3 Energie

3.a Potentielle Energie, konservative Kräfte

Von der Geschwindigkeit hängen (in der makroskopischen Welt) nur
a) die Lorentz-Kraft (bewegte Ladung im Magnetfeld),
b) die Reibungskräfte ab.
Wir wollen die Behandlung geschwindigkeitsabhängiger Kräfte zurückstellen.

Die Erfahrung zeigt, dass die geschwindigkeitsunabhängigen Kräfte aus einem Potential $\mathcal{V}$ hergeleitet werden können. Die Kraft $\mathbf{F}_i$ auf den Massenpunkt Nr. i ist dann

$$\mathbf{F}_i = -\mathrm{grad}\,\mathcal{V}(\mathbf{x}_1, ...\mathbf{x}_i, ...\mathbf{x}_N) = -\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x_{i\alpha}}\mathbf{e}_\alpha \tag{3.1}$$

$\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x_{i\alpha}}$ ist eine partielle Ableitung, d.h. $\mathcal{V}$ wird nach $x_{i\alpha}$ abgeleitet, wobei alle anderen $x_{j\beta}$ festgehalten werden. $\mathcal{V}$ heißt potentielle Energie. Die Kräfte, die aus einem Potential herleitbar sind, heißen konservativ. Das Potential kann darüber hinaus von der Orientierung der Körper abhängen, z.B. wenn sie ein elektrisches oder magnetisches Moment tragen. Innerhalb der Behandlung von Massenpunkten werden wir diese Eigenschaft nicht berücksichtigen.

Der Gradient Auf einer Fläche konstanten Potentials (hier betrachten wir nur einen Massenpunkt) gilt

$$\mathrm{d}\mathcal{V} = \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x_\alpha}\mathrm{d}x_\alpha = \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x_\alpha}\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta \cdot \mathrm{d}x_\beta = \mathrm{grad}\,\mathcal{V}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} = 0. \tag{3.2}$$

Der Gradient steht also senkrecht auf den Flächen konstanten Potentials. Er zeigt in Richtung des Potentialanstieges und gibt betragsmäßig den Anstieg des Potentials wider. Anschaulich "grad $\mathcal{V}$ =Steigung des Potentials $\mathcal{V}$".
Zwei Beispiele:

$$\alpha) \quad \mathrm{grad}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}) = \mathbf{e}_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(a_\beta x_\beta) = \mathbf{e}_\alpha\delta_{\alpha\beta}a_\beta\mathbf{e}_\alpha a_\alpha = \mathbf{a}. \tag{3.3}$$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}$ steigt in Richtung von $\mathbf{a}$ an.

$$\beta) \quad f(|\mathbf{x}|) = \mathbf{e}_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}f(x(x_1,x_2,x_3)) = \mathbf{e}_\alpha\frac{\partial|\mathbf{x}|}{\partial x_\alpha}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \tag{3.4}$$

mit

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}, \quad \frac{\partial|\mathbf{x}|}{\partial x_\alpha} = \frac{x_\alpha}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} = \frac{x_\alpha}{|\mathbf{x}|}. \tag{3.5}$$

Damit finden wir

$$\mathrm{grad}\,f(|\mathbf{x}|) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}. \tag{3.6}$$

Die Bedingung $\mathbf{F}_i = -\mathrm{grad}_i\mathcal{V}$ stellt eine wesentliche Einschränkung an die Kräfte dar. Denn aus

$$F_{i\alpha} = -\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x_{i\alpha}} \tag{3.7}$$

folgt

$$\frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial x_{j\beta}} = -\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x_{i\alpha}\partial x_{j\beta}} = \frac{\partial F_{j\beta}}{\partial x_{i\alpha}}. \tag{3.8}$$

Speziell für $i = j$ folgt

$$\frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial x_{i\beta}} = \frac{\partial F_{i\beta}}{\partial x_{i\alpha}}. \tag{3.9}$$

Diese drei unabhängigen Gleichungen lassen sich zusammenfassen zu $\mathrm{rot}_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$, denn (ohne Indices i) ist die Rotation definiert durch

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{e}_\alpha \frac{\partial F_\gamma}{\partial x_\beta}, \quad (\mathrm{rot}\,\mathbf{F})_1 = \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \text{ und zyklisch} \tag{3.10}$$

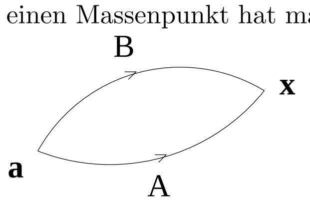
Andererseits sind die Bedingungen (3.8) hinreichend für die Existenz eines Potentials. Sie garantieren, dass

$$-\sum_i F_{i\alpha}\mathrm{d}x_{i\alpha} = -\sum_i \mathbf{F}_i \mathrm{d}\mathbf{x}_i \tag{3.11}$$

ein vollständiges Differential ist, das heißt das Integral

$$-\int_{\mathbf{a}_1,\ldots\mathbf{a}_N}^{\mathbf{x}_1,\ldots\mathbf{x}_N} \sum_i \mathbf{F}_i(\mathbf{x}'_1,\ldots\mathbf{x}'_N)\mathrm{d}\mathbf{x}'_i = \mathcal{V}(\mathbf{x}_1,\ldots\mathbf{x}_N) - \mathcal{V}(\mathbf{a}_1,\ldots\mathbf{a}_N) \tag{3.12}$$

ist unabhängig vom Integrationsweg. Dies folgt aus dem Stokesschen Satz. Für einen Massenpunkt hat man für zwei Wege (A) und (B)



$$\int_{\underset{(A)}{\mathbf{a}}}^{\mathbf{x}} \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\underset{(B)}{\mathbf{a}}}^{\mathbf{x}} \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{x} = \oint \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{f} = \mathbf{0}, \tag{3.13}$$

da $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Dabei wird das Linienintegral über die geschlossene Linie längs (A) und anschließend in Gegenrichtung (= negativer Richtung) längs (B) in ein Flächenintegral über die von (A) und (B) berandete Fläche umgewandelt.

Entsprechendes gilt für $3N$ Variable $x_{i\alpha}$ im $3N$ dimensionalen Raum. Ersetzen wir die zwei Indices (i,α) durch einen Index k, der von 1 bis $3N$ läuft, dann löst man $F_k = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_k}$, indem man zunächst in x_1, dann x_2, ... und zuletzt in x_{3N}-Richtung integriert,

$$\mathcal{V}(x_1,\ldots x_{3N}) = \mathcal{V}(a_1,\ldots a_{3N}) - \sum_{k=1}^{3N}\int_{a_k}^{x_k} F_k(x_1,\ldots x_{k-1},x',a_{k+1},\ldots a_{3N})\mathrm{d}x'. \tag{3.14}$$

Aus dieser Darstellung können wir auch sehen, dass (3.7) tatsächlich erfüllt ist, wenn (3.8) gilt. Hierzu bilden wir

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_j} &= F_j(...x_{j-1}, x_j, a_{j+1}, ...) \\ &+ \sum_{k=j+1}^{3N} \int_{a_k}^{x_k} \underbrace{\frac{\partial F_k}{\partial x_j}}_{\frac{\partial F_j}{\partial x'}}(...x_{k-1}, x', a_{k+1}, ...)\mathrm{d}x' \\ &= F_j(...x_{j-1}, x_j, a_{j+1}, ...) \\ &+ \sum_{k=j+1}^{3N} (F_j(...x_k, a_{k+1}, ...) - F_j(..., x_{k-1}, a_k, ...)) \\ &= F_j(x_1, ..., x_{3N}). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Der obige spezielle Integrationsweg ergibt also eine Lösung für $\mathcal{V}$, die sämtliche Gleichungen $F_j = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_j}$ erfüllt, wenn $\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}$ gilt.

Ein eindeutiges Potential ergibt sich nur, wenn das Gebiet, für das (3.7) gilt, einfach zusammenhängend ist. Es muss also beim Zusammenziehen der Berandung zu einem Punkt die Gleichung (3.7) auf der dabei überstrichenen Fläche überall gelten. Man erkennt das aus der Herleitung mit dem Stokesschen Satz.

3.b Energieerhaltung und Homogenität der Zeit

Falls das System abgeschlossen ist, d.h. von außen keine Kräfte auf Massenpunkte wirken, hängt $\mathcal{V}$ nicht explizit von der Zeit ab, nur implizit über die $\mathbf{x}_i(t)$,

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbf{x}_1, ...\mathbf{x}_N). \tag{3.16}$$

Aus dieser Unabhängigkeit von der Zeit folgt der Satz von der Erhaltung der Energie. Wir betrachten die zeitliche Änderung der potentiellen Energie

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathcal{V}}{\mathrm{d}t} &= \sum_i \dot{x}_{i\alpha} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_{i\alpha}} = \sum_i \mathbf{v}_i \mathrm{grad}\,_i \mathcal{V} \\ &= -\sum_i \mathbf{v}_i \mathbf{F}_i = -\sum \mathbf{v}_i m_i \dot{\mathbf{v}}_i = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i \frac{m_i}{2} v_i^2. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Man bezeichnet

$$\mathcal{T} = \sum_i \frac{m_i}{2} v_i^2 \tag{3.18}$$

als die kinetische Energie des Systems. Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{T} + \mathcal{V}) = 0, \tag{3.19}$$

das heißt die Energie

$$E = \mathcal{T} + \mathcal{V} \tag{3.20}$$

ist zeitlich konstant. Die Eigenschaft, dass $\mathcal{V}$ eines abgeschlossenen, d.h. mit der übrigen Welt nicht wechselwirkenden Systems, von der Zeit unabhängig ist, begründet die Homogenität der Zeit. Sie besagt, dass kein Zeitpunkt für die physikalischen Gesetze ausgezeichnet ist. Kennt man für solch ein System eine Lösung der Bewegungsgleichungen $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{f}_i(t)$, so ist auch $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{f}_i(t - t_0)$ für festes beliebiges t_0 Lösung.

Kräfte, die sich aus einem zeitunabhängigen Potential herleiten lassen, bezeichnet man als konservativ.

3.c Eindimensionale Systeme mit einem Massenpunkt I

Wir gehen aus von der Energie-Erhaltung

$$E = \mathcal{T} + \mathcal{V} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \mathcal{V}(x) \tag{3.21}$$

und erhalten daraus

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{2(E - \mathcal{V}(x))}{m} \tag{3.22}$$

Die Gleichung lässt sich auflösen zu

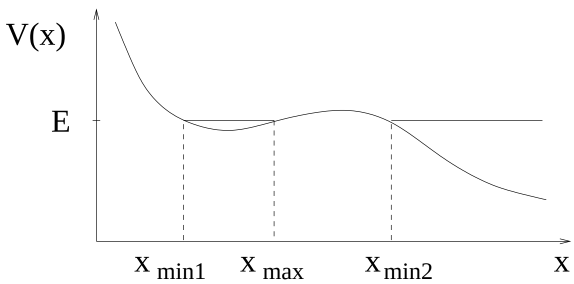
$$\mathrm{d}t = \pm\sqrt{\frac{m}{2(E - \mathcal{V}(x))}}\mathrm{d}x \tag{3.23}$$

und wird damit eine separable Differentialgleichung. Separabel heißt, man kann die Gleichung in der Form

$$f(t)\mathrm{d}t = g(x)\mathrm{d}x \tag{3.24}$$

schreiben. Dann kann man beide Seiten integrieren. In unserem Fall heißt das

$$t - t_0 = \pm\int_{x(t_0)}^{x(t)} \sqrt{\frac{m}{2(E - \mathcal{V}(x'))}}\mathrm{d}x'. \tag{3.25}$$



Es sind verschiedene Arten der Bewegung möglich. Eine Möglichkeit besteht darin, dass sich der Massenpunkt aus großer Entfernung nähert, um schließlich bei x_{min2} seinen nächsten Punkt zu erreichen, dort umzukehren und wieder in große Entfernung zu verschwinden. Die andere Möglichkeit besteht darin, dass der Massenpunkt zwischen $x_{\rm min1}$ und $x_{\rm max}$ oszilliert. Die Periode der Schwingung ergibt sich zu

$$T = 2\int_{x_{\rm min}}^{x_{\rm max}} ... = \int_{x_{\rm min}}^{x_{\rm max}} \sqrt{\frac{2m}{E-\mathcal{V}(x')}}{\rm d}x'. \tag{3.26}$$

3.c.α Der harmonische Oszillator

Der harmonische Oszillator mit der Federkonstanten f wird durch das Potential

$$\mathcal{V} = \frac{f}{2}x^2 \tag{3.27}$$

beschrieben. Bei gegebener Energie E beträgt seine Maximal-Auslenkung

$$x_{\rm max} = a = \sqrt{\frac{2E}{f}} = -x_{\rm min}. \tag{3.28}$$

Damit ergibt sich die Schwingungsdauer zu

$$T = \int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{2m}{\frac{f}{2}a^2 - \frac{f}{2}x^2}} = \sqrt{\frac{4m}{f}} \int_{-a}^{a} \frac{{\rm d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}. \tag{3.29}$$

Mit der Substitution $x = a\xi$ erhält man

$$T = \sqrt{\frac{4m}{f}} \underbrace{\int_{-1}^{+1} \frac{{\rm d}\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}_{\pi} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{f}} \tag{3.30}$$

Den zeitlichen Ablauf erhält man aus

$$t = \int^{x} \sqrt{\frac{m}{fa^2 - fx'^2}}{\rm d}x' = \sqrt{\frac{m}{f}} \arcsin(\frac{x}{a}) + t_0, \tag{3.31}$$

woraus nach x aufgelöst

$$x = a\sin(\sqrt{\frac{f}{m}}(t-t_0)) \tag{3.32}$$

folgt.

3.c.β Der anharmonische Oszillator

Gegeben sei ein anharmonischer Oszillator mit dem Potential

$$\mathcal{V}(x) = \frac{f}{2}x^2 + \frac{g}{4}x^4. \tag{3.33}$$

Seine maximale Auslenkung sei $a = x_{\max} = -x_{\min}$. Dann ist seine Energie $E = \frac{f}{2}a^2 + \frac{g}{4}a^4$. Wir finden dann für die Schwingungsdauer

$$\begin{aligned} T &= \int_{-a}^{+a} \sqrt{\frac{2m}{\frac{f}{2}a^2 + \frac{g}{4}a^4 - \frac{f}{2}x^2 - \frac{g}{4}x^4}} \mathrm{d}x \\ &= \sqrt{\frac{4m}{f}} \int_{-a}^{+a} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2 - x^2)(1 + \frac{g}{2f}a^2 + \frac{g}{2f}x^2)}}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Es sei $\lambda := \frac{ga^2}{f} \ll 1$, das heißt die Anharmonizität sei klein. Wir entwickeln dann den Integranden

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}\lambda(1 + \frac{x^2}{a^2})}} = 1 - \frac{1}{4}\lambda(1 + \frac{x^2}{a^2}) + O(\lambda^2). \tag{3.35}$$

Damit erhalten wir die Schwingungsdauer

$$T = \sqrt{\frac{4m}{f}} \int_{-a}^{+a} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} (1 - \frac{\lambda}{4}(1 + \frac{x^2}{a^2}) + O(\lambda^2)) = 2\pi\sqrt{\frac{m}{f}}(1 - \frac{3}{8}\lambda + O(\lambda^2)). \tag{3.36}$$

Das allgemeine Prinzip der Entwicklung für den anharmonischen Oszillator mit

$$\mathcal{V}(x) = \frac{f}{2}x^2 + O(x^3) \tag{3.37}$$

ist es, zunächst die Umkehrpunkte $x_{\min}$ und $x_{\max}$ zu bestimmen, und da an diesen beiden Punkten $E - \mathcal{V}$ verschwindet, entsprechende Faktoren herauszuziehen

$$E - \mathcal{V}(x) = \frac{f}{2}(x_{\max} - x)(x - x_{\min})(1 + h(x)). \tag{3.38}$$

Damit ergibt sich die Schwingungsdauer

$$T = \sqrt{\frac{4m}{f}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x_{\max} - x)(x - x_{\min})(1 + h(x))}}. \tag{3.39}$$

Man kann bei schwacher Anharmonizität nach Potenzen von $h(x)$ entwickeln und erhält

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x_{\max} - x)(x - x_{\min})}}(1 - \frac{1}{2}h(x) + \frac{3}{8}h^2(x) - ...) \tag{3.40}$$

Falls $\mathcal{V}$ ein Polynom in x ist, gilt das auch für $h(x)$. Dann ergeben sich in der Entwicklung elementare Integrale.

4 Impuls

4.a Impulserhaltung

Ähnlich wie die Homogenität der Zeit gibt es auch die Homogenität des Raumes. Sie besagt, dass kein Punkt im Raum ausgezeichnet ist, dass also das Potential eines abgeschlossenen Systems invariant ist, wenn man alle Massenpunkte um den gleichen Vektor **a** verschiebt,

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}, ..., \mathbf{x}_N + \mathbf{a}) = \mathcal{V}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_N). \tag{4.1}$$

Da $\mathcal{V}$ von **a** unabhängig ist, folgt

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial a_\alpha} = 0 = \sum_i \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_{i\alpha}}, \text{ also } \sum_i \operatorname{grad}_i \mathcal{V} = 0. \tag{4.2}$$

Dabei bezeichnen wir den Gradienten bezüglich $\mathbf{x}_i$ mit grad_i. Es folgt dann

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{0} \tag{4.3}$$

mit dem Impuls $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ des Teilchens i. In einem abgeschlossenen System ist die Summe der Kräfte gleich Null und der Gesamtimpuls

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i \tag{4.4}$$

ist als Folge der Homogenität des Raumes erhalten.

4.b Schwerpunkts-Bewegung

Aus

$$\sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i(t) = \sum_i \mathbf{p}_i(t) = \mathbf{P} \tag{4.5}$$

mit konstantem **P** folgt durch Integration nach der Zeit

$$\sum_i m_i \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{P}t + \mathbf{S} \tag{4.6}$$

eine weitere Konstante der Bewegung, **S**. Der Schwerpunkt ist definiert als

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\sum_i m_i \mathbf{x}_i(t)}{\sum_i m_i}. \tag{4.7}$$

Mit der Gesamtmasse $M = \sum_i m_i$ folgt dann

$$\mathbf{R}(t) = \frac{1}{M}(\mathbf{S} + \mathbf{P}t). \tag{4.8}$$

Der Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems bewegt sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\mathbf{P}/M$.

4.c Galilei-Invarianz

Ist $\mathbf{x}_i(t)$, $i = 1, ..., N$ Lösung der Bewegungsgleichungen, so ist auch $\mathbf{X}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{a} + \mathbf{u}t$ Lösung der Bewegungsgleichungen. Dies folgt unmittelbar aus der Homogenität des Raumes. Es gilt

$$m_i \ddot{\mathbf{X}}_i(t) = \mathbf{F}_i(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_N) = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_N) = m_i \ddot{\mathbf{x}}_i(t). \tag{4.9}$$

Es gilt auch für geschwindigkeitsabhängige Kräfte, falls

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_N) = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}, ..., \mathbf{x}_N + \mathbf{a}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}, ..., \mathbf{v}_N + \mathbf{u}) \tag{4.10}$$

für beliebiges $\mathbf{a}$ und $\mathbf{u}$. Diese Invarianz bezeichnet man als Galilei-Invarianz.

Folge:
(i) Zu jedem Inertialsystem ist auch jedes dagegen gleichförmig bewegte Bezugssystem Inertialsystem.
(ii) Wir können ein abgeschlossenes System auch in seinem Schwerpunktssystem betrachten, indem wir $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{X}_i(t) + \mathbf{R}(t)$ wählen. Für dieses System mit $\sum_i m_i \mathbf{X}_i(t) = \mathbf{0}$ gelten die gleichen Bewegungsgleichungen.

4.d Zweiteilchenkräfte

In vielen Fällen (insbesondere auf große Abstände) lässt sich die potentielle Energie als eine Summe von Zweiteilchenpotentialen darstellen

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_N) &= \mathcal{V}_{12}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathcal{V}_{13}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) ... + \mathcal{V}_{1N}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n) \\ &+ \mathcal{V}_{23}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) + ... + \mathcal{V}_{2N}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_N) \\ &+ ... + \mathcal{V}_{N-1,N}(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{x}_N) \end{aligned} \tag{4.11}$$

was wir

$$\sum_{i,j,i<j} \mathcal{V}_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \mathcal{V}_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \tag{4.12}$$

schreiben können, wobei wir o.E.d.A. Symmetrie

$$\mathcal{V}_{ji}(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i) = \mathcal{V}_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j), \quad \mathcal{V}_{ii} = 0 \tag{4.13}$$

annehmen. Auf den Massenpunkt i wirkt dann die Kraft

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji}, \quad \mathbf{F}_{ji} = -\mathrm{grad}_i \mathcal{V}_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j). \tag{4.14}$$

Die Gesamtkraft $\mathbf{F}_i$ setzt sich aus den Zweiteilchenkräften $\mathbf{F}_{ji}$ durch Addition zusammen.

Wir betrachten zunächst für $N = 2$ Massen die Konsequenzen der Homogenität des Raumes. Es gilt

$$\mathcal{V}_{12}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathcal{V}_{12}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}, \mathbf{x}_2 + \mathbf{a}) \tag{4.15}$$

für beliebiges $\mathbf{a}$. Wählen wir nun $\mathbf{a} = -\mathbf{x}_2$, so folgt

$$\mathcal{V}_{12}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathcal{V}_{12}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{0}). \tag{4.16}$$

Die potentielle Energie hängt also nur vom Abstandsvektor $\mathbf{x}_{12} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ ab. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{21} &= -\mathrm{grad}_1 \mathcal{V}_{12}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{0}), \\ \mathbf{F}_{12} &= -\mathrm{grad}_2 \mathcal{V}_{12}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{0}) = +\mathrm{grad}_1 \mathcal{V}_{12}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{0}) = -\mathbf{F}_{21}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

das heißt die Masse 1 übt auf die Masse 2 die gleiche Kraft aus wie die Masse 2 auf die Masse 1, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen. Dies ist das
Dritte Newtonsches Gesetz "Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung." (kurz actio est reactio.)

Man kann sich überlegen, dass für $N > 2$ die Forderungen

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}, ...\mathbf{x}_N + \mathbf{a}) = \mathcal{V}(\mathbf{x}_1, ...\mathbf{x}_N), \tag{4.18}$$

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}_1, ...\mathbf{x}_N) = \sum_{i<j} \mathcal{V}_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \tag{4.19}$$

dazu führt, dass man

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}_1, ...\mathbf{x}_N) = \sum_{i<j} \tilde{\mathcal{V}}_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \tag{4.20}$$

schreiben kann. Aus der ersten Forderung folgt

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}_1, ...\mathbf{x}_N) = \mathcal{V}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_N, ...\mathbf{x}_{N-1} - \mathbf{x}_N, \mathbf{0}). \tag{4.21}$$

Nun können die $\mathcal{V}_{ij}$ aber nur von $\mathbf{x}_i$ und $\mathbf{x}_j$ abhängen. Die einzige Möglichkeit, solch eine Funktion zu bilden, besteht darin, die Differenz $(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_N) - (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_N) = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ zu bilden. Das ist kurz die Idee des Nachweises.

Wir beobachten: Aus Kraft= $-$Gegenkraft folgt für zwei Massen, auf die sonst keine Kräfte wirken,

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = -m_j \ddot{\mathbf{x}}_j, \tag{4.22}$$

das heißt die Beschleunigungen sind (bis auf das Vorzeichen) umgekehrt proportional zu den Massen. Das erlaubt die Bestimmung der Massen, wenn man erstmal ein Massennormal eingeführt hat.

5 Drehimpuls

Isotropie Wir fordern nun neben der Homogenität des Raumes auch die Isotropie des Raumes. Sie besagt, dass für abgeschlossene Systeme keine Richtung des Raumes für die physikalischen Gesetze ausgezeichnet ist. Wir fordern, dass die potentielle Energie invariant bleibt, wenn alle Massen aus ihren Lagen $\mathbf{x}_i$ durch eine Drehung um den Ursprung in eine neue Lage $\mathbf{X}_i$ gebracht werden,

$$\mathcal{V}(\mathbf{X}_1, ...\mathbf{X}_N) = \mathcal{V}(\mathbf{x}_1, ...\mathbf{x}_N). \tag{5.1}$$

5.a Drehungen

Wir bestimmen zunächst, in welchen Vektor $\mathbf{X}$ der Vektor $\mathbf{x}$ bei Drehung um einen Winkel ϕ um eine Achse parallel zu $\mathbf{e}$ übergeht. Es sei $|\mathbf{e}| = 1$. Wir zerlegen $\mathbf{x}$ in einen Anteil $\mathbf{x}_\parallel$ parallel und einen Anteil $\mathbf{x}_\perp$ senkrecht zur Drehachse

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_\parallel + \mathbf{x}_\perp, \quad \mathbf{x}_\parallel = \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}), \tag{5.2}$$

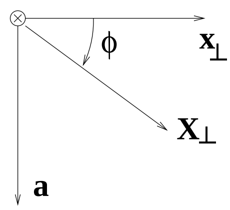
da $(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x})$ die Projektion von $\mathbf{x}$ auf $\mathbf{e}$ darstellt. Aus der Identität

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \tag{5.3}$$

folgt mit $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{e}$, $\mathbf{c} = \mathbf{x}$

$$\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{x}) = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x})\mathbf{e} - \mathbf{x}, \tag{5.4}$$

daher gilt $\mathbf{x}_\perp = \mathbf{x} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x})\mathbf{e} = -\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{x})$. Die Vektoren $\mathbf{x}_\perp$, $\mathbf{a} = \mathbf{e} \times \mathbf{x}$, $\mathbf{e}$ stehen senkrecht aufeinander ($\mathbf{x}_\perp = -\mathbf{e} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{e}$) und bilden ein Rechtssystem. Weiter gilt $|\mathbf{x}_\perp| = |\mathbf{a}|$.



Drehen wir nun $\mathbf{x}$ um den Winkel ϕ um die $\mathbf{e}$-Achse, so bleibt $\mathbf{x}_\parallel$ erhalten, während $\mathbf{x}_\perp$ in der $(\mathbf{x}_\perp, \mathbf{a})$-Ebene liegt. Wir finden

$$\mathbf{X}_\parallel = \mathbf{x}_\parallel, \quad \mathbf{X}_\perp = \mathbf{x}_\perp \cos\phi + \mathbf{a} \sin\phi, \tag{5.5}$$

woraus

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = \mathbf{X}_\parallel + \mathbf{X}_\perp &= \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) - \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{x}) \cos\phi + \mathbf{e} \times \mathbf{x} \sin\phi \\ &= \mathbf{x} \cos\phi + (1 - \cos\phi)\mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{e} \times \mathbf{x} \sin\phi \end{aligned} \tag{5.6}$$

folgt. Für infinitesimal kleinen Drehwinkel $\mathrm{d}\phi$ folgt

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} + \mathbf{e} \times \mathbf{x}\mathrm{d}\phi. \tag{5.7}$$

5.b Drehimpulserhaltung

Wir setzen nun den Ausdruck für $\mathbf{X}$, Gl. (5.7) in (5.1) ein und leiten nach ϕ ab

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \phi} = 0 = \sum_i \frac{\partial \mathbf{X}_i}{\partial \phi} \operatorname{grad}_i \mathcal{V} = \sum_i (\mathbf{e} \times \mathbf{x}_i)(-\mathbf{F}_i) = -\mathbf{e} \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i. \tag{5.8}$$

Da die Gleichung für $\mathbf{e}$ in beliebiger Richtung gilt (wir können, z.B. für $\mathbf{e}$ der Reihe nach die drei Basisvektoren wählen), folgt dass das Gesamtdrehmoment

$$\mathbf{M} := \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i \tag{5.9}$$

verschwindet. Das Drehmoment ist mit der Zeitableitung des Drehimpulses

$$\mathbf{L} := \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i \tag{5.10}$$

verknüpft

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_i \dot{\mathbf{x}}_i \times \mathbf{p}_i + \sum_i \mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M}. \tag{5.11}$$

Der erste Term verschwindet, da $\dot{\mathbf{x}}_i$ und $\mathbf{p}_i$ parallel sind. Für das abgeschlossene System folgt aus der Isotropie des Raumes die Erhaltung des Drehimpulses

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{L} = \text{const.} \tag{5.12}$$

5.c Konsequenz für Zweiteilchenkräfte

Wir betrachten zunächst nur zwei Teilchen. Dann muss $\mathcal{V}_{12}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ invariant sein gegen beliebige Drehungen von $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. Dabei geht $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ in einen Vektor $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$ beliebiger Richtung aber gleicher Länge über, d.h. $\mathcal{V}_{12}$ hängt nur vom Betrag $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ ab,

$$\mathcal{V}_{12} = \mathcal{V}_{12}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|). \tag{5.13}$$

Man kann für $N > 2$ argumentieren, dass für eine Summe von Zweiteilchenpotentialen

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \mathcal{V}_{ij}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) \tag{5.14}$$

gilt.[2] Wir berechnen nun die Kraft $\mathbf{F}_{ji}$, die der Massenpunkt j auf i ausübt,

$$F_{ji\alpha} = -\frac{\partial \mathcal{V}_{ij}}{\partial x_{i\alpha}} = -\frac{\partial |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}{\partial x_{i\alpha}} \frac{\partial \mathcal{V}_{ij}}{\partial |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} = -\frac{x_{i\alpha} - x_{j\alpha}}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \mathcal{V}'_{ij}, \tag{5.15}$$

[2] Hinweis: Man setze zunächst alle Vektoren $\mathbf{x}_k = 0$ bis auf $\mathbf{x}_i$ und führe die infinitesimale Rotation durch. Dies ergibt $\sum_k \mathbf{x}_i \times \operatorname{grad}_i \mathcal{V}_{ik} = 0$. Dann setze man alle Vektoren $\mathbf{x}_k = 0$ bis auf $\mathbf{x}_i$ und $\mathbf{x}_j$. Das führt unter Verwendung des obigen Resultats auf $(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \times \operatorname{grad} \mathcal{V}_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = \mathbf{x}_i \times \operatorname{grad} \mathcal{V}_{ij}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_j \times \operatorname{grad} \mathcal{V}_{ij}(-\mathbf{x}_j)$. Der Gradient bezieht sich jeweils auf das Argument von $\mathcal{V}$. Da die Gleichung $f(a+b) = f(a) + f(b)$ für reelle a und b nur die Lösung $f(a) = ca$ mit beliebiger Konstante c hat, folgt $\mathbf{x} \times \operatorname{grad} \mathcal{V}_{ij}(\mathbf{x})$ ist linear in $\mathbf{x}$, also $\mathbf{x} \times \operatorname{grad} \mathcal{V}_{ij}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_\beta c_{ij\alpha\beta} x_\alpha$. Skalare Multiplikation mit $\mathbf{x}$ muss 0 ergeben. Daher ist $c_{\alpha\beta} = -c_{\beta\alpha}$ und man erhält $\mathbf{x} \times \operatorname{grad} \mathcal{V}_{ij}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \hat{\mathbf{c}}$, woraus $\mathcal{V}_{ij}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathcal{V}}_{ij}(|\mathbf{x}|) + \hat{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{x}$ folgt. Einsetzen in das gesamte $\mathcal{V}$ und erneute Betrachtung der Drehinvarianz zeigt, dass die Summe der Terme $\hat{\mathbf{c}}_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ verschwinden muss.

$$\mathbf{F}_{ji} \quad = \quad -\frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}. \tag{5.16}$$

Falls $\mathcal{V}' > 0$, dann wirkt die Kraft in Richtung von $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$; sie ist anziehend. Falls $\mathcal{V}' < 0$, dann wirkt die Kraft in Richtung von $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$; sie ist abstoßend. Es handelt sich in beiden Fällen um eine Zentralkraft, da sie in Richtung der Verbindungsgeraden der beiden Massen wirkt. Man sieht leicht, dass für Zentralkräfte das Gesamtdrehmoment $\mathbf{M}$ verschwindet, denn

$$\mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{x}_j \times \mathbf{F}_{ij} = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \times \mathbf{F}_{ji} = \mathbf{0}, \tag{5.17}$$

da $\mathbf{F}_{ji}$ und $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ parallel oder antiparallel sind. Damit wird

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{ij} \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ji} = \sum_{i<j} \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \sum_{i>j} \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ji}. \tag{5.18}$$

Tauschen wir in der letzten Summe i und j aus, fassen die beiden Summen zusammen und verwenden (5.17), dann folgt $\mathbf{M} = 0$.

Anmerkung Dreikörperpotentiale führen auf keine Zentralkräfte, aber erfüllen die Invarianz-Forderung (5.1). Führt man zum Beispiel die Berechnung der Van der Waals-Wechselwirkung über den Zweiteilchenbeitrag $\propto 1/|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^6$ eine Ordnung weiter, so erhält man ein Dreikörperpotential

$$\mathcal{V} = \frac{\text{const}}{x_{12}^3 x_{13}^3 x_{23}^3}[-\frac{2}{3} + (\hat{\mathbf{x}}_{12}\hat{\mathbf{x}}_{13})^2 + (\hat{\mathbf{x}}_{12}\hat{\mathbf{x}}_{23})^2 + (\hat{\mathbf{x}}_{13}\hat{\mathbf{x}}_{23})^2 - 3(\hat{\mathbf{x}}_{12}\hat{\mathbf{x}}_{13})(\hat{\mathbf{x}}_{12}\hat{\mathbf{x}}_{23})(\hat{\mathbf{x}}_{13}\hat{\mathbf{x}}_{23})] \tag{5.19}$$

mit $x_{ij} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$, $\hat{\mathbf{x}}_{ij} = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{x_{ij}}$. Dieses Potential ist invariant unter Rotationen, da es nur Beträge und Skalarprodukte der Vektoren enthält.