# 6 Teilsysteme, Einheiten

## 6.a Energiebilanz eines Teilsystems

Wir betrachten ein Teilsystem bestehend aus den Massenpunkten $i = 1, ..n$. Wir nehmen weiterhin an, dass die Kräfte Zweiteilchenkräfte sind. Die Energie $E_\mathrm{T}$ des Teilsystems sei als Summe der kinetischen Energie der Massen $m_1$, ... $m_n$ und der potentiellen Energie zwischen den Massenpunkten definiert

$$E_\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} v_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{V}_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j). \tag{6.1}$$

Die Änderung der Energie des Teilsystems ergibt sich zu

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{T}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i \dot{\mathbf{v}}_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{v}_i \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{v}_j \mathbf{F}_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i (m_i \dot{\mathbf{v}}_i - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_{ji}). \tag{6.2}$$

Nun ist aber

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ji}, \tag{6.3}$$

woraus

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_{ji} = \sum_{j=n+1}^{N} \mathbf{F}_{ji} =: \mathbf{F}_i^\mathrm{a} \tag{6.4}$$

folgt. $\mathbf{F}_i^\mathrm{a}$ ist die äußere Kraft, die von den übrigen Massenpunkten auf die Masse $m_i$ ausgeübt wird. Es gilt also

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{T}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_i^\mathrm{a}. \tag{6.5}$$

Die Änderung der Energie des Teilsystems pro Zeit heißt Leistung. Die Änderung $\Delta E_\mathrm{T} = E_\mathrm{T}(t_1) - E_\mathrm{T}(t_0)$ ist die am Teilsystem in der Zeit von $t_0$ bis $t_1$ geleistete Arbeit.

Zerlegt man ein System in zwei Teilsysteme, so ist die Summe der Energien der Teilsysteme nicht die Gesamtenergie; vielmehr kommt noch die Wechselwirkungsenergie zwischen beiden Systemen hinzu,

$$E = E_{\mathrm{T}_1} + E_{\mathrm{T}_2} + E_\mathrm{WW}, \quad E_\mathrm{WW} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n+1}^{N} \mathcal{V}_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j). \tag{6.6}$$

## 6.b Impuls und Drehimpuls eines Teilsystems

Der Impuls des Teilsystems ist

$$\mathbf{P}_\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i. \tag{6.7}$$

Seine zeitliche Änderung ergibt sich zu

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_\mathrm{T}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ji} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_{ji}}_{\mathbf{F}_{ij}+\mathbf{F}_{ji}=\mathbf{0}} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{N} \mathbf{F}_{ji} \tag{6.8}$$

Die inneren Kräfte heben sich gegenseitig auf,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_\mathrm{T}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^\mathrm{a}. \tag{6.9}$$

Die Änderung des Impulses ist durch die Summe der äußeren Kräfte gegeben. Der Drehimpuls des Teilsystems ist gegeben durch

$$\mathbf{L}_\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i. \tag{6.10}$$

Seine zeitliche Änderung ist gegeben durch

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_\mathrm{T}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ji}}_{\mathbf{0}\text{ wie für abgeschlossenes System}} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i^\mathrm{a}. \tag{6.11}$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist gegeben durch die Summe der äußeren Drehmomente.

## 6.c Einheiten

Die Basiseinheiten sind

| | SI | cgs |
|---|---|---|
| Länge | m | cm |
| Masse | kg | g |
| Zeit | s | s |

Zusammengesetzte Einheiten mit besonderen Namen sind

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Kraft | Newton | $N = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}$ | | $\mathrm{dyn} = \frac{\mathrm{g\,cm}}{\mathrm{s}^2}$ |
| Energie | Joule | $J = \frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}^2}$ | | $\mathrm{erg} = \frac{\mathrm{g\,cm}^2}{\mathrm{s}^2}$ |
| Leistung | Watt | $\mathrm{W} = \frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}^3}$ | | |
| Druck | Pascal | $\mathrm{Pa} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\,s}^2}$ | | |
| Beschleunigung | | | Galilei | $\mathrm{gal} = \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}$ |

# 7 Eine Masse sehr groß gegen alle anderen

## 7.a Bewegungsgleichungen

In vielen Fällen ist eine Masse($m_N$) sehr groß gegen alle anderen (z.B. Erde gegen Satellit, Rakete, Pendel, Elementarteilchen etc. oder Sonne gegen Planeten oder Atomkerne gegen Elektronen)

$$m_i \ll m_N, i = 1, ...N-1. \tag{7.1}$$

In diesem Fall verwendet man gerne den Schwerpunkt der großen Masse als Ursprung des Bezugssystems. Man hat dann genau genommen kein Inertialsystem mehr, aber die Beschleunigung, die die große Masse durch die kleinen erfährt, ist häufig vernachlässigbar klein.[3] Für das Zweikörperproblem ($N = 2$) werden wir später eine exakte Behandlung geben.

Wir führen Relativ-Koordinaten zur schweren Masse ein

$$\mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_N, \qquad i = 1, ...N-1, \tag{7.2}$$

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}'_i = m_i \ddot{\mathbf{x}}_i - m_i \ddot{\mathbf{x}}_N = \mathbf{F}_i - \frac{m_i}{m_N} \mathbf{F}_N. \tag{7.3}$$

Mit $m_i \ll m_N$ vernachlässigt man den zweiten Term

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}'_i \approx \mathbf{F}_i. \tag{7.4}$$

Wegen

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ...\mathbf{x}_N) = \mathcal{V}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_N, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_N, ..., \mathbf{0}) = \mathcal{V}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, ...\mathbf{0}) \tag{7.5}$$

gibt es auch hier eine potentielle Energie und es folgt

$$\mathbf{F}_i = -\mathrm{grad}\,_i \mathcal{V} = -\mathrm{grad}\,'_i \mathcal{V}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, ...\mathbf{0}). \tag{7.6}$$

Für Zweikörperkräfte folgt

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{F}_{ji}(\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j) + \mathbf{F}_{Ni}(\mathbf{x}'_i). \tag{7.7}$$

Die erste Summe beschreibt die Kräfte zwischen den $N-1$ leichten Massen, der letzte Term die äußere Kraft der schweren Masse.

## 7.b Erhaltungssätze

Gelten noch die Erhaltungssätze für das System der Massen $m_1$, ... $m_{N-1}$ ausgedrückt durch die Relativkoordinaten? Wir beginnen mit der Betrachtung der

[3]Es gibt Fälle, in denen dies nicht zutrifft. Umkreisen zwei leichte Massen $m_1$ und $m_2$ eine schwere, so ist die Gravitations-Kraft zwischen den beiden leichten Körpern von der gleichen Größenordnung wie der Unterschied der Gravitationskraft zwischen schwerer und zweiter Masse, der sich durch die Auslenkung der schweren Masse durch die erste Masse ergibt, wenn alle drei Körper ungefähr gleich weit voneinander entfernt sind.

**Energie** Für diese schreiben wir nun

$$E = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{x}}_i'^2 + \mathcal{V}(\mathbf{x}_1', ...\mathbf{x}_{N-1}', \mathbf{0}). \tag{7.8}$$

Hieraus folgt

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \sum_i \dot{\mathbf{x}}_i'(m_i \ddot{\mathbf{x}}_i' + \mathrm{grad}_i' \mathcal{V}) = 0. \tag{7.9}$$

Der Ausdruck in der Klammer verschwindet wegen der Bewegungsgleichung. Damit haben wir weiterhin Energie-Erhaltung.

**Impuls** Für den Impuls erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{p}_i'\right) = \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{F}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{F}_{ji}}_{\mathbf{0}} + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{F}_{Ni}. \tag{7.10}$$

Der Impuls ist <u>nicht</u> erhalten. Der Grund liegt darin, dass bei exakter Behandlung $\mathbf{v}_N = O(1/m_N)$ und daher $\mathbf{p}_N = O(m_N^0)$ nicht vernachlässigbar ist.

**Drehimpuls** Für den Drehimpuls erhalten wir schließlich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{x}_i' \times \mathbf{p}_i'\right) = \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{x}_i' \times \mathbf{F}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{x}_i' \times \mathbf{F}_{ji}}_{\mathbf{0}} + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{x}_i' \times \mathbf{F}_{Ni}. \tag{7.11}$$

Die zweite Summe verschwindet ebenfalls, da es sich um Zentralkräfte zwischen Ursprung und $\mathbf{x}_i'$ handelt. Der Drehimpuls ist also erhalten. Dies gilt nur, da wir die schwere Masse in den Ursprung gelegt haben. Wir bemerken, dass die Homogenität der Zeit (Zeitunabhängigkeit des Potentials) und die Isotropie des Raumes erfüllt ist (System invariant gegen Drehung um schwere Masse). Daher sind Energie und Drehimpuls erhalten. Hingegen ist die Homogenität des Raumes nicht gegeben, da bei einer Verschiebung auch die schwere Masse verschoben werden müsste. Der Impuls ist also nicht erhalten.

Anders ist die Situation, wenn der Schwerpunkt der schweren Masse sehr weit entfernt ist (Erdmittelpunkt von Erdoberfläche). Dann legt man den Schwerpunkt auch nicht mehr in den Ursprung, sondern weit in Richtung der negativen $z$-Achse. Welche Erhaltungssätze sind dann erfüllt? Man untersuche komponentenweise.

## 7.c Freier Fall

### 7.c.$\alpha$ Ohne Reibung

Wir betrachten zunächst den freien Fall ohne Reibung und gehen aus von den Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = -mg \tag{7.12}$$

mit der Erdbeschleunigung $g$. Wir haben hier $x$, $y$, $z$ statt $x_1$, $x_2$, $x_3$ geschrieben. Die Lösung ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= \int_0^t \ddot{z}(t')\mathrm{d}t' + \dot{z}(0) = -gt + v_z(0), && (7.13)\\
z(t) &= \int_0^t \dot{z}(t')\mathrm{d}t' + z(0) = -\frac{g}{2}t^2 + v_z(0)t + z(0), && (7.14)\\
x(t) &= v_x(0)t + x(0), && (7.15)\\
y(t) &= v_y(0)t + y(0). && (7.16)
\end{aligned}$$

### 7.c.$\beta$ Mit Reibung

Wir fügen nun eine Reibungskraft hinzu, die proportional zur Geschwindigkeit ist und gehen aus von der Bewegungsgleichung für die $z$-Komponente

$$m\ddot{z} = -mg - k\dot{z} \text{ mit den Anfangsbedingungen } \dot{z}(0) = 0, \quad z(0) = 0. \qquad (7.17)$$

Auf Grund der Reibung nimmt die Masse eine asymptotische Geschwindigkeit $\dot{z}(\infty)$ an, die durch $\ddot{z}(\infty) = 0$ gegeben ist. Wir finden $\dot{z}(\infty) = -mg/k$. Für $v = \dot{z}$ haben wir die inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\begin{aligned}
\dot{v} &= -g - \frac{k}{m}v, && (7.18)\\
\underbrace{\dot{v} + \frac{k}{m}v}_{\text{linear}} &= \underbrace{-g}_{\text{Inhomogenität}} \quad . && (7.19)
\end{aligned}$$

Die zugehörige lineare homogene Gleichung

$$\dot{v}_0(t) + \frac{k}{m}v_0(t) = 0 \qquad (7.20)$$

hat konstante Koeffizienten. Die Lösung wird daher durch eine Exponentialfunktion gegeben. Mit $v_0 = \mathrm{e}^{\lambda t}$ folgt

$$(\lambda + \frac{k}{m})\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \to \lambda = -\frac{k}{m}. \qquad (7.21)$$

Damit ist die homogene Gleichung gelöst. Zur Lösung der inhomogenen Gleichung setzt man zweckmäßiger Weise $v(t) = v_0(t)f(t)$ mit einer unbekannten Funktion $f$ an. Dann erhält man

$$v(t) = v_0(t)f(t) = \mathrm{e}^{-kt/m}f(t), \quad \dot{v}(t) = (-\frac{k}{m}f(t) + \dot{f}(t))\mathrm{e}^{-kt/m} \qquad (7.22)$$

und eingesetzt in die Bewegungsgleichung

$$\dot{f}(t)\mathrm{e}^{-kt/m} = -g, \quad f = -\frac{gm}{k}\mathrm{e}^{kt/m} + c, \quad v = -\frac{gm}{k} + c\mathrm{e}^{-kt/m} \qquad (7.23)$$

MIt der Anfangsbedingung $v(0) = 0$ erhält man für die Integrationskonstante

$$c = \frac{gm}{k} \text{ und } v(t) = \frac{gm}{k}(\mathrm{e}^{-kt/m} - 1). \tag{7.24}$$

Die weitere zeitliche Aufintegration ergibt schließlich die Lösung

$$z(t) = \int_0^t \mathrm{d}t' v(t') = \frac{gm^2}{k^2}(1 - \mathrm{e}^{-kt/m}) - \frac{gm}{k}t. \tag{7.25}$$

In der Tat fällt nach langer Zeit die Masse mit der Geschwindigkeit $-gm/k$.

# 8 Masse im zähen Medium, Green's Funktion

## 8.a Green's Funktion

Wir beschreiben die Bewegung eines Massenpunktes unter Einwirkung einer Reibungskraft, die proportional zur Geschwindigkeit der Masse ist, und einer zeitabhängigen äußeren Kraft $F(t)$ durch

$$m\dot{v}(t) = -kv(t) + F(t). \tag{8.1}$$

Dies ist eine lineare Gleichung in $v$ und $F$. Daher hängt $v$ linear von $F$ ab. Aus $F(t) = \alpha_1 F_1(t) + \alpha_2 F_2(t)$ und den Lösungen von $m\dot{v}_{1,2} = -kv_{1,2} + F_{1,2}$ folgt die Lösung

$$v(t) = v_{\mathrm{hom}}(t) + \alpha_1 v_1(t) + \alpha_2 v_2(t). \tag{8.2}$$

Die Geschwindigkeit $v$ hängt linear von den Kräften ab. Aus dieser Linearität in $F$ kann man allgemein schließen, dass die Lösung in der Form

$$v(t) = v_{\mathrm{hom}}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,t')F(t')\mathrm{d}t' \tag{8.3}$$

geschrieben werden kann. Man bezeichnet $G(t,t')$ als Green's-Funktion. Sie gibt an, wie die Geschwindigkeit zur Zeit $t$ von der Kraft zur Zeit $t'$ abhängt.

Allgemeiner gibt die Greensche Funktion $G$ die Abhängigkeit einer Größe von einer anderen ursächlichen an (z.B. auch elektrisches Feld von Ladung, magnetisches Feld von Strömen, etc.).

Wir berechnen nun $G$. Wir gehen aus von der Lösung der homogenen Gleichung,

$$m\dot{v}_{\mathrm{hom}}(t) = -kv_{\mathrm{hom}}(t), \tag{8.4}$$

die wir schon aus dem letzten Abschnitt kennen

$$v_{\mathrm{hom}}(t) = v_0 \mathrm{e}^{-kt/m}. \tag{8.5}$$

Um die Lösung der inhomogenen Gleichungen zu erhalten, setzen wir die Lösung wieder als Produkt der homogenen Lösung und einer unbekannten Funktion $f(t)$ an

$$v(t) = f(t)\mathrm{e}^{-kt/m}. \tag{8.6}$$

Dann folgt

$$m(-\frac{k}{m}v + \mathrm{e}^{-kt/m}\dot{f}) = -kv + F(t). \tag{8.7}$$

Die beiden Terme $-kv$ heben sich weg und es bleibt

$$\dot{f}(t) = \frac{1}{m}\mathrm{e}^{kt/m}F(t) \tag{8.8}$$

mit der Lösung

$$f(t) = \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' \mathrm{e}^{kt'/m}F(t') + c, \tag{8.9}$$

woraus schließlich

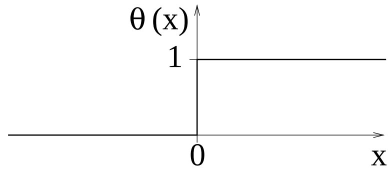
$$v(t) = c\mathrm{e}^{-kt/m} + \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' \mathrm{e}^{-k(t-t')/m} F(t') \tag{8.10}$$

folgt. Die Green's Funktion hat also die Form

$$G_{\mathrm{ret}}(t,t') = \frac{1}{m}\theta(t-t')\mathrm{e}^{-k(t-t')/m}. \tag{8.11}$$

Sie fällt exponentiell ab. Dabei ist $\theta(x)$ die Heavisidesche Stufenfunktion

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ \frac{1}{2} & x = 0, \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{8.12}$$




Gleichung (8.11) beschreibt die retardierte, d.h. kausale Lösung, da $v(t)$ nur von den Kräften $F(t')$ zu Zeiten $t' < t$, das heißt zu früherer Zeit abhängt.

Es gibt auch eine avancierte (akausale) Lösung mit

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{1}{m}\int_{t}^{\infty} \mathrm{d}t' \mathrm{e}^{kt'/m} F(t') + c', && (8.13) \\ G_{\mathrm{av}}(t,t') &= -\frac{1}{m}\theta(t'-t)\mathrm{e}^{-k(t-t')/m}. && (8.14) \end{aligned}$$

Sie wächst exponentiell mit der Zeitdifferenz $t' - t$ an. Es sind auch gemischte Lösungen möglich, z.B. $G = \frac{1}{2}(G_{\mathrm{ret}} + G_{\mathrm{av}})$. Man überzeuge sich davon, dass sich diese Lösungen nur um homogene Lösungen von einander unterscheiden.

## 8.b Kraftstoß und $\delta$-"Funktion"

Definition: Ein Kraftstoß $p$ zur Zeit $t_0$ füge einer Masse zu diesem Zeitpunkt den Impuls $p$ zu. Dies ist eine Idealisierung mit den Bedingungen an die Kraft

$$F(t) = 0 \text{ für } |t - t_0| > \epsilon, \qquad \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} F(t')\mathrm{d}t' = p, \tag{8.15}$$

wobei $\epsilon$ positiv und infinitesimal sei. Für $\epsilon \to 0$ können wir schreiben

$$\int_{-\infty}^{t} F(t')\mathrm{d}t' = p\theta(t-t_0), \tag{8.16}$$

sodass wir formal auch

$$F(t) = p \text{ “}\frac{\mathrm{d}\theta(t-t_0)}{\mathrm{d}t}\text{”} \tag{8.17}$$

schreiben. Diese Ableitung der Stufenfunktion $\theta$, die eigentlich nicht existiert, wurde von Dirac eingeführt und heißt $\delta$-Funktion oder besser $\delta$-Distribution. Anschaulich ist es eine Funktion die nur beim Argument 0 verschieden von 0 ist, dort aber so groß, dass das Integral über die Funktion 1 ergibt. Sie wird in der Regel als Limes eingeführt

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \to +0} \frac{1}{\epsilon} f\left(\frac{t}{\epsilon}\right), \tag{8.18}$$

wobei $f$ für große (positive und negative) Argumente rasch auf Null abfällt (besser noch für Argument $> 1$ verschwindet) und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau f(\tau) = 1 \quad \to \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \frac{1}{\epsilon} f\left(\frac{t}{\epsilon}\right) = 1. \tag{8.19}$$

Es handelt sich hierbei um eine Erweiterung des Funktions-Begriffs.

### 8.b.$\alpha$ Integral über $\delta$-Funktion

Wir gehen aus von

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t)\theta(t-t_0)) = \dot{u}(t)\theta(t-t_0) + u(t)\delta(t-t_0) \tag{8.20}$$

und integrieren diese Funktion über die Zeit

$$u(t)\theta(t-t_0)|_{-\infty}^{t} = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' \dot{u}(t')\theta(t'-t_0) + \int_{-\infty}^{t} u(t')\delta(t'-t_0)\mathrm{d}t'. \tag{8.21}$$

Das erste Integral auf der rechten Seite ergibt nur einen Beitrag, wenn $t > t_0$, daher enthält es einen Faktor $\theta(t-t_0)$. Wenn aber $t > t_0$, dann bleibt natürlich das Integral von $t_0$ bis $t$, also

$$\theta(t-t_0)\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \dot{u}(t') = \theta(t-t_0)(u(t)-u(t_0)) \tag{8.22}$$

Setzen wir das in die Gleichung darüber ein, so erhalten wir

$$\theta(t-t_0)u(t_0) = \int_{-\infty}^{t} u(t')\delta(t'-t_0)\mathrm{d}t'. \tag{8.23}$$

Generell gilt

$$\int_{t_1}^{t_2} u(t')\delta(t'-t_0)\mathrm{d}t' = (\theta(t_2-t_0)-\theta(t_1-t_0))u(t_0). \tag{8.24}$$

Das Integral ergibt also $u(t_0)$, wenn $t_0$ im Intervall von $t_1$ bis $t_2$ liegt.

### 8.b.$\beta$ Kraftstoß

Wir kommen zurück auf den Kraftstoß. Für diesen haben wir

$$F(t) = p\delta(t-t_0). \tag{8.25}$$

Eingesetzt in unsere allgemeine Formel erhalten wir

$$\begin{aligned} v(t) &= v_{\text{hom}}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' G(t,t') F(t') \\ &= v_{\text{hom}}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' G(t,t') p\delta(t-t_0) \\ &= v_{\text{hom}}(t) + pG(t,t_0) \\ &= v_{\text{hom}}(t) + \frac{p}{m}\theta(t-t_0)\mathrm{e}^{-k(t-t_0)/m}. \end{aligned} \tag{8.26}$$

Auf Grund des Kraftstoßes nimmt die Geschwindigkeit zur Zeit $t = t_0$ diskontinuierlich um $p/m$ zu.

### 8.b.$\gamma$ Gleichung für die Green's-Funktion

Welcher Gleichung genügt die Green's-Funktion? Mathematisch beschreibt die Green's-Funktion das Folgende: Zu lösen ist die lineare Differentialgleichung $Lv = F$ mit dem Operator $L = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + k$. Die Lösung wird gegeben durch $v = v_{\text{hom}} + GF$. Eingesetzt in die Gleichung finden wir $Lv_{\text{hom}} + LGF = F$. Dies wird gelöst durch $Lv_{\text{hom}} = 0$ und $LG = \mathbb{1}$. $G$ ist also das Inverse von $L$. Dies wird auf Gleichung (8.29) führen.

Wir setzen (8.3) in die Bewegungsgleichung ein, wobei wir $v_{\text{hom}}$ gleich weglassen, da es sich ohnehin wegkürzt,

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' G(t,t')F(t') + k\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' G(t,t')F(t') = F(t). \tag{8.27}$$

Wir drücken nun das $F(t)$ auf der rechten Seite ebenfalls als ein Integral über $t'$ aus

$$F(t) = \int_{\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \delta(t-t')F(t'). \tag{8.28}$$

Da $F(t')$ beliebig gewählt werden kann, müssen die Integranden übereinstimmen,

$$m\frac{\partial G(t,t')}{\partial t} + kG(t,t') = \delta(t-t'). \tag{8.29}$$

Für $t \neq t'$ ist dies wieder die homogene Gleichung mit der Lösung

$$G(t,t') = \left\{ \begin{array}{c} a(t')\mathrm{e}^{-kt/m} \\ b(t')\mathrm{e}^{-kt/m} \end{array} \right\}_{t<t'}^{t>t'} = b(t')\mathrm{e}^{-kt/m} + (a-b)\theta(t-t')\mathrm{e}^{-kt/m} \tag{8.30}$$

Setzen wir das in die Gleichung (8.29) ein, so folgt

$$m\frac{\partial G}{\partial t} + kG = m(-\frac{k}{m}G + (a-b)\delta(t-t')\mathrm{e}^{-kt/m}) + kG = \delta(t-t'). \tag{8.31}$$

Daraus folgt dann $a - b = \frac{1}{m}\mathrm{e}^{kt'/m}$, also

$$G(t,t') = b(t')\mathrm{e}^{-kt/m} + \frac{1}{m}\mathrm{e}^{-k(t-t')/m}\theta(t-t'). \tag{8.32}$$

Der erste Term stellt eine homogene Lösung dar. Daher kann $b(t')$ nur durch Randbedingungen festgelegt werden. Verlangen wir Kausalität, so muss $G(t, t') = 0$ für $t' > t$ gelten, woraus $b(t') = 0$ folgt. Diese Randbedingung ergibt dann die retardierte Green's-Funktion (8.11).

# 9 Harmonischer Oszillator

## 9.a Gedämpfter harmonischer Oszillator

Eine Masse $m$ in einem harmonischen Potential $\mathcal{V} = \frac{f}{2}x^2$ genügt mit einer Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + fx = 0. \tag{9.1}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Mit dem Exponentialansatz

$$x = \mathrm{e}^{\lambda t}, \quad \dot{x} = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}, \quad \ddot{x} = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t} \tag{9.2}$$

erhält man

$$(m\lambda^2 + k\lambda + f)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \tag{9.3}$$

Diese wird offensichtlich durch

$$m\lambda^2 + k\lambda + f = 0 \tag{9.4}$$

gelöst. Man bezeichnet diese Gleichung als charakteristische Gleichung. Ihre Lösungen sind

$$\lambda = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{f}{m}} \tag{9.5}$$

Hier sind nun mehrere Fälle zu unterscheiden:

### 9.a.$\alpha$ Periodischer Fall

Falls $k^2 < 4fm$, erhält man mit

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \mathrm{i}\omega, \quad \gamma = \frac{k}{2m}, \quad \omega = \sqrt{\frac{f}{m} - \frac{k^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{f}{m}} \tag{9.6}$$

die Lösung

$$x(t) = \frac{1}{2}A_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \frac{1}{2}A_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\gamma t}(A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + A_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}). \tag{9.7}$$

$A_1$ und $A_2$ sind komplexe Zahlen. $x(t)$ soll reell sein. Daher muss

$$A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + A_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = (A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + A_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})^* = A_2^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + A_1^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{9.8}$$

Man muss also $A_2 = A_1^*$ wählen. Drücken wir die komplexe Amplitude durch Betrag $a$ und Phase $\phi$ aus, $A_1 = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, ($a$ positiv und $\phi$ reell), so haben wir schließlich

$$x(t) = a\mathrm{e}^{-\gamma t}cos(\omega t + \phi). \tag{9.9}$$

### 9.a.$\beta$ Aperiodischer Grenzfall

Im Grenzfall $k^2 = 4fm$ wird die oben eingeführte Frequenz $\omega = 0$. Damit sind dann beide Lösungen entartet. Es gibt dann jedoch eine zweite unabhängige Lösung, die sich durch einen Faktor $t$ unterscheidet.

$$x(t) = (a + bt)\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad \lambda = -\frac{k}{2m}. \tag{9.10}$$

### 9.a.$\gamma$ Aperiodischer Fall

Falls $k^2 > 4fm$ werden beide Eigenwerte $\lambda_1$ und $\lambda_2$ reell und negativ,

$$x(t) = A_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + A_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}. \tag{9.11}$$

## 9.b Erzwungene Schwingungen

Wir setzen nun den harmonischen Oszillator einer zusätzlichen äußeren Kraft $F(t)$ aus,

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + fx = F(t). \tag{9.12}$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung. Die homogene Gleichung hat spezielle Lösungen $x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}$, $x_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$. Wir machen den Ansatz

$$x(t) = x_1(t)u_1(t) + x_2(t)u_2(t). \tag{9.13}$$

Warum erscheint dieser Ansatz sinnvoll? Man erhält die allgemeine Lösung durch Addition der homogenen Lösung zu einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Addition der homogenen Lösung zur speziellen entspricht der Addition von Konstanten zu $u_1$ und $u_2$. Daher genügen (bei geschickter Rechnung) $u_1$ und $u_2$ Differentialgleichungen, die nur Ableitungen von $u_1$ und $u_2$ enthalten, so dass diese Konstanten als Integrationskonstanten in den Lösungen von $u_1$ und $u_2$ erscheinen. Wir müssen nun die Ableitungen von $x(t)$ berechnen

$$\dot{x} = \dot{x}_1 u_1 + x_1\dot{u}_1 + \dot{x}_2 u_2 + x_2\dot{u}_2. \tag{9.14}$$

Bevor wir die zweite Ableitung berechnen, stellen wir fest, dass wir bezüglich der Wahl von $u_1$ und $u_2$ einen Wunsch frei haben. Schließlich hätten wir ja auch $x(t) = x_1(t)u_1(t)$ ansetzen können ohne überhaupt ein $u_2$ zu verwenden. Hierfür würde es auch eine Lösung $u_1(t)$ geben. Da wir aber jetzt zwei Funktionen $u_1$ und $u_2$ haben, können wir an diese eine Forderung stellen. Wir wollen möglichst einfache Differentialgleichungen für $u_1$ und $u_2$ haben, also zweite Ableitungen von $u_1$ und $u_2$ vermeiden. Dies gelingt uns durch die Forderung

$$x_1\dot{u}_1 + x_2\dot{u}_2 = 0. \tag{9.15}$$

Damit bleibt dann

$$\dot{x} = \dot{x}_1 u_1 + \dot{x}_2 u_2 \tag{9.16}$$

und

$$\ddot{x} = \ddot{x}_1 u_1 + \dot{x}_1 \dot{u}_1 + \ddot{x}_2 u_2 + \dot{x}_2 \dot{u}_2. \tag{9.17}$$

Wir setzen nun (9.13), (9.16) und (9.17) in die Bewegungsgleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} &\underbrace{(m\ddot{x}_1 + k\dot{x}_1 + f x_1)}_{=0} u_1 + \underbrace{(m\ddot{x}_2 + k\dot{x}_2 + f x_2)}_{=0} u_2 \\ &\qquad + m\dot{x}_1\dot{u}_1 + m\dot{x}_2\dot{u}_2 = F(t). \end{aligned} \tag{9.18}$$

Die ersten beiden Klammern verschwinden, da es sich um die Lösungen der homogenen Bewegungsgleichungen handelt. Damit stellen (9.15) und (9.18) zwei lineare Gleichungen für $\dot{u}_1$ und $\dot{u}_2$ dar, aus denen

$$\dot{u}_1 = \frac{e^{-\lambda_1 t} F(t)}{m(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad \dot{u}_2 = \frac{e^{-\lambda_2 t} F(t)}{m(\lambda_2 - \lambda_1)} \tag{9.19}$$

folgt mit

$$u_1(t) = \frac{1}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda_1 t'} F(t') dt' + c_1 \tag{9.20}$$

(analog für $u_2$) und

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, t') F(t') + x_{\text{hom}}(t) \tag{9.21}$$

mit der Green's-Funktion

$$G(t, t') = \frac{\theta(t - t')}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \left( e^{\lambda_1 (t - t')} - e^{\lambda_2 (t - t')} \right). \tag{9.22}$$

(Man beachte, dass der Realteil von $\lambda$ negativ ist) Die Green's-Funktion, die hier die Kraft mit der Auslenkung verknüpft, hängt nur von $t - t'$ ab: Homogenität der Zeit.

**Beispiel: Periodische Kraft** Es sei

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t + \alpha) = F_0 \Re e^{i(\Omega t + \alpha)}. \tag{9.23}$$

Dann erhalten wir die Auslenkung

$$\begin{aligned} x(t) &= F_0 \Re \int_{-\infty}^{t} dt' \frac{1}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \left( e^{\lambda_1 (t - t')} - e^{\lambda_2 (t - t')} \right) e^{i(\Omega t' + \alpha)} \\ &= F_0 \Re e^{i(\Omega t + \alpha)} \frac{1}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \left( \frac{1}{-\lambda_1 + i\Omega} - \frac{1}{-\lambda_2 + i\Omega} \right) \\ &= F_0 \Re \frac{e^{i(\Omega t + \alpha)}}{\underbrace{m(\lambda_1 - i\Omega)(\lambda_2 - i\Omega)}_{\text{Resonanznenner}}} = F_0 \Re \frac{e^{i(\Omega t + \alpha)}}{\underbrace{-m\Omega^2 + ik\Omega + f}_{\text{Resonanznenner}}}. \end{aligned} \tag{9.24}$$