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}), \quad z \to \infty \tag{37.45}$$

zeigt.

H Chaos und nichtlineare Dynamik

Einleitung

In einer Anzahl von Fällen konnten wir mechanische Probleme lösen. Die Bewegung eines Massenpunkts in einer Dimension lässt sich mit Hilfe der Energie-Erhaltung berechnen (Abschnitt 3.c). Das Zweikörperproblem mit Zentralpotential konnte exakt gelöst werden (Abschnitte 17, 18). Aber das Dreikörperproblem entzieht sich bereits einer allgemeinen Lösung. Wir konnten nur bestimmte Grenzfälle behandeln (Abschnitt 27). Wir werden sehen, dass die Integration eines mechanischen Problems prinzipiell möglich ist, wenn man soviel unabhängige Erhaltungsgrößen hat, deren Poisson-Klammern verschwinden, wie Paare kanonischer Variable. Dies ist aber bei einer größeren Anzahl von Freiheitsgraden in der Regel nicht der Fall.

Die Bewegung nahe des Energie-Minimums konnten wir im Rahmen kleiner Schwingungen näherungsweise beschreiben (Abschnitt 31). Im Rahmen dieser Näherung hat man wieder eine ausreichende Anzahl unabhängiger Erhaltungs-Größen, da die Energie jeder Normalschwingung erhalten ist. Wenn diese Linearisierungs-Näherungen nicht mehr möglich sind, kommt man in das Gebiet der nichtlinearen Dynamik.

Die Bewegungsgleichungen der Mechanik sind deterministisch und damit sind die Trajektorien im Phasenraum festgelegt. Jedoch hängen die Trajektorien häufig sehr empfindlich von den Anfangsbedingungen ab. Das bedeutet auch, dass bei einer numerischen Lösung kleine Rundungsfehler zu großen Abweichungen nach längerer Zeit führen können.

Wie kommt diese Empfindlichkeit von den Anfangsbedingungen zustande? Sie hängt mit der Erhaltung des Phasenraumvolumens (Liouville-Satz) zusammen. Dieses Volumen bleibt im Laufe der Zeit erhalten, aber es deformiert sich. Diese Deformation kann linear anwachsen wie etwa bei der freien Bewegung eines Teilchens. Sie kann aber auch exponentiell anwachsen wie bei der Rotation des kräftefreien unsymmetrischen Kreisels um die Achse mittleren Hauptträgheitsmomentes[13] (Abschnitt 25.c). Eine kleine $6N$-dimensionale Hyperkugel des Phasenraumvolumens deformiert sich im Laufe der Zeit zu einem Hyper-Ellipsoid mit Hauptachsen a_i, die ein Exponentialverhalten $\exp(\lambda_i t)$ zeigen,

$$\lambda_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln a_i(t).$$

Das Volumen bleibt erhalten. Es ist proportional zu $\prod_i \exp \lambda_i t$, so dass

$$\sum_i \lambda_i = 0.$$

[13] Allerdings ist dieses System integrabel, da genügend Erhaltungs-Größen vorhanden sind.

Das bedeutet aber, dass das größte λ positiv ist. In dieser Richtung dehnt sich also das Phasenraumvolumen exponentiell aus und eine Vorhersage der Bewegung ist nur über kurze Zeit möglich. Tritt dieses exponentielle Wachstum auf, so spricht man von chaotischem Verhalten. Dieses größte $\lambda_{\max}$ bezeichnet man als Lyapunov-Exponent. Es ist auch üblich das größte λ als ersten Lyapunov-Exponenten zu bezeichnen, den nächst größten als zweiten etc.

Man muss bei der Betrachtung derartiger dynamischer Systeme unterscheiden zwischen hamiltonschen Systemen und dissipativen Systemen. Das soeben Gesagte trifft für hamiltonsche Systeme, also Systeme, die durch eine Hamilton-Funktion beschrieben werden können zu. Bei einem dissipativen System, das durch Reibungskräfte charakterisiert ist, nimmt das Phasenraumvolumen ab, in der Regel exponentiell. Dann ist $\sum_i \lambda_i < 0$ und der Lyapunov-Exponent $\lambda_{\max}$ kann positiv oder negativ sein. Je nachdem verhält sich das System chaotisch oder nicht chaotisch. Mikroskopisch gilt für dieses System auch $\sum_i \lambda_i = 0$. Aber hier nehmen innere Freiheitsgrade (z.B. durch die Wärmebewegung der Atome in einem starren Körper) die exponentiell anwachsenden Auslenkungen auf, so dass die makroskopisch beobachteten nicht davon betroffen sind.

Im Folgenden werden wir einige Eigenschaften von Systemen mit chaotischem und nicht chaotischem Verhalten betrachten wie auch den Übergang ins Chaos. Denn auch das Chaos zeigt Regelmäßigkeiten.

38 Winkel- und Wirkungsvariable, Störungsrechnung, Resonanznähe

38.a Winkel- und Wirkungsvariable

Im idealen Fall kann man die Hamilton-Funktion mit einer kanonischen Transformation auf die Form $\mathcal{H}(P_1, P_2, ...P_n)$ bringen, das heißt $\mathcal{H}$ hängt nicht von Q_1, Q_2, ... Q_n ab. In diesem Fall nennt man die P_i Wirkungsvariable und die Q_i Winkelvariable, wobei die Notationen

$$P_i = J_i, \quad Q_i = \phi_i. \tag{38.1}$$

üblich sind. Dann gilt

$$\dot{J}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_i} = 0, \tag{38.2}$$

Die J_i sind Erhaltungsgrößen. Weiter gilt

$$\dot{\phi}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_i} = \omega_i(J_1, ...J_n), \tag{38.3}$$

d.h. die ϕ_i wachsen linear mit der Zeit an

$$\phi_i = \omega_i(J_1, ...J_n)t + \phi_i^0. \tag{38.4}$$

Die J_i und ϕ_i^0 sind durch die Anfangsbedingungen gegeben. Die p und q hängen in der Regel periodisch von den ϕ_i ab. Die Flächen konstanter J_i bezeichnet man dann als invariante Tori.

38.b Beispiel: Harmonischer Oszillator

Wir drücken die Hamilton-Funktion

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{f}{2}q^2 \tag{38.5}$$

des harmonischen Oszillators durch Wirkungs- und Winkelvariable aus. Da p und q periodisch oszillieren, setzen wir

$$p = g(J)\cos\phi, \quad q = h(J)\sin\phi. \tag{38.6}$$

Dann ist

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{g^2(J)}{m}\cos^2\phi + fh^2(J)\sin^2\phi\right). \tag{38.7}$$

Da $\mathcal{H}$ nur von J abhängen soll, fordern wir

$$\frac{g^2(J)}{m} = fh^2(J). \tag{38.8}$$

Weiter sollen J und ϕ kanonische Variable sein. Dann muss

$$\{q,p\}_{\phi,J} = \frac{\partial q}{\partial \phi}\frac{\partial p}{\partial J} - \frac{\partial q}{\partial J}\frac{\partial p}{\partial \phi} = hg'\cos^2\phi + h'g\sin^2\phi = 1 \tag{38.9}$$

gelten, d.h. $hg' = h'g = 1$. Diese Bedingung und (38.8) lassen sich mit

$$g(J) = \sqrt[4]{fm}\sqrt{2J}, \quad h(J) = \frac{\sqrt{2J}}{\sqrt[4]{fm}} \tag{38.10}$$

erfüllen. Damit folgt

$$\mathcal{H} = \sqrt{\frac{f}{m}}J, \quad \dot{J} = 0, \quad \dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} = \sqrt{\frac{f}{m}} = \omega. \tag{38.11}$$

38.c Integrable Systeme

Es seien n Erhaltungsgrößen $P_i(p,q)$ bekannt, die in Involution sind, das heißt, deren Poisson-Klammern verschwinden,

$$\{P_i, P_j\} = 0, \tag{38.12}$$

und die unabhängig voneinander sind. Eine der Erhaltungsgrößen ist $\mathcal{H}$. Dann setzen wir die kanonische Transformation mit $F_2(P,q)$ an, die

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \tag{38.13}$$

impliziert. Wir drücken nun P_i durch q und p aus und erhalten

$$J_i = P_i(\frac{\partial F_2}{\partial q}, q). \tag{38.14}$$

Diese Gleichungen sind nach den $\frac{\partial F_2}{\partial q}$ aufzulösen,

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = f_i(J, q) \tag{38.15}$$

und nach den q aufzuintegrieren. Man kann zeigen, dass diese Gleichungen die Integrabilitätsbedingungen ähnlich wie in Abschnitt 29 erfüllen. Daher heißen Systeme mit n unabhängigen Erhaltungsgrößen in Involution integrabel. Ein solches System ist zum Beispiel ein Massenpunkt im dreidimensionalen Zentralpotential. Dort hat man die drei Erhaltungsgrössen $\mathcal{H}$, L^2 und L_z, die in Involution sind.

38.d Störungstheorie

Vielfach kann man die Hamilton-Funktion eines Systems beschreiben durch die Summe zweier Beiträge $\mathcal{H}_0$ und $\epsilon\mathcal{H}'$, wobei $\mathcal{H}_0$ integrabel ist. Wir schreiben daher

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(J_1, ...J_n) + \epsilon\mathcal{H}'(J_1, ...J_n, \phi_1, ...\phi_n). \tag{38.16}$$

wobei wir annehmen, dass ϵ ein kleiner Entwicklungsparameter ist. Wir wollen nun diese Hamilton-Funktion mittels einer kanonischen Transformation durch n Erhaltungsgrößen j darstellen. Wir setzen

$$F_2(J, \phi) = \sum_i J_i\phi_i + \epsilon f(J, \phi). \tag{38.17}$$

Dann erhält man

$$\Phi_i = \frac{\partial F_2}{\partial J_i} = \phi_i + \epsilon\frac{\partial f}{\partial J_i} = \phi_i + O(\epsilon), \tag{38.18}$$

$$j_i = \frac{\partial F_2}{\partial \phi_i} = J_i + \epsilon\frac{\partial f(J,\phi)}{\partial \phi_i} = J_i + \epsilon\frac{\partial f(j,\phi)}{\partial \phi_i} + O(\epsilon^2). \tag{38.19}$$

Damit folgt

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0\left(j - \epsilon\frac{\partial f}{\partial \phi}\right) + \epsilon\mathcal{H}'(j, \phi) = \mathcal{H}_0(j) + \epsilon\mathcal{H}_1(j). \tag{38.20}$$

In Ordnung ϵ reduziert sich das auf

$$-\sum_i \frac{\partial f}{\partial \phi_i}\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial j_i} + \mathcal{H}'(j, \phi) = \mathcal{H}_1(j). \tag{38.21}$$

$\mathcal{H}'$ und f seien periodisch in den Winkeln ϕ,

$$\mathcal{H}'(j, \phi) = \sum_{\{m\}} h'_{m_1...m_n}(j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m_1\phi_1 + ...m_n\phi_n)} \tag{38.22}$$

$$f(j, \phi) = \sum_{\{m\}} f_{m_1...m_n}(j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m_1\phi_1 + ...m_n\phi_n)}. \tag{38.23}$$

Mit $\omega_i = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J_i}$ folgt

$$\sum_{\{m\}} \left(-\mathrm{i}(\sum_i m_i \omega_i(j)) f_{m_1 \dots m_n}(j) + h'_{m_1 \dots m_n}(j) \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m_1\phi_1 + \dots m_n\phi_n)} = \mathcal{H}_1(j) \tag{38.24}$$

Daraus folgt

$$f_{m_1 \dots m_n}(j) = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{h'_{m_1 \dots m_n}(j)}{\sum_i m_i \omega_i(j)} \tag{38.25}$$

außer für $m_1 = \dots m_n = 0$. Dann folgt

$$\mathcal{H}_1(j) = h'_{0 \dots 0}(j) = \langle \mathcal{H}'(j, \phi) \rangle_\phi . \tag{38.26}$$

Dabei ist $\langle \mathcal{H}'(j, \phi) \rangle_\phi$ das über alle Winkel ϕ gemittelte $\mathcal{H}'(j, \phi)$. Ähnlich kann man dann auch in höheren Ordnungen in ϵ verfahren.Ein Problem tritt auf für kleine oder verschwindende Frequenznenner $\sum_i m_i \omega_i(j)$.

KAM-Theorem (Kolmogoroff-Arnold-Moser) Für ein nicht entartetes System und hinreichend kleine und hinreichend oft differenzierbare Störungen sind die meisten invarianten Tori nur deformiert.

Dies gilt unter folgenden Bedingungen: Die potentielle Energie sei μ-mal differenzierbar, das Ergebnis sei stetig. Bei n Freiheitsgraden sei $\mu > 2n - 2$.

38.e Resonanzschichten

Wir betrachten nun einen Störterm, für den $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 = m_1 \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J_1} + m_2 \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J_2}$ klein wird und betrachten, was in seiner Umgebung passiert. Dazu greifen wir uns aus dem $\mathcal{H}'$ den Beitrag heraus, der zu dem kleinen Energienenner führt,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(J_1, J_2) + \epsilon h'_{m_1,m_2}(J_1, J_2) \cos(m_1\phi_1 + m_2\phi_2). \tag{38.27}$$

Wir gehen nun auf neue Variable J, J', Φ und Φ' über, indem wir neue Linearkombinationen der J und ϕ bilden. Hierzu wählen wir

$$F_2 = (m_1\phi_1 + m_2\phi_2)J + (c_1\phi_1 + c_2\phi_2)J', \qquad \begin{vmatrix} m_1 & c_1 \\ m_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{38.28}$$

Wir erhalten dann

$$\Phi = \frac{\partial F_2}{\partial J} = m_1\phi_1 + m_2\phi_2, \quad J_1 = \frac{\partial F_2}{\partial \phi_1} = m_1 J + c_1 J', \quad J_2 = \frac{\partial F_2}{\partial \phi_2} = m_2 J + c_2 J', \tag{38.29}$$

und damit

$$\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}}_0(J, J') + \epsilon \tilde{h}'(J, J') \cos \Phi. \tag{38.30}$$

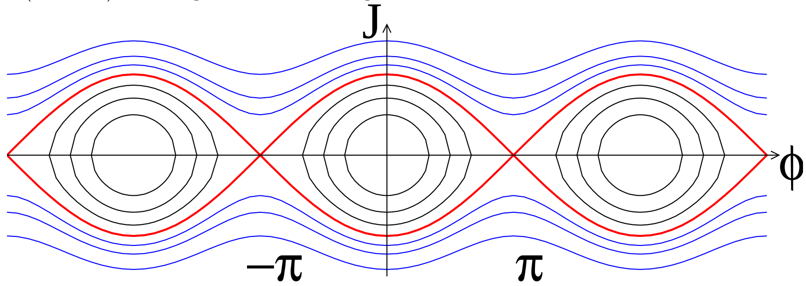
Wir sehen, dass J' Erhaltungsgrösse ist, da $\mathcal{H}$ nicht von Φ' abhängt. Wir lassen nun die Abhängigkeit von J' weg und finden

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}_0}{\partial J} = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J_1} \frac{\partial J_1}{\partial J} + \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial J} = m_1\omega_1 + m_2\omega_2. \tag{38.31}$$

Wenn diese Linearkombination bei einem Wert von J verschwindet, den wir o.E.d.A. gleich 0 setzen können, dann erhält man generisch

$$\mathcal{H} = E_0 + \frac{J^2}{2\Theta} + \epsilon h' \cos\Phi. \tag{38.32}$$

Dies ist aber die Hamilton-Funktion eines Pendels mit Trägheitsmoment Θ. In der Figur sind die Linien konstanter Energie eingezeichnet. Das System bewegt sich entlang dieser Linien. Für $E_0 - |\epsilon h'| < E < E_0 + |\epsilon h'|$ bewegt sich das System auf geschlossenen Bahnen, für $E > E_0 + |\epsilon h'|$ dagegen auf einer offenen Bahn. Chaos entsteht dadurch, dass Störungen in der Nähe der Punkte $J = 0$, $\Phi = (2k+1)\pi$ mit ganzem k erfolgen[14]



Die Störung bringt das System auf eine qualitativ andere Bahn. Dieses Verhalten ist der Regelfall, das nichtchaotische Verhalten die Ausnahme. Im Limes $\epsilon \to 0$ geht die rote (etwas dickere) Grenzschicht in die Gerade $J = 0$ über. Man bezeichnet sie dann als Resonanzschicht. Tatsächlich wechseln sich KAM-Tori und Resonanzschichten ungeheuer dicht ab. Bei jedem rationalen Verhältnis von ω_1/ω_2 hat man eine Resonanzschicht. Obgleich die Rationalzahlen dicht liegen, stellen sie nur eine Menge 0 im Kontinuum dar. Zum Beweis nehmen wir aus dem Intervall 0...1 um jede rationale Zahl $p/q < 1$, d.h. $1 \le p < q$, p und q natürlich, ein Intervall der Länge $\frac{\epsilon}{(q-1)^2 q}$ aus dem Intervall 0...1 heraus. Dann haben wir Intervalle der Gesamtlänge (höchstens)

$$\begin{aligned} \sum_{q=2}^{\infty}\sum_{p=1}^{q-1} \frac{\epsilon}{(q-1)^2 q} &= \sum_{q=2}^{\infty} \frac{\epsilon}{(q-1)q} = \sum_{q=2}^{\infty} \left(\frac{\epsilon}{q-1} - \frac{\epsilon}{q}\right) \\ &= \epsilon(1-\frac{1}{2}) + \epsilon(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \epsilon(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + ... = \epsilon \end{aligned} \tag{38.33}$$

herausgenommen, wobei ϵ beliebig klein gewählt werden kann. Es bleiben also immer noch Zwischenräume der Gesamtlänge $1 - \epsilon$.

Störungen wirken sich stark aus, wenn das Verhältnis zweier Frequenzen kleine ganze Zahlen sind. Die in Abschnitt 27 beschriebenen Trojaner und Satelliten auf Hufeisenbahnen sind Systeme mit Frequenz-Verhältnis 1:1. Man findet Resonanzen auch bei den drei großen Jupitermonden Io, Europa und Ganymed, deren Umlaufszeiten die Verhältnisse 1:2:4 aufweisen, wie auch bei den Saturnmonden Mimas und Thetys (1:2), Enceladus und Dione (1:2) und

[14] Dies gilt falls $\epsilon h'\Theta < 0$. Ist dagegen $\epsilon h'\Theta > 0$, dann treten sie bei $\Phi = 2k\pi$ auf.

Titan und Hyperion (3:4). Auch die Lücken in den Saturnringen entsprechen Umlaufzeiten, die zu denen einiger Monde in ganzzahligem Verhältnis stehen. Asteroiden sind bei Umlauffrequenzen, die ein ganzzahliges oder halbzahliges Vielfaches der Umlauffrequenz von Jupiter sind, mit Ausnahme der Trojaner sehr ausgedünnt (vgl. Skriptum Horner S. 51). Beim Bau von Beschleunigern und Speicherringen vermeidet man solche Resonanzen, die zu chaotischen Bewegungen führen. Aber auch im Maschinenbau werden solche Resonanzen vermieden.

39 Getriebenes gedämpftes Pendel

39.a Das Pendel

Franz-Josef Elmer von der Universität Basel stellt unter //http://monet.physik.unibas.ch/∼elmer/pendulum ein *Pendulum Lab* zur Verfügung, mit dem man ein getriebenes gedämpftes Pendel beobachten kann.

Literatur dazu findet sich auch in G.L.Baker and J.P. Gollub, Chaotic Dynamics, Cambridge University Press.

Die Bewegung des Pendels, das sich auch überschlagen kann, wird beschrieben durch die Gleichung

$$ml^2 \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \gamma \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + m\hat{g}l \sin\theta = m\hat{g}A\cos(2\pi f t). \tag{39.1}$$

Der zweite Term auf der linken Seite rührt von der Reibung her, der dritte von der Schwerkraft (die Schwerebeschleunigung wird hier mit $\hat{g}$ bezeichnet). Auf der rechten Seite steht das periodische Moment der Antriebskraft. Ohne Dämpfung hat das Pendel für kleine Auslenkungen die Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\hat{g}/l}$. Führen wir die dimensionslose Zeit $\tau = \omega_0 t$ ein, so lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{1}{q}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} + \sin\theta = g\cos(\underbrace{\omega_{\mathrm{D}}\tau}_{\phi}) \tag{39.2}$$

mit

$$q = \frac{\sqrt{\hat{g}}l^{3/2}m}{\gamma}, \quad g = \frac{A}{l}, \quad \omega_{\mathrm{D}} = \frac{2\pi f}{\omega_0}. \tag{39.3}$$

Für kleine Anregungen g können wir die Bewegung als erzwungene Schwingung beschreiben und $\sin\theta \approx \theta$ approximieren. Für stärkere Anregungen kann man die Bewegungsgleichung numerisch integrieren etwa unter Verwendung des Runge-Kutta-Verfahrens.

Wir beobachten das Verhalten für $q = 2$, $\omega_{\mathrm{D}} = 2/3$ (bei Elmer *length=1, damping=1.566, frequency=0.3323*) und variieren *amplitude* g. Nach meiner Beobachtung findet man für das Pendel, das durch die periodische Kraft getrieben wird
bis $g = 1$ eine symmetrische Schwingung,
zwischen $g = 1.01$ und $g = 1.06$ eine asymmetrische Schwingung,
bei $g = 1.07$ tritt Periodenverdopplung auf,
bei $g = 1.08$ bis $g = 1.09$ verschiedene Schwingungsformen,
bei $g = 1.10$ bis $g = 1.11$ Chaos,
bei $g = 1.12$ bis $g = 1.14$ einen Zyklus der Periode 3,
ab $g = 1.15$ bis mindestens $g = 1.21$ Chaos,
von $g = 1.29$ bis $g = 1.34$ Periode 1,
bei $g = 1.44$ bis $g = 1.45$ wieder Periodenverdopplung,
bei $g = 1.46$ bis $g = 1.47$ einen Zyklus der Periode 4,
ab $g = 1.48$ bis ? Chaos.

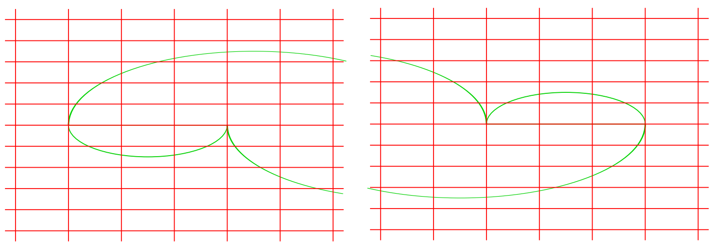
Zweckmäßigerweise stellt man für x *angle* Bereich 180 und für y *angular velocity* Bereich 500 ein. Man kann dann den Verlauf auf dem Oszilloskop verfolgen, wenn man *triggering* auf *non* oder *internal* einstellt.

Stellt man *triggering* auf *external* ein, dann erhält man jeweils einen Punkt auf dem Oszilloskop, wenn die Phase $\phi = 2\pi f t$ des periodischen Moments gleich 0 oder einem Vielfachen von 2π ist. Man spricht von einem Poincaré-Schnitt. Man beobachtet also jeweils die Bewegungsgrößen in einem bestimmten Zustand des Systems, der hier durch $\phi = 0$ gegeben wird. Eine andere Möglichkeit bestünde darin, beim Durchgang des Winkels θ oder der Winkel-Frequenz ω durch einen bestimmten Wert zu messen.

Hat die Bewegung die gleiche Periode wie der Antrieb, so erscheint nach Beendigung des Einschwingens auf dem Poincaré-Schnitt ein Punkt. Ist die Periode der Bewegung doppelt so lang (Perioden-Verdopplung), so erscheinen zwei Punkte. Man beobachtet auch Perioden der Bewegung, die drei oder viermal die Periode des Antriebs sind. Im Falle des Chaos erscheinen sehr viele Punkte. Insbesondere fällt auf, dass Periodenverdopplung auftreten kann. Dabei teilen sich die Durchstoss-Punkte des Poincaré-Schnitts in zwei Punkte auf, weshalb man von Bifurkation spricht. Diese Periodenverdopplung wurde auch in anderen physikalischen Systemen beobachtet, so zum Beispiel in Rayleigh-Bernard-Zellen (z.B. M. Giglio, S. Musazzi, U. Perini *Transition to Chaotic Behavior via a Reproducible Sequence of Period-Doubling Bifurcations*, Phys. Rev. Lett. 47 (1981) 243).

Nach meiner Beobachtung erhält man für unser Pendel je nach Anfangs-Bedingung im Bereich zwischen $g = 1.08$ und $g = 1.09$ drei unterschiedliche Arten der Bewegung: Es tritt entweder eine Periode 3 auf, wobei im Poincaré-Schnitt θ im Bereich 40^0 bis 80^0 liegt, oder eine (chaotische oder periodische?) Bewegung mit θ im Bereich -160^0 bis -100^0 oder eine solche Bewegung mit θ im Bereich -50^0 bis 0^0.

Das Diagramm Winkelgeschwindigkeit gegen Winkel auf dem Oszilloskop ist für die Bewegung mit der Periode 3 skizziert:



Die anderen Bewegungsformen sehen wie Ellipsen aus, die sich allerdings jedesmal etwas verschieben.

39.b Lyapunov-Exponenten

Wir wollen hier ansehen, wie sich kleine Abweichungen der Anfangsbedingungen auswirken. Wir können die Bewegungs-Gleichungen in der Form

$$\dot{\theta} = \omega, \tag{39.4}$$

$$\dot{\omega} = -\frac{1}{q}\omega - \sin\theta + g\cos\phi \tag{39.5}$$

schreiben, wobei der Punkt für die Ableitung nach τ steht. Mit

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \delta\theta(t), \tag{39.6}$$
$$\omega(t) = \omega_0(t) + \delta\omega(t) \tag{39.7}$$

Wir erhalten daraus in linearer Ordnung in den Abweichungen $\delta\theta$ und $\delta\omega$

$$\dot{\theta}_0 + \delta\dot{\theta} = \omega_0 + \delta\omega, \tag{39.8}$$
$$\dot{\omega}_0 + \delta\dot{\omega} = -\frac{1}{q}(\omega_0 + \delta\omega) \underbrace{-\sin(\theta_0 + \delta\theta)}_{-\sin\theta_0 - \cos\theta_0\delta\theta} + g\cos\phi \tag{39.9}$$

und damit

$$\delta\dot{\theta} = \delta\omega, \tag{39.10}$$
$$\delta\dot{\omega} = -\frac{1}{q}\delta\omega - \cos\theta_0\delta\theta. \tag{39.11}$$

Das Gleichungs-System ist linear in $\delta\theta$ und $\delta\omega$. Es hat zwei linear unabhängige Lösungen. Für deren Wronski-Determinate $\begin{vmatrix} \delta\theta_1 & \delta\theta_2 \\ \delta\omega_1 & \delta\omega_2 \end{vmatrix}$ erhält man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} \delta\theta_1 & \delta\theta_2 \\ \delta\omega_1 & \delta\omega_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta\dot{\theta}_1 & \delta\dot{\theta}_2 \\ \delta\omega_1 & \delta\omega_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta\theta_1 & \delta\theta_2 \\ \delta\dot{\omega}_1 & \delta\dot{\omega}_2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{q}\begin{vmatrix} \delta\theta_1 & \delta\theta_2 \\ \delta\omega_1 & \delta\omega_2 \end{vmatrix}. \tag{39.12}$$

Das Phasenraumvolumen verkleinert sich wegen der Dissipation (Reibung)

$$\begin{vmatrix} \delta\theta_1 & \delta\theta_2 \\ \delta\omega_1 & \delta\omega_2 \end{vmatrix} \sim \mathrm{e}^{-\tau/q}. \tag{39.13}$$

Daher ist die Summe der beiden Lypunov-Exponenten

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{1}{q}. \tag{39.14}$$

Wenn beide Exponenten negativ sind, geht das System in ein stabiles periodisches Verhalten über. Falls aber der größere positiv ist, bewegt sich das System chaotisch.

40 Logistische Abbildung

40.a Die Abbildung, Fixpunkte

40.a.α Die Abbildung

Die logistische Abbildung ist eine Karikatur eines Poincaré-Schnitts mit nur einem Freiheitsgrad x. Das heißt, man bildet einen Durchstoßpunkt x_k auf einen neuen Durchstoßpunkt x_{k+1} ab. Die logistische Abbildung ist durch

$$x_{k+1} = f(\mu, x_k) = \mu x_k (1 - x_k) \tag{40.1}$$

definiert. Dabei ist μ ein Kontrollparameter, in dessen Abhängigkeit die Abbildung untersucht wird. Diese Abbildung betrachtet man üblicherweise im Intervall $0 \leq x \leq 1$. Um zu gewährleisten, dass das Bild wieder in diesem Intervall liegt, beschränkt man μ auf den Bereich $0 \leq \mu \leq 4$.

40.a.β Fixpunkte

Wir betrachten nun die Fixpunkte dieser Abbildung und ihre Stabilität. Die Fixpunkte x^*, das heißt, die Werte x^*, die sich auf sich selbst abbilden, erfüllen die Gleichung

$$x^* = \mu x^* (1 - x^*). \tag{40.2}$$

Die Gleichung hat zwei Lösungen, eine triviale

$$x^*_{\mathrm{tr}} = 0 \tag{40.3}$$

und eine nicht-triviale

$$x^*_{\mathrm{nt}} = 1 - \frac{1}{\mu}, \tag{40.4}$$

wobei die zweite Lösung nur für $\mu \geq 1$ im Intervall liegt.

Als nächstes betrachten wir die Stabililität der Fixpunkte, das heißt wir addieren zu x^* noch ein infinitesimales δx und beobachten, wie es sich unter der Abbildung verändert

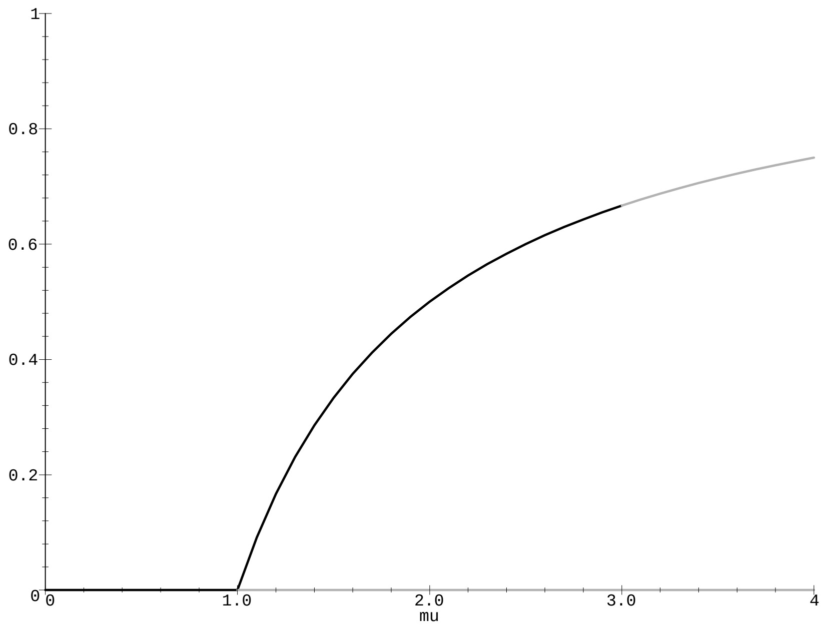
$$x^* + \delta x_{k+1} = f(\mu, x^* + \delta x_k) = x^* + \gamma \delta x_k \tag{40.5}$$

mit

$$\gamma = \frac{\partial f(\mu, x^*)}{\partial x^*} = \mu(1 - 2x^*). \tag{40.6}$$

Für die beiden Fixpunkte erhält man damit

$$\gamma_{\mathrm{tr}} = \mu, \quad \gamma_{\mathrm{nt}} = 2 - \mu. \tag{40.7}$$



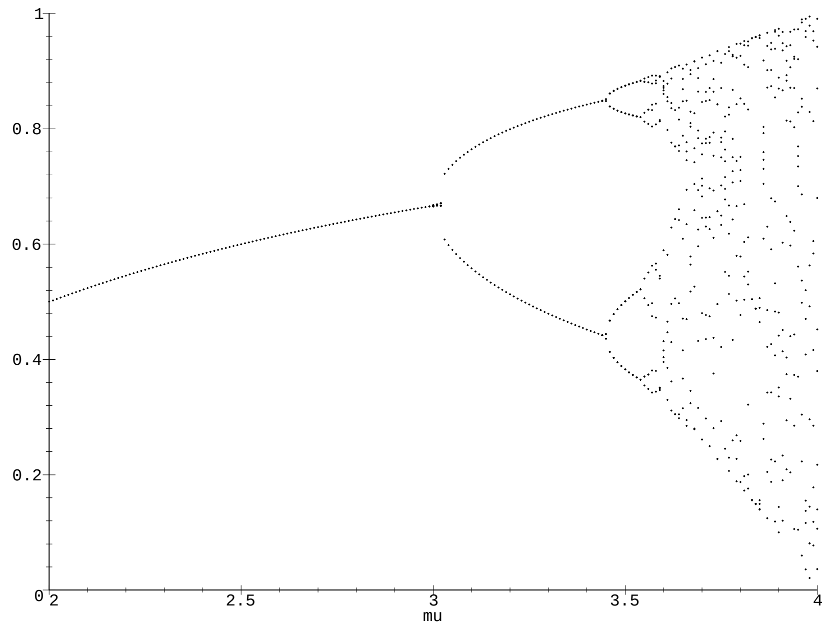
Falls $|\gamma| < 1$ gilt, wird δx unter den Iterationen kleiner, der Fixpunkt ist attraktiv (stabil). Falls jedoch $|\gamma| > 1$ ist, wächst δx unter den Iterationen an, der Fixpunkt ist repulsiv (instabil). Für $\gamma = \pm 1$ bezeichnet man den Fixpunkt als marginal. Dann bedarf es weiterer Untersuchungen über die Stabilität. Man findet also, dass der Fixpunkt $x^*_{\rm tr} = 0$ im Intervall $0 \le \mu < 1$ und der Fixpunkt $x^*_{\rm nt} = 1 - \frac{1}{\mu}$ im Intervall $1 < \mu < 3$ stabil ist. Der stabile Fixpunkt geht also bei $\mu = 1$ von einem Ast auf den anderen über. Bei $\mu = 3$ passiert wieder etwas, denn keiner der beiden Fixpunkte ist im Intervall $3 < \mu < 4$ stabil. Was passiert dort?

40.b Bifurkation

Am einfachsten stellt man das fest, indem man ein kleines Programm schreibt, das zunächst etwa ausgehend von $x_0 = \frac{1}{2}$ die Abbildung für verschiedene Werte μ zum Beispiel hundert mal durchführt (das heißt x_{100} berechnet), und dann die nächsten Werte x_k in einer Zeichnung ausdruckt.

Für $\mu < 3$ konvergiert das rasch gegen den Fixpunkt (mit Ausnahme der unmittelbaren Umgebung von $\mu = 1$ und $\mu = 3$, wo man nur langsame Konvergenz hat.

Für μ etwas größer als 3 findet man dann, dass x_k abwechselnd zwischen zwei Werten x hin und her springt. Man hat dann keinen stabilen Fixpunkt, aber einen Grenzzyklus (limit cycle) der Periode 2. Es gibt dann also Werte x^*, die nach 2 Abbildungen in sich übergehen,



$$x^* = f(\mu, f(\mu, x^*)) = \mu^2 x^*(1-x^*)[1-\mu x^*(1-x^*)]. \tag{40.8}$$

Dies ist eine Gleichung vierten Grades in x^*. Ihre Lösung wird dadurch erleichtert, dass wir schon zwei Lösungen kennen, nämlich die beiden Fixpunktwerte x^*_{tr} und x^*_{nt}, so dass noch eine Gleichung zweiten Grades

$$\mu^2 x^{*2} - \mu^2 x^* + \mu - \mu x^* + 1 = 0 \tag{40.9}$$

mit den Lösungen

$$x^*_{1,2} = \frac{1}{2\mu}[\mu + 1 \pm \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}] \tag{40.10}$$

bleibt. Wir sehen, dass diese beiden Lösungen für $\mu \geq 3$ reell sind und bei $\mu = 3$ mit der instabil werdenden Lösung $x^*_{\mathrm{nt}} = 2/3$ entartet sind.

Auch hier können wir wieder die Stabilität gegen kleine Abweichungen von x^* untersuchen. Wir finden

$$x^* + \delta x_{k+2} = f(\mu, f(\mu, x^* + \delta x_k)) = x^* + \gamma \delta x_k \tag{40.11}$$

mit

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\partial f(\mu, f(\mu, x^*))}{\partial x^*} = \frac{\partial f(\mu, x_1^*)}{dx_1^*} \frac{\partial f(\mu, x_2^*)}{\partial x_2^*} && (40.12) \\ &= \mu^2 (1-2x_1^*)(1-2x_2^*) = \mu^2(1 - 2(x_1^* + x_2^*) + 4x_1^* x_2^*). && (40.13) \end{aligned}$$

Der Bestimmungsgleichung für $x^*_{1,2}$ entnimmt man, dass

$$x_1^* + x_2^* = 1 + \frac{1}{\mu}, \quad x_1^* x_2^* = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2}, \tag{40.14}$$

womit

$$\gamma = -\mu^2 + 2\mu + 4 = 5 - (\mu - 1)^2 \tag{40.15}$$

folgt. Wir können die Gleichung nach μ auflösen und finden

$$\mu = 1 \pm \sqrt{5 - \gamma}. \tag{40.16}$$

Wir haben daher $\gamma = 1$ für $\mu = 3$. Bei $\mu = 1 + \sqrt{5} = 3.2361$ ist γ auf 0 abgefallen und bei $\mu = 1 + \sqrt{6} = 3.4495$ auf -1. Dort wird der Zweier-Zyklus instabil. Tatsächlich findet dort eine weitere Bifurkation auf einen Zyklus der Periode 4 statt. In immer kürzerer Folge folgen Bifurkationen auf Periode 8, 16 etc. bis schließlich bei $\mu \approx 3.56994$ ein chaotisches Verhalten auftritt. Es hat sich herausgestellt, dass die Bifurkationen in Intervallen $\delta\mu$ aufeinander folgen, die asymptotisch mit Faktoren $\delta = 4.669202$ kleiner werden.

40.c Grenz-Zyklus der Periode 3

In dieser Figur sind für den Bereich $\mu = 3.5...4.0$ die Bilder x_k genauer dargestellt als in der vorhergehenden Figur. Es fällt auf, dass im chaotischen

Bereich mehrere Fenster, das heißt Intervalle sind, in denen Grenz-Zyklen auftreten.

Besonders ausgeprägt ist der Grenz-Zyklus der Periode 3 um $\mu \approx 3.83$. Für dessen Fixpunkte gilt

$$x^* = f^3(\mu, x^*) := f(\mu, f(\mu, f(\mu, x^*))). \tag{40.17}$$

Dies ist eine Gleichung achten Grades in x^*. Zwei der Lösungen sind wieder $x_{\rm tr}$ und $x_{\rm nt}$. Zusätzlich gibt es weitere sechs Lösungen, die sich in zwei Gruppen von je drei Lösungen einteilen lassen. Die Lösungen einer Gruppe gehen durch Anwendung der Abbildung f auseinander hervor. Neben diesen Fixpunkt-Lösungen interessiert uns deren Stabilität wieder beschrieben durch

$$\gamma = \frac{\partial f^3(\mu, x^*)}{\partial x^*} = \prod \frac{\partial f(\mu, x_i^*)}{\partial x_i^*}, \tag{40.18}$$

wobei die x_i^* ein Fixpunkt und seine zwei folgenden Bilder $f(\mu, x_i^*)$ und $f^2(\mu, x_i^*)$ sind. Daraus folgt, dass es nur zwei verschiedene γ gibt, für jeden der beiden Zyklen eines. Man kann aus der Fixpunkt-Gleichung und der Gleichung für γ das x^* eliminieren, etwa unter Verwendung von *maple* mit dem Befehl

$$\text{resultant}(\frac{x - f^3(x)}{x - f(x)}, \gamma - \text{diff}(f^3(x), x), x) \tag{40.19}$$

Die Funktion resultant eliminiert aus zwei Polynomen in einer Variablen x, die 0 sein sollen, die Variable x, gibt also die Bedingung zwischen den Koeffizienten der Polynome, die eine simultane Lösung erlaubt. Die Gleichung resultant(...)=0 ergibt also im vorliegenden Fall die Gleichung für γ als Funktion von μ. Tatsächlich lässt sich resultant faktorisieren und enthält das in γ quadratische Polynom zur dritten Potenz, das Null sein muss

$$(\mu - 1)^6 - 11(\mu - 1)^4 + 35(\mu - 1)^2 - 89 - 2\gamma(\mu - 1)^2 + 18\gamma - \gamma^2 = 0. \tag{40.20}$$

Nach γ aufgelöst erhalten wir

$$\gamma = 9 - (\mu - 1)^2 \pm \mu(\mu - 2)\sqrt{(\mu - 1)^2 - 8}. \tag{40.21}$$

Dieser Ausdruck wird reell für $\mu \geq 1 + \sqrt{8} = 3.8284$. Tatsächlich beginnt dort das Fenster für den Grenz-Zyklus der Periode 3. Für dieses μ findet man, dass die Lösungen x^* zweifach entartet sind und beide den Wert $\gamma = 1$ liefern. Ein γ nimmt als Funktion von μ zu, das andere ab. Wir geben in der nachfolgenden Tabelle an, wo der Wert $\gamma = 0$ und $\gamma = -1$ erreicht ist.

μ	γ	x^*	x^*	x^*
3.8284	1	0.159929	0.514335	0.956318
3.8319	0	0.154290	1/2	0.957969
	1.961	0.165265	0.528615	0.954831
3.8415	-1	0.148720	0.486344	0.959658
	2.852	0.169989	0.542007	0.953596

Offensichtlich ist nur einer der beiden Dreier-Zyklen im Intervall von 3.8284 bis 3.8415 stabil. Bei 3.8415 tritt eine Bifurkation in einen Grenz-Zyklus der Periode 6 auf. Es fällt auf, dass sich weitere Bifurkationen anschließen und eine genauere Auflösung zeigt, dass sich bis etwa $\mu = 3.858$ die gleiche Struktur wie zwischen $\mu = 3$ und 4 anschließt, nur jeweils verdreifacht und zwar bei $x \approx 0.16$, 0.50, 0.96. Wir kommen darauf noch zurück.

40.d Grenz-Zyklen verschiedener Periodenzahl n

Tatsächlich gibt es Bereiche (Fenster), in denen beliebig hohe Periodenzahlen n auftreten. Diese liegen in der Umgebung der Lösung

$$\frac{1}{2} = f^n(\mu, \frac{1}{2}). \tag{40.22}$$

Für $x^* = \frac{1}{2}$ ist nämlich $\gamma = 0$, also beste Stabilität gegeben, da $\frac{\partial f(\mu,x)}{\partial x} = 0$ für $x = \frac{1}{2}$. Man zeichnet also am besten die Kurven $x_n := f_n = f^n(\mu, \frac{1}{2})$ und sucht deren Schnittpunkte mit 1/2. Diese sind für n=1...4 in blau (dunkelgrau), für n=5...8 in magenta (hellgrau) eingezeichnet. $f^1 = \frac{\mu}{4}$ gibt das Maximum der Abbildung an, daher liegen dort die Punkte in der Figur besonders dicht. Ähnliches für die Dichte gilt auch für die weiteren Abbildungen $x_n = f^n(\mu, \frac{1}{2})$.

Wir beobachten, dass Grenzzyklen mit Periode n dort auftreten, wo $f_k = f_{k+n}$. Für $n = 3$ ($\mu \approx 3.83$) ist das deutlich zu erkennen. Ähnlich erhält man bei $\mu = 3.627$ ein Fenster mit $n = 6$ und bei $\mu = 3.739$ ein Fenster mit $n = 5$.

Zwischen den Fenstern mit periodischen Grenz-Zyklen finden sich chaotische Bereiche. Im Chaos ist $|\gamma| > 1$, während in den periodischen Fenstern $|\gamma| < 1$ gilt. Der Logarithmus von $|\gamma|$ dividiert durch die Anzahl der Abbildungen ist der Lyapunov-Exponent λ. Dieser Exponent ist negativ im Bereich der periodischen Fenster und wird positiv im chaotischen Bereich. An den Bifurkationen verschwindet er. In der vorstehenden Figur finden Sie λ als Funktion von μ im Intervall von 3.5 bis 4.

Für positives λ wächst der Abstand zweier nah benachbarter Punkte x unter der Abbildung exponentiell an. Dieses Anwachsen lässt sich besonders einfach für $\mu = 4$ beobachten. Führen wir nämlich an Stelle von x_k den Winkel ϕ_k durch

$$x_k = \sin^2 \phi_k \tag{40.23}$$

ein, so folgt für $\mu = 4$

$$x_{k+1} = 4 \sin^2 \phi_k (1 - \sin^2 \phi_k) = \sin^2(2\phi_k) \tag{40.24}$$

Die Abbildung lässt sich dann also einfach durch

$$\phi_{k+1} = 2\phi_k \tag{40.25}$$

beschreiben. Ein Abstand $\delta\phi$ multipliziert sich also bei jeder Abbildung mit 2, so dass $\lambda = \ln 2 \approx 0.7$ für $\mu = 4$. Dies entspricht der oben gezeigten Figur.

Wir bemerken, dass für $\mu = 4$ das $\gamma_{\text{nt}} = -2$ wird, die beiden γ für den Zweier-Zyklus nehmen dort die Werte ± 4 an, was der zweimaligen Abbildung entspricht und für den Zyklus mit der Periode 3 erhalten wir $\gamma = \pm 8$, also abgesehen vom Vorzeichen 2^3. Lediglich $\gamma_{\text{tr}} = 4$ verhält sich anders. Das liegt daran, dass bei $x^*_{\text{tr}} = 0$ das ϕ verschwindet und x sich wie ϕ^2 verhält. ϕ^2 multipliziert sich aber bei jeder Abbildung mit 4 und nicht mit 2.

Gleichzeitig erlaubt uns das eine Abschätzung, wie dicht die periodischen Fenster nahe bei $\mu = 4$ liegen. Wir starten mit $x_0 = \frac{1}{2}$. Dann folgt $x_1 = \frac{\mu}{4}$ und $x_2 = \frac{\mu^2}{4}(1 - \frac{\mu}{4}) \approx (4 - \mu)$ was $\phi_2 \approx \sqrt{4 - \mu}$ und $\phi_n \approx 2^{n-2}\sqrt{4 - \mu}$ ergibt. Nun soll $x_n = \frac{1}{2}$, also $\phi_n = \frac{\pi}{4}(2k + 1)$ mit ganzem k sein. Daraus folgt die Abschätzung

$$\mu \approx 4 - \frac{\pi^2}{4^n}(2k + 1)^2. \tag{40.26}$$

Für $n = 3$ und $k = 0$ ergibt das $\mu \approx 4 - \frac{\pi^2}{64} = 3.846$ im Vergleich zum tatsächlichen Wert 3.832. Diese Näherung ist nützlich, wenn man die Lösungen von $f^n(\mu, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ finden will. Dazu führt man

$$g_n(\mu) := f^n(\mu, \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \tag{40.27}$$

ein und dividiert durch die bekannten Nullstellen. Das heißt, für die Primzahlzerlegung von n

$$n = \prod p_i^{m_i}, \quad m_i \geq 1 \tag{40.28}$$

bildet man

$$G_n(\mu) = \prod_{k_1,k_2,\ldots} (g_{n/\prod_i p_i^{k_i}}(\mu))^{p(\sum_i k_i)}, \quad p(k) = (-)^k, \tag{40.29}$$

wobei die k_i unabhängig voneinander die Werte 0 und 1 durchlaufen. Man dividiert also g_n durch die g_{n/p_i}, da die Nullstellen von g_{n/p_i} auch in g_n enthalten sind. Da aber g_{n/p_i} und g_{n/p_j} die Nullstellen von $g_{n/(p_ip_j)}$ enthält, muss man nun wieder mit $g_{n/(p_ip_j)}$ multiplizieren etc. Das führt auf G_n.

Damit hat man die Nullstellen für Zyklen eliminiert, die in n enthalten sind. Diese folgen manchmal dichter aufeinander als durch obige Näherungsformel beschrieben. Dann sucht man jeweils, ob sich zwischen $\mu = 4 - \frac{\pi^2}{4^{n-1}} l^2$ und $\mu = 4 - \frac{\pi^2}{4^{n-1}} (l+1)^2$ das Vorzeichen von $G_n(\mu)$ ändert und sucht gegebenenfalls die dazwischen liegende Nullstelle auf. Man findet die nebenstehenden Werte.
Dabei ist u definiert durch $\mu = 4 - \frac{\pi^2}{4^n} u^2$. Wäre obige Näherungsformel (40.26) für die Nullstellen für $G_n(\mu)$ exakt, dann müssten die u ungerade Zahlen sein.

n	μ	u
1	2.000000	0.900316
2	3.236068	1.112852
3	3.831874	1.044137
4	3.960270	1.015146
	3.498562	3.606441
5	3.990267	1.004899
	3.905706	3.127815
	3.738915	5.204645
6	3.997583	1.001516
	3.977766	3.037630
	3.937536	5.091473
	3.844569	8.031547
	3.627558	12.432535

Wir bringen schließlich noch eine Abschätzung für die Anzahl der periodischen Fenster. Falls diese aus dem Chaos und nicht durch Periodenverdopplung entstehen, was für ungerades n stets der Fall ist, dann müssen wir die Nullstellen von $G_n(\mu)$ aufsuchen. Aus (40.29) finden wir, dass dies eine Gleichung vom Grade

$$\mathrm{gr}(n) = \sum_{k_1,k_2,\ldots} (-)^{\sum_i k_i} 2^{n/\prod_i p_i^{k_i}} \tag{40.30}$$

ist. Wir gehen davon aus, dass zu jedem Fenster $2n$ Lösungen, n stabile und n instabile wie oben für $n = 3$ beschrieben, gehören. Dann ist die Anzahl der Fenster

$$\mathrm{fe}(n) = \frac{\mathrm{gr}(n)}{2n}, \tag{40.31}$$

also für $n = 1$, 3 und 5 $(2^1)/2 = 1$, $(2^3 - 2^1)/6 = 1$ und $(2^5 - 2^1)/10 = 3$ in Übereinstimmung mit den oben gefundenen Lösungen. Für gerade n liegt die Sache etwas anders. Auch hier ist der Grad der Gleichung durch obiges $\mathrm{gr}(n)$ gegeben. Allerdings entsteht ein Teil der Fenster mit Periode n durch Bifurkation aus der Periode $\frac{n}{2}$. Hierfür bedarf es nur n Lösungen. Also gilt

$$\mathrm{fe}(n) = \mathrm{fe}(\frac{n}{2}) + \frac{\mathrm{gr}(n) - n\mathrm{fe}(\frac{n}{2})}{2n}. \tag{40.32}$$

Man kann sich nun durch vollständige Induktion nach m für $n = 2^m u$, wobei u ungerade ist, davon überzeugen, dass die Anzahl von Fenstern gegeben ist durch obige Formeln für fe(n) und gr(n), wenn man für gerades n bei der Berechnung von gr(n) keinen Beitrag $k_i = 1$ für $p_i = 2$ mitnimmt. Insbesondere gilt dann $\mathrm{gr}(2^k) = 2^{2^k}$ und $\mathrm{fe}(2^k) = 2^{2^k-k-1}$, also beträgt die Anzahl der Fenster für $n = 1$, 2 und 4 der Reihe nach $2^{1-0-1} = 1$, $2^{2-1-1} = 1$ und $2^{4-2-1} = 2$. Weiter hat man $\mathrm{fe}(6) = (2^6 - 2^2)/(12) = 5$.

Wer sich wundert, dass gr(n) stets ein ganzzahliges Vielfaches von $2n$ ist, möge in der Zahlentheorie den kleinen Fermat-Satz nachschlagen, der besagt, dass $a^p \equiv a \bmod p$ für Primzahlen p, und die Erweiterung $a^{p^m} \equiv a^{p^{m-1}} \bmod p^m$.

40.e Periodische Fenster

40.e.α Prototyp

Wir haben oben bereits das Fenster der Periode 3 betrachtet und die Ähnlichkeit der Struktur im Fenster mit dem Verhalten im Gesamtbereich $\mu = 1..4$ erwähnt.

Um dies zu untersuchen, nehmen wir an, wir haben eine Lösung μ_0 von $f^n(\mu_0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ gefunden und entwickeln nun f^n um diese Stelle

$$f^n(\mu_0 + \delta\mu, \frac{1}{2} + \delta x) = \frac{1}{2} + \frac{a}{2}(\delta x)^2 + b\delta\mu. \tag{40.33}$$

Dabei berücksichtigen wir, dass ein linearer Beitrag in δx wegen $\gamma = 0$ an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ nicht auftritt. Falls die Entwicklung bis zu dieser Ordnung in δx und $\delta\mu$ gut genug ist, beschreibt sie die Abbildung

$$\delta x_{n+k} = \frac{a}{2}(\delta x_k)^2 + b\delta\mu \tag{40.34}$$

Die Fixpunkte ergeben sich aus

$$\delta x^* = \frac{a}{2}(\delta x^*)^2 + b\delta\mu \tag{40.35}$$

zu

$$\delta x^* = \frac{1}{a}(1 \pm \sqrt{1 - 2ab\delta\mu}) \tag{40.36}$$

und γ zu

$$\gamma = \frac{\partial f^n(\mu + \delta\mu, \frac{1}{2} + \delta x^*)}{\partial \delta x^*} = a\delta x^* = 1 \pm \sqrt{1 - 2ab\delta\mu}. \tag{40.37}$$

Wir finden also reelle Lösungen für $2ab\delta\mu \leq 1$. Im einzelnen haben wir die Lösungen

$\delta\mu$	γ	δx^*	γ	δx^*
$\frac{1}{2ab}$	1	$\frac{1}{a}$		
0	0	0	2	$\frac{2}{a}$
$-\frac{3}{2ab}$	-1	$-\frac{1}{a}$	3	$\frac{3}{a}$
$-\frac{4}{ab}$	-2	$-\frac{2}{a}$	4	$\frac{4}{a}$

Schließlich beobachten wir, dass $f^n - \frac{1}{2}$ als Funktion von δx das Extremum $\delta x_{\mathrm{ex}} = b\delta\mu$ annimmt. Dessen Bild ist

$$f^n(\mu_0 + \delta\mu, \frac{1}{2} + \delta x_{\mathrm{ex}}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{a}[\frac{1}{2}(ab\delta\mu)^2 + ab\delta\mu] \tag{40.38}$$

Wenn dieses Bild zwischen dem Extremalwert und und dem weiter entfernten instabilen Fixpunkt $\delta x^* = \frac{1}{a}[1 + \sqrt{1 - 2ab\delta\mu}]$ liegt, liegen alle Abbildungen wieder in diesem Intervall. Sobald aber dieses Bild außerhalb liegt, hört die Aufteilung der Bilder in die n Intervalle auf und es setzt wieder ein Chaos über einen viel größeren Bereich ein. Dies geschieht bei $\delta\mu = -\frac{4}{ab}$. Man bezeichnet dieses Verhalten als *Krise*.

Unmittelbar vor Beginn des Fensters (bei $\delta\mu = 1/(2ab)$, $\gamma = 1$) hat γ zwei konjugiert komlexe Werte nahe bei 1. Ist x_k in der Nähe des x^*, das sich für $\gamma = 1$ ergibt, so ist x_{n+k} nahe bei x_k. Es bewegt sich unter der Abbildung nur sehr langsam bis es sich weiter von diesem x^* entfernt hat. Dieses langsame Verhalten, das dazwischen auftritt, bevor es sich wieder stärker chaotisch bewegt, heißt *Intermittenz*. Es hat Ähnlichkeit mit relativ ruhigen Bereichen in einer turbulenten Strömung.

40.e.β Selbstähnlichkeit

Wir formen diese Abbildung um, um den Zusammenhang zwischen dem Verhalten im Intervall $\mu = 1..4$ und dem kleinen Fenster zu sehen. Dazu setzen wir

$$\delta x = u + vy \tag{40.39}$$

und bestimmen die Konstanten u und v so, dass wir wieder die logistische Abbildung erhalten. Wir finden mit dieser Substitution

$$u + vy_{k+n} = \frac{a}{2}(u + vy_k)^2 + b\delta\mu \tag{40.40}$$

Wir setzen nun beide Seiten für $y = 0$ gleich und erhalten

$$u = \frac{a}{2}u^2 + b\delta\mu \tag{40.41}$$

mit der Lösung

$$u = \frac{1}{a}(1 \pm \sqrt{1 - 2ab\delta\mu}) \tag{40.42}$$

Dann lautet die Abbildung

$$y_{n+k} = auy_k(1 + \frac{v}{2u}y_k) \tag{40.43}$$

Mit der Wahl

$$\hat{\mu} = au = 1 \pm \sqrt{1 - 2ab\delta\mu}, \quad v = -2u \tag{40.44}$$

lautet sie

$$y_{n+k} = \hat{\mu}y_k(1 - y_k). \tag{40.45}$$

Wählen wir das obere Vorzeichen, so durchläuft $\hat{\mu}$ das Intervall von 1 bis 4 für $\delta\mu = \frac{1}{2ab}$ bis $-\frac{4}{ab}$ und zeigt in diesem Bereich die gleichen Fenster. Das bedeutet, dass innerhalb dieses Fensters die ersten 4/9 die Periode n hat, die nächsten 2/9 die Periode $2n$, es folgen weitere Periodenverdopplungen und mit Beginn des letzten Neuntels beginnt das Fenster der Periode $3n$.

Wir hatten das obere Vorzeichen in (40.44) genommen. Genau so gut hätten wir das untere verwenden können. Tatsächlich besteht eine Symmetrie $\hat{\mu} \leftrightarrow 2 - \hat{\mu}$, wenn wir den Bereich für $\hat{\mu}$ bis nach -2 erweitern. Man findet eine Bifurkation des trivialen Fixpunktes bei $\hat{\mu} = -1$ und das vollständig ausgebildete Chaos bei $\hat{\mu} = -2$. Man muss dann allerdings auch den Wertebereich für x neu definieren. Für $\hat{\mu} = -2$ ist er durch $-\frac{1}{2} \geq x \geq \frac{3}{2}$ gegeben. Diese Symmetrie fiel auch bereits in (40.20) auf, wo μ nur als Quadrat von $(\mu - 1)$ auftrat und daher $\gamma(\mu) = \gamma(2 - \mu)$ galt.

Aufgabe Ähnlich wie bei der Abschätzung (40.26) schätze man ausgehend von $x_0 = 1/2 + \delta x$, $\mu = \mu_0 + \delta\mu$ die Koeffizienten a und b in (40.33) ab und damit die Breite $\delta\mu$ der periodischen Fenster.

Der oben angegebene Stoff zum Chaos war recht umfangreich, obwohl auf diesem aktuellen Forschungsgebiet noch viel mehr bekannt ist. Aber einiges sollte schon hängen bleiben; darum

Wiederhole: Was ist ein integrables und ein nicht-integrables System? Was ist ein Poincaré-Schnitt? Was ist ein Lyapunov-Exponent? Wie kann man dem Lyapunov-Exponenten ansehen, ob das System chaotisch ist oder nicht? Was ist eine Periodenverdopplung?