10 Anharmonischer Oszillator II: Störungsrechnung

Häufig lassen sich Probleme der theoretischen Physik nicht exakt lösen. Wenn zu erwarten ist, dass die Lösung nicht weit entfernt von der eines exakt lösbaren Problems liegt, geht man von diesem aus und fügt störungstheoretische Korrekturen hinzu, das heißt, man entwickelt im Sinne einer Taylor-Reihe um die exakte Lösung.

10.a Symmetrisches Potential

Ein symmetrisches Potential, das heißt ein Potential, für das $\mathcal{V}(-\mathbf{x}) = \mathcal{V}(\mathbf{x})$ gilt, bezeichnet man als ein Potential, das die Parität erhält. In einer Dimension heißt das, dass die Funktion $\mathcal{V}(x)$ eine gerade Funktion ist. Für das Potential

$$\mathcal{V}(x) = \frac{f}{2}x^2 + \frac{g}{4}x^4, \quad \lambda = \frac{g}{f}a^2 \tag{10.1}$$

haben wir in Gleichung (3.36)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{f}{m}}(1 + \frac{3}{8}\lambda + O(\lambda^2)) \tag{10.2}$$

gefunden. Wir wollen hier direkt die Bewegungsgleichung lösen und setzen

$$\omega = \sqrt{\frac{f}{m}}(1 + c\lambda + O(\lambda^2)) \tag{10.3}$$

mit noch unbekanntem Koeffizienten c an. In die Bewegungsgleichung setzen wir

$$x = a\cos(\omega t) + \lambda x_1(t) + O(\lambda^2) \tag{10.4}$$

ein und erhalten

$$-ma\omega^2\cos(\omega t) + m\lambda\ddot{x}_1(t) = -fa\cos(\omega t) - f\lambda x_1(t) - f\lambda a\cos^3(\omega t) + O(\lambda^2). \tag{10.5}$$

Setzen wir im ersten Term $\omega^2 = \frac{f}{m}(1+2c\lambda+O(\lambda^2))$ ein, so heben sich für $\lambda = 0$ alle Beiträge auf. In Ordnung λ bleibt

$$-2fac\cos(\omega t) + m\ddot{x}_1(t) = -fx_1(t) - fa\cos^3(\omega t). \tag{10.6}$$

Diese Bewegungsgleichung für $x_1(t)$ ist die gleiche wie die für einen harmonischen Oszillator (ohne Reibung) mit äußerer Kraft[4]

$$F(t) = fa(2c\cos(\omega t) - \cos^3(\omega t)) = fa((2c - \frac{3}{4})\cos(\omega t) - \frac{1}{4}\cos(3\omega t)). \tag{10.7}$$

[4]Wir verwenden $\cos^3(\omega t) = \frac{1}{4}\cos(3\omega t) + \frac{3}{4}\cos(\omega t)$

Wir finden

$$x_1(t) = (c - \frac{3}{8}) a\omega t \sin(\omega t) + \frac{a}{32}\cos(3\omega t) + x_{1,\mathrm{hom}}(t). \tag{10.8}$$

Die Amplitude des ersten Terms wächst proportional zur Zeit t an. Das liegt daran, dass wir noch die richtige Frequenz wählen müssen. Dies geschieht dadurch, dass wir den Vorfaktor dieses Terms gleich 0 wählen, das heißt $c = \frac{3}{8}$.

10.b Unsymmetrisches Potential

Ist das Potential nicht symmetrisch wie etwa bei

$$\mathcal{V}(x) = \frac{m}{2}\omega^2(x^2 + \alpha x^3), \tag{10.9}$$

so wird die Berechnung mühsamer, da für die Umkehrpunkte nicht mehr $x_{\mathrm{min}} = -x_{\mathrm{max}}$ gilt. Für eine Energie $E = \frac{m}{2}\omega^2 a^2$ zerlegen wir

$$E - \mathcal{V}(x) = \frac{m}{2}\omega^2(x_{\mathrm{max}} - x)(x - x_{\mathrm{min}})(1 + h(x)) \tag{10.10}$$

Wir setzen

$$x_{\mathrm{max}} = a + \delta_1; \quad x_{\mathrm{min}} = -a - \delta_2, \quad h(x) = \alpha x + \delta_3, \tag{10.11}$$

wobei wir die δ_i in Potenzreihen nach α entwickeln. Hierzu können wir zum Beispiel in den Gleichungen (10.10, 10.11) der Reihe nach $x = a$, $x = -a$ und $x = 0$ setzen und erhalten dann

$$\delta_1 = -\frac{\alpha a^3}{(2a + \delta_2)(1 + \delta_3 + \alpha a)}, \tag{10.12}$$

$$\delta_2 = \frac{\alpha a^3}{(2a + \delta_1)(1 + \delta_3 - \alpha a)}, \tag{10.13}$$

$$\delta_3 = -\frac{a(\delta_1 + \delta_2) + \delta_1\delta_2}{(a + \delta_1)(a + \delta_2)}. \tag{10.14}$$

Diese Gleichungen lassen sich nach Potenzen von α iterieren. Da alle δs für $\alpha = 0$ verschwinden, erhält man sofort

$$\delta_1 = -\frac{a^2}{2}\alpha + O(\alpha^2), \quad \delta_2 = \frac{a^2}{\alpha} + O(\alpha^2) \tag{10.15}$$

und damit auch $\delta_3 = O(\alpha^2)$. Nun beginnt man wieder mit den Gleichungen für δ_1 und δ_2, erhält die Beiträge in $O(\alpha^2)$ und anschließend δ_3 in dieser Ordnung. So kann man fortfahren und erhält beispielsweise mit Mathematica oder Maple

$$x_{\mathrm{max}} = k_1 + k_2, \tag{10.16}$$

$$x_{\mathrm{min}} = k_1 - k_2, \tag{10.17}$$

$$k_1 = -\frac{1}{2}a^2\alpha - a^4\alpha^3 + O(\alpha^5), \tag{10.18}$$

$$k_2 = a + \frac{5}{8}a^3\alpha^2 + \frac{231}{128}a^5\alpha^4 + O(\alpha^6), \tag{10.19}$$

$$\delta_3 = -a^2\alpha^2 - 2a^4\alpha^4. \tag{10.20}$$

Setzen wir nun $x = k_1 + k_2\xi$, so folgt

$$\begin{aligned} E - \mathcal{V} &= \frac{m}{2}\omega^2 k_2^2 (1-\xi^2)(1+h), & (10.21) \\ h &= \alpha(k_1 + k_2\xi) + \delta_3 \\ &= -\frac{3}{2}a^2\alpha^2 - 3a^4\alpha^4 + \xi(a\alpha + \frac{5}{8}a^3\alpha^3) + O(\alpha^5). & (10.22) \end{aligned}$$

und damit die Schwingungsdauer

$$T = 2\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{\mathrm{d}x\sqrt{\frac{m}{2}}}{\sqrt{E - \mathcal{V}(x)}} = \frac{2}{\omega}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1+h)}} \qquad (10.23)$$

Entwickeln wir noch $1/\sqrt{1+h}$ nach Potenzen von α und integrieren, so erhalten wir

$$T = \frac{2\pi}{\omega}(1 + \frac{15}{16}a^2\alpha^2 + \frac{3465}{10024}a^4\alpha^4 + O(\alpha^6)). \qquad (10.24)$$

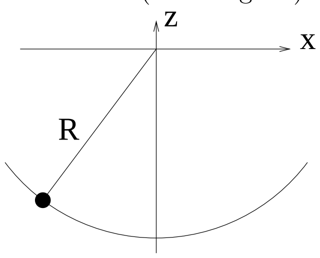
Wir erkennen, dass der eigentliche Entwicklungsparameter $a\alpha$ ist.

B Lagrange Gleichungen

11 Zwangskräfte und d'Alembertsches Prinzip

11.a Zwangsbedingungen

Bisher hatte jeder Massenpunkt drei Freiheitsgrade der Bewegung. Es gibt jedoch Systeme, in denen die Zahl der Freiheitsgrade eingeschränkt ist. Beispiel: Ein Pendel (Stablänge R).



Bei den Zwangsbedingungen unterscheidet man

Holonome Zwangsbedingungen Diese haben die Form

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ...\mathbf{x}_N, t) = 0. \tag{11.1}$$

Dabei sei f differenzierbar. Für unser Pendel lautet diese dann $x^2+y^2+z^2-R^2 = 0$, wenn Masse und Aufhängungspunkt durch einen Stab verbunden sind und $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \leq 0$, wenn es sich um ein Fadenpendel handelt. Ist weiterhin nur eine Pendelbewegung in der $x - z$-Ebene möglich, so kommt die zweite holonome Bedingung $y = 0$ hinzu.

Nichtholonome Zwangsbedingungen Als Beispiel betrachten wir ein Auto in der Ebene (und lassen die z-Koordinate weg). Wir können seine Lage durch drei Lagekoordinaten beschreiben: Durch die zwei Schwerpunktskoordinaten und durch die Richtung des Kühlers. Doch gibt es nur zwei Freiheitsgrade der infinitesimalen Bewegung: Das Auto kann sich nur in Richtung (oder Gegenrichtung) des Kühlers bewegen und die Richtung des Kühlers kann mit dem Lenkrad verändert werden. Der dritte Freiheitsgrad kann wegen der Haftung auf der Straße nicht in Anspruch genommen werden: Man kann eben zum Einparken nicht einfach zur Seite fahren. Diese nicht-holonomen Bedingungen können nur in differentieller Form angegeben werden,

$$\sum_i \mathbf{a}_i(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_N, t)\mathrm{d}\mathbf{x}_i = a_0(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_N, t)\mathrm{d}t, \tag{11.2}$$

aber nicht in die Form (11.1) aufintegriert werden.

Skleronome Zwangsbedingungen Unter diesen versteht man zeitunabhängige Zwangsbedingungen (z.B. fester Aufhängepunkt des Pendels).

Rheonome Zwangsbedingeungen Dies sind zeitabhängige Zwangsbedingungen (z.B. der Aufhängepunkt des Pendels oszilliert).

11.b Zwangskräfte, d'Alembertsches Prinzip

Die Zwangsbedingungen werden dadurch eingehalten, dass neben den bekannten Kräften $\mathbf{F}$ noch Zwangskräfte $\mathbf{Z}$ wirken. Bei einem Fadenpendel haben wir beispielsweise neben der Schwerkraft $\mathbf{F}$ noch eine Zwangskraft $\mathbf{Z}$ wirken, die durch den Faden übertragen wird und in Richtung des Fadens gerichtet ist.

Wir führen nun den Begriff der virtuellen Verrückung ein. Hierunter versteht man die Verrückungen $\delta\mathbf{x}$, die mit den Zwangsbedingungen zur festen Zeit t in Übereinstimmung sind, unabhängig von der tatsächlichen Bewegung des Systems. Wir betrachten mehrere Beispiele:

Pendel Im Falle des Stab-Pendels sind dies die Verrückungen $\delta\mathbf{x}$ senkrecht zur Orientierung des Stabs. Daher gilt $\mathbf{Z}\cdot\delta\mathbf{x} = 0$. Dies gilt auch für das Fadenpendel, dessen Faden nicht gespannt ist.

Reibungsloses Gleiten Die Führungskräfte stehen senkrecht zur virtuellen Verrückung, daher gilt $\mathbf{Z}\cdot\delta\mathbf{x} = 0$.

Rollen auf rauher Oberfläche Der Berührungspunkt kann sich nicht bewegen. Für ihn gilt $\delta\mathbf{x} = \mathbf{0}$, daher gilt auch hier $\mathbf{Z}\cdot\delta\mathbf{x} = 0$.

Berührung zweier Körper mit rauher Oberfläche Für diese gilt $\delta\mathbf{x}_1 = \delta\mathbf{x}_2$, $\mathbf{Z}_1 = -\mathbf{Z}_2$ und damit $\mathbf{Z}_1\cdot\delta\mathbf{x}_1 + \mathbf{Z}_2\cdot\delta\mathbf{x}_2 = 0$.

Zwei Massen, die durch einen starren Stab miteinander verbunden sind Für diese gilt

$$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2 = \text{const}, \quad (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)(\delta\mathbf{x}_1 - \delta\mathbf{x}_2) = 0,$$
$$\mathbf{Z}_1 = -\mathbf{Z}_2 \parallel \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \rightarrow \mathbf{Z}_1(\delta\mathbf{x}_1 - \delta\mathbf{x}_2) = 0 \rightarrow \mathbf{Z}_1\cdot\delta\mathbf{x}_1 + \mathbf{Z}_2\cdot\delta\mathbf{x}_2 = 0. \quad (11.3)$$

d'Alembert führte daher das Prinzip der virtuellen Verrückungen ein: Für alle virtuellen Verrückungen gilt

$$\sum_i \mathbf{Z}_i\cdot\delta\mathbf{x}_i = 0. \quad (11.4)$$

Leisten die Zwangskräfte Arbeit am System?

$$\dot{E} = \dot{\mathcal{T}} + \dot{\mathcal{V}} = \sum_i(\mathbf{v}_i\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{v}_i\mathbf{F}_i) = \sum_i \mathbf{v}_i\mathbf{Z}_i, \quad (11.5)$$

da $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{Z}_i$. Daher erhalten wir

$$\dot{E}\mathrm{d}t = \mathrm{d}E = \sum_i \mathbf{Z}_i\mathbf{v}_i\mathrm{d}t = \sum_i \mathbf{Z}_i\mathrm{d}\mathbf{x}_i. \quad (11.6)$$

Für skleronome Bedingungen gehören die tatsächlichen Verrückungen zu den virtuellen. In diesem Fall ist $\dot{E} = 0$. Die Zwangskräfte leisten dann keine

Arbeit am System. Für rheonome Bedingungen ist $\mathrm{d}\mathbf{x}_i \neq \delta\mathbf{x}_i$. Dann gilt keine Energieerhaltung.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen in der Form

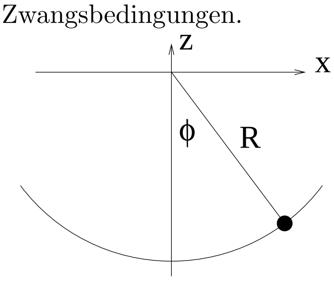
$$\sum_i (\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i)\delta\mathbf{x}_i = 0 \tag{11.7}$$

heißt d'Alembertsches Prinzip. In ihm treten die Zwangskräfte nicht mehr auf. Dies ist eine Verallgemeinerung der Newtonschen Bewegungsgleichungen $\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ auf Systeme mit Zwangsbedingungen.

Die Gültigkeit dieses Prinzips wurde hier nicht bewiesen; es hängt von der mikroskopischen Natur der Zwangsbedingungen ab. Sie lassen sich in gewissen Grenzfällen (Berücksichtigung der Zwangskräfte durch harmonische Kräfte im Grenzfall Kraftkonstante $\to \infty$) herleiten. Dann gibt die Schiene etc. nur wenig nach und erzeugt die Zwangskraft. Ist die Frequenz des Oszillators groß gegen die Frequenz des interessierenden Systrems, so entkoppeln die Systeme in guter Näherung. Dies gilt nicht, wenn die Frequenz des eingeschränkten Systems gleich dem des zwangsausübenden Systems ist: Schlagen von Wellen (kritische Frequenz).

12 Lagrange-Gleichungen für holonome Systeme

Wir beschreiben die zulässigen Konfigurationen durch verallgemeinerte Lagekoordinaten q_1, ... q_m. Dabei ist $m = 3N-$Zahl der Zwangsbedingungen.



Beispiel: Ebenes Pendel
1. Zwangsbedingung: Es schwingt in der Ebene,
2. Zwangsbedingung: Der Abstand der Masse vom Aufhängepunkt sei R.
Wir haben damit $m = 1$ verallgemeinerte Lagekoordinaten, z.B. $q_1 = \phi$.

Allgemein sei

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(q_1, ...q_m, t). \tag{12.1}$$

Die virtuellen Verrückungen sind dann gegeben durch

$$\delta\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}\delta q_j. \tag{12.2}$$

Aus dem d'Alembertschen Prinzip folgt dann

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i)\delta\mathbf{x}_i = 0 = \sum_{ij}(\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i)\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}\delta q_j. \tag{12.3}$$

Da die qs unabhängig von einander variiert (verrückt) werden, folgt

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i)\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, ...m \tag{12.4}$$

für die m Lagekoordinaten. Diese Bewegungsgleichungen wollen wir nun umformen. Wir bezeichnen

$$Q_j := \sum_i \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \tag{12.5}$$

als verallgemeinerte (generalisierte Kraft). Falls die Kräfte aus einem Potential $\mathcal{V}$ herleitbar sind, folgt

$$Q_j = -\sum_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}\mathrm{grad}_i\mathcal{V} = -\frac{\partial}{\partial q_j}\mathcal{V}(\mathbf{x}_1(q_1, ...q_m, t), ..., t). \tag{12.6}$$

Wir fassen im Folgenden $\mathcal{V}$ als Funktion der q_i und t auf. Es folgt aus der Bewegungsgleichung

$$Q_j = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} = \sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} = \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i \dot{\mathbf{x}}_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}) - \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}\right). \tag{12.7}$$

Nun ist

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}, \tag{12.8}$$

woraus

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \tag{12.9}$$

mit $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(q,t)$ und $\dot{\mathbf{x}}_i = \dot{\mathbf{x}}_i(q,\dot{q},t)$ folgt. Damit erhalten wir dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}\right) = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_k \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial q_j}. \tag{12.10}$$

Damit erhalten wir für die generalisierte Kraft

$$Q_j = \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i \dot{\mathbf{x}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_j}. \tag{12.11}$$

und hieraus die Bewegungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial(\mathcal{T} - \mathcal{V})}{\partial q_j}. \tag{12.12}$$

Da $\mathcal{V}$ nicht von $\dot{q}_j$ abhängt, folgen die Lagrange-Gleichungen zweiter Art

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \tag{12.13}$$

mit

$$\mathcal{L}(q_1, ..., q_m, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_m, t) = \mathcal{T} - \mathcal{V}. \tag{12.14}$$

Diese Lagrange-Gleichungen 2. Art wie auch das Hamiltonsche Prinzip, mit dem wir uns später befassen, sind fundamental für die Theoretische Physik. Sie wurden im Laufe der Zeit auch auf Felder, zum Beispiel das elektromagnetische Feld verallgemeinert.

Ein Vorteil dieser Formulierung liegt darin, dass sie unabhängig von der Wahl der Koordinaten ist. Man bezeichnet die q_j, $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_j$ und $\partial\mathcal{L}/\partial q_j$ als generalisierte Lagekoordinaten, gen. Impulse und gen. Kräfte. Sie gelten natürlich auch für Systeme ohne Zwangsbedingungen. Setzt man für die q_j die Koordinaten $x_{i\alpha}$ ein, so folgt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{i\alpha}} = m\dot{x}_{i\alpha} = p_{i\alpha}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{i\alpha}} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_{i\alpha}} = F_{i\alpha}. \tag{12.15}$$

12.a Mathematisches Pendel

(skleronom)

Als verallgemeinerte Koordinate verwenden wir den Winkel ϕ. Wir erhalten dann mit $\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\phi$ und $|v| = R|\dot{\phi}|$

$$\mathcal{T} = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}R^2\dot{\phi}^2, \quad \mathcal{V} = -mgR\cos\phi \tag{12.16}$$

die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} = \frac{m}{2} R^2 \dot{\phi}^2 + mgR\cos\phi. \tag{12.17}$$

Wir haben hier einen Freiheitsgrad $q_1 = \phi$ und die Lagrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \tag{12.18}$$

ergibt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mR^2\dot{\phi}) = -mgR\sin\phi, \quad mR^2\ddot{\phi} = -mgR\sin\phi. \tag{12.19}$$

Für kleine Ausschläge kann man $\sin\phi \approx \phi$ ersetzen und erhält die harmonische Näherung

$$mR^2\ddot{\phi} = -mgR\phi \tag{12.20}$$

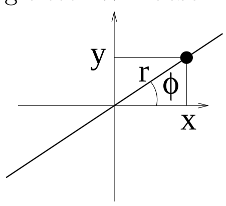
mit der Lösung

$$\phi = \phi_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad \omega^2 = \frac{g}{R}. \tag{12.21}$$

12.b Gleitende Perle auf rotierendem Stab

(rheonom)

Wir betrachten eine Perle, die auf einem (in einer Ebene) rotierenden Stab gleitet. Wir beschreiben ihren Ort durch Polarkoordinaten r und ϕ



$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi. \tag{12.22}$$

Für die Geschwindigkeit erhalten wir

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi, \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi \tag{12.23}$$

und die kinetische Energie

$$\mathcal{T} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi)^2 + \frac{m}{2}(\dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi)^2 = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2). \tag{12.24}$$

Wir lassen nun den Stab mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω in einer horizontalen Ebene rotieren, $\mathcal{V} = 0$. Dann erhalten wir

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2). \tag{12.25}$$

Wir haben einen Freiheitsgrad $q_1 = r$ und erhalten mit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m\omega^2 r \tag{12.26}$$

aus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \tag{12.27}$$

die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{r} = m\omega^2 r \tag{12.28}$$

mit der Lösung

$$r = a\mathrm{e}^{\omega t} + b\mathrm{e}^{-\omega t}, \tag{12.29}$$

wobei a und b Integrationskonstanten sind. In diesem System ist die Energie im herkömmlichen Sinn nicht erhalten. Interpretiert man allerdings $-\frac{m}{2}\omega^2 r^2$ als Zentrifugalpotential, so hat man wieder Energieerhaltung.

13 Ladungen im (homogenen) elektrischen und magnetischen Feld

13.a Coulomb-Lorentz-Kraft

In diesem Abschnitt betrachten wir die Bewegung einer Masse mit Ladung e in einem elektrischen und magnetischen Feld. Dabei wirkt die Kraft

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}) \tag{13.1}$$

auf die Ladung. c ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Wir verwenden hier nicht das SI-System, sondern das Gaußsche Masssystem. Dort wird die Ladung so dimensioniert, dass die potentielle Energie zwischen zwei Ladungen e_1 und e_2

$$\mathcal{V} = \frac{e_1 e_2}{r} \tag{13.2}$$

geschrieben werden kann. In diesem Einheitensystem ergibt sich die Elementarladung zu

$$e = 4.80 \cdot 10^{-10} \frac{\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{cm}^{3/2}}{\mathrm{s}}. \tag{13.3}$$

Die Einheit des elektrischen Felds ist dann

$$1 \frac{\mathrm{g}^{1/2}}{\mathrm{cm}^{1/2}\mathrm{s}} = 1 \frac{\mathrm{statvolt}}{\mathrm{cm}} \equiv 3 \cdot 10^4 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \tag{13.4}$$

und die der magnetischen Induktion

$$1 \frac{\mathrm{g}^{1/2}}{\mathrm{cm}^{1/2}\mathrm{s}} = 1 \mathrm{Gauss} \equiv 10^{-4} \mathrm{T} \tag{13.5}$$

mit den Abkürzungen V für Volt und T für Tesla.

13.b Lagrange-Funktion

Wir werden nun die zugehörige Lagrange-Funktion aufstellen und schreiben

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}_{\mathrm{el}} + \mathcal{L}_{\mathrm{mag}}, \quad \mathcal{V}_{\mathrm{el}} = e\Phi(\mathbf{x}) \tag{13.6}$$

mit dem elektrostatischen Potential $\mathcal{V}_{\mathrm{el}}$, das für ein homogenes Feld $\mathcal{V}_{\mathrm{el}} = -e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{x})$ lautet.

Die Frage ist nun, kann man die Lorentz-Kraft in der Lagrange-Funktion unterbringen? Welche Form muss $\mathcal{L}_{\mathrm{mag}}$ haben? Falls es solch ein $\mathcal{L}_{\mathrm{mag}}$ gibt, muss es der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{v} + \mathrm{grad}_{\mathbf{v}} \mathcal{L}_{\mathrm{mag}}) = e\mathbf{E} + \mathrm{grad}_{\mathbf{x}} \mathcal{L}_{\mathrm{mag}} \tag{13.7}$$

und damit

$$m\dot{\mathbf{v}} - e\mathbf{E} = \mathrm{grad}_{\mathbf{x}} \mathcal{L}_{\mathrm{mag}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{grad}_{\mathbf{v}} \mathcal{L}_{\mathrm{mag}} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{13.8}$$

genügen. $\mathcal{L}_{\text{mag}}$ muss von $\mathbf{v}$ abhängen, da die Lorentz-Kraft geschwindigkeitsabhängig ist. Wir versuchen einen Ansatz linear in $\mathbf{v}$,

$$\mathcal{L}_{\text{mag}} = \frac{e}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{x},t), \tag{13.9}$$

da dann sowohl $\text{grad}_{\mathbf{x}}\mathcal{L}_{\text{mag}}$ wie auch $\frac{\text{d}}{\text{d}t}\text{grad}_{\mathbf{v}}\mathcal{L}_{\text{mag}}$ lineare Beiträge in $\mathbf{v}$ liefern. Dann finden wir

$$\begin{aligned}
(\text{grad}_{\mathbf{x}}\mathcal{L}_{\text{mag}} - \frac{\text{d}}{\text{d}t}\text{grad}_{\mathbf{v}}\mathcal{L}_{\text{mag}})_\alpha &= \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{mag}}}{\partial x_\alpha} - \frac{\text{d}}{\text{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{mag}}}{\partial v_\alpha} \\
&= \frac{e}{c}\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x_\alpha} - \dot{A}_\alpha\right) \\
&= \frac{e}{c}\left(v_\beta\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} - v_\beta\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}\right) - \frac{e}{c}\frac{\partial A_\alpha}{\partial t}
\end{aligned} \tag{13.10}$$

Für die erste Komponente erhalten wir (wobei wir im Moment $\partial\mathbf{A}/\partial t = 0$ setzen),

$$(\mathbf{v}\times\mathbf{B})_1 = v_2B_3 - v_3B_2 = v_2\underbrace{(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2})}_{(\text{rot}\,\mathbf{A})_3} + v_3\underbrace{(\frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_3})}_{-(\text{rot}\,\mathbf{A})_2}. \tag{13.11}$$

Tatsächlich lässt sich die magnetische Induktion stets in der Form

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \text{rot}\,\mathbf{A}(\mathbf{x},t) \tag{13.12}$$

schreiben, da auf Grund der Maxwell-Gleichungen $\text{div}\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \partial\mathbf{B}_\alpha/\partial\mathbf{x}_\alpha = 0$ gilt. $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ heißt Vektorpotential. Falls Φ und $\mathbf{A}$ zeitabhängig sind, folgt

$$m\dot{\mathbf{v}} = -e\text{grad}\,\Phi(\mathbf{x},t) + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\text{rot}\,\mathbf{A}(\mathbf{x},t) - \frac{e}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} \tag{13.13}$$

mit

$$\mathbf{B} = \text{rot}\,\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\text{grad}\,\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}. \tag{13.14}$$

Der letzte Beitrag zu $\mathbf{E}$ rührt von der Induktion her (elektrisches Induktionsfeld bei Veränderung des magnetischen Felds). Genaueres in der Elektrodynamik.

13.c Homogene Felder

Für ein homogenes elektrisches Feld $\mathbf{E}$ gilt

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{x}. \tag{13.15}$$

Für eine homogene magnetische Induktion setzen wir $\mathbf{A}$ linear in $\mathbf{x}$ an. Aus

$$A_\alpha = c_{\alpha\beta}x_\beta \tag{13.16}$$

folgt

$$B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = c_{32} - c_{23}, \quad B_2 = c_{13} - c_{31}, \quad B_3 = c_{21} - c_{12}. \tag{13.17}$$

Die Lösung für die Matrix c ist nicht eindeutig. (Dies ist die Eichinvarianz in der Elektrodynamik). Wir wählen hier die Lösung

$$c_{32} = -c_{23} = \frac{1}{2}B_1, \quad c_{13} = -c_{31} = \frac{1}{2}B_2, \quad c_{21} = -c_{12} = \frac{1}{2}B_3,$$
$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = 0. \tag{13.18}$$

Mit dieser Wahl kann man

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{x} \tag{13.19}$$

schreiben und wir erhalten

$$\mathcal{L}_{\text{mag}} = \frac{e}{2c}\mathbf{v} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{x}) = \frac{e}{2c}\mathbf{B} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{v}). \tag{13.20}$$

Die gesamte Lagrange-Funktion lautet dann

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - e\Phi(\mathbf{x}) + \frac{e}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{x}) + \frac{e}{2c}\mathbf{v} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{x}). \tag{13.21}$$

Der verallgemeinerte Impuls ist dann gegeben durch

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\alpha} = m\dot{x}_\alpha + \frac{e}{2c}(\mathbf{B} \times \mathbf{x})_\alpha. \tag{13.22}$$

Dieser 'kanonische' Impuls ist verschieden vom mechanischen Impuls. Wir betrachten noch einmal die Bewegungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\alpha}, \tag{13.23}$$

die

$$m\ddot{x}_\alpha + \frac{e}{2c}(\mathbf{B} \times \dot{\mathbf{x}})_\alpha = eE_\alpha + \frac{e}{2c}(\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B})_\alpha \tag{13.24}$$

und damit, wie gewünscht

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{13.25}$$

ergibt. Die Lorentz-Kraft lässt sich daher durch die Lagrange-Funktion beschreiben.

13.d Lösung der Bewegungsgleichungen

Wir wählen die Achsen unseres Koordinatensystems so, dass $\mathbf{B}$ in z-Richtung und $\mathbf{E}$ in der $y-z$-Ebene liegen. Dann lauten die Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x} = \frac{e}{c}B\dot{y}, \tag{13.26}$$
$$m\ddot{y} = eE_y - \frac{e}{c}B\dot{x}, \tag{13.27}$$
$$m\ddot{z} = eE_z. \tag{13.28}$$

Aus der letzten Bewegungsgleichung folgt

$$z = \frac{eE_z}{2m}t^2 + v_{z0}t + z_0. \tag{13.29}$$

Die beiden anderen lassen sich zusammenfassen zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x} + \mathrm{i}\dot{y}) = -\underbrace{\frac{Be}{mc}}_{\text{Larmorfrequenz}\,\omega}\mathrm{i}(\dot{x} + \mathrm{i}\dot{y}) + \mathrm{i}\frac{e}{m}E_y \tag{13.30}$$

Mit $\xi := \dot{x} + \mathrm{i}\dot{y}$ folgt

$$\dot{\xi} = -\mathrm{i}\omega\xi + \frac{\mathrm{i}e}{m}E_y. \tag{13.31}$$

Diese Gleichung ist ähnlich der Gleichung, die wir beim freien Fall mit Reibung erhielten ($\dot{v} = -\frac{k}{m}v - g$). Entsprechend erhalten wir die Lösung

$$\xi = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \underbrace{\frac{eE_y}{m\omega}}_{\frac{cE_y}{B}}. \tag{13.32}$$

Drücken wir A durch den Betrag a und die Phase ϕ aus, $A = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, und zerlegen in Real- und Imaginärteil, so folgt

$$\dot{x} = \Re\xi = a\cos(\omega t - \phi) + \frac{cE_y}{B}, \quad \dot{y} = \Im\xi = -a\sin(\omega t - \phi). \tag{13.33}$$

Dabei ist $\frac{cE_y}{B}$ die Driftgeschwindigkeit der Masse. Die Rechnung gilt nur, solange alle Geschwindigkeiten klein sind gegen die Lichtgeschwindigkeit. Die Driftgeschwindigkeit ist bei beliebiger Orientierung von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ gegeben durch $c\mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$. Sie erfolgt also senkrecht zum elektrischen Feld.