26 Beschleunigtes Bezugssystem

26.a Bezugssystem bewegt sich parallel zum Inertialsystem

Das Bezugssystem ($\mathbf{x}'$) bewege sich parallel zum Inertialsystem ($\mathbf{x}$) und sei gegen dieses um $\mathbf{a}(t)$ verschoben,

$$\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}'_i(t) + \mathbf{a}(t). \tag{26.1}$$

Im Inertialsystem gilt

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{F}_i \tag{26.2}$$

und damit

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}'_i(t) = \mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{a}}_i(t) \tag{26.3}$$

Diese letztere Kraft ist eine Trägheitskraft, die man zum Beispiel in einem beschleunigten Fahrzeug oder Fahrstuhl verspürt.

Fällt ein System von Massen frei in einem homogenen Gravitationsfeld, so kann man innerhalb des Systems die Wirkung der Gravitationskraft nicht feststellen. Das System wird als ganzes mit der Schwerebeschleunigung beschleunigt. (Beispiele: Astronauten in Raumstationen, Erde im Schwerefeld der Sonne, Sonnensystem in Milchstraße). Die Kraft setzt sich aus der Gravitationskraft $m_i\mathbf{g}$ und anderen Kräften $\mathbf{F}_i^0$ zusammen,

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^0 + m_i \mathbf{g}. \tag{26.4}$$

Andererseits gilt für das beschleunigte Bezugssystem

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}'_i + \mathbf{a} \text{ mit } \ddot{\mathbf{a}} = \mathbf{g}, \tag{26.5}$$

woraus

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}'_i = \mathbf{F}_i^0. \tag{26.6}$$

folgt. Dagegen beobachtet man die Inhomogenitäten des Gravitationsfeldes. Dies erklärt Ebbe und Flut.

26.b Rotierendes Bezugssystem

Wir betrachten ein Bezugssystem, das um den Ursprung mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ rotiert. Im vorhergehenden Abschnitt hatten wir gefunden, dass sich Für dieses gilt, dass sich die zeitliche Änderung im ruhenden und im rotierenden System unterscheidet durch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times . \tag{26.7}$$

Dabei bezieht sich die Ableitung $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ auf das Inertialsystem und die Ableitung $\mathrm{d}'/\mathrm{d}t$ auf das rotierende System. Wir sehen diesen Zusammenhang am Ortsvektor

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathrm{d}'\mathbf{x}_i}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_i. \tag{26.8}$$

Er gilt aber genauso für andere Vektoren. Berechnen wir nun die Beschleunigung durch erneutes Differenzieren, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}_i &= \left(\frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\right)\frac{\mathrm{d}'\mathbf{x}_i}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\right)\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x}_i \\ &= \frac{\mathrm{d}'^2\mathbf{x}_i}{\mathrm{d}t^2}+\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}'\mathbf{x}_i}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{x}_i+\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}'\mathbf{x}_i}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x}_i)\end{aligned}\tag{26.9}$$

Damit erhalten wir die Bewegungsgleichung

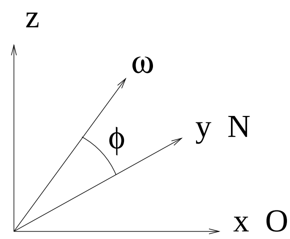
$$m_i\frac{\mathrm{d}'^2\mathbf{x}_i}{\mathrm{d}t^2}=\mathbf{F}_i+\underbrace{2m_i\frac{\mathrm{d}'\mathbf{x}_i}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{\omega}}_{\text{Coriolis}-\text{Kraft}}+\underbrace{m_i(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x}_i)\times\boldsymbol{\omega}}_{\text{Zentrifugal}-\text{Kraft}}+m_i\mathbf{x}_i\times\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}.\tag{26.10}$$

Es treten also zur Kraft $\mathbf{F}_i$, die bereits im nicht rotierenden System auftritt, noch weitere Kräfte hinzu: die Coriolis-Kraft, die geschwindigkeitsabhängig ist, die Zentrifugalkraft, die wir auch $m_i\omega^2\mathbf{x}_{i\perp}$ schreiben könen, wobei $\mathbf{x}_{i\perp}$ der Anteil von $\mathbf{x}_i$ senkrecht zur Rotationsrichtung ist.

Das Auftreten der Coriolis-Kraft kann man am Foucault-Pendel beobachten. Unter der Wirkung der Erddrehung rotiert die Pendelebene. Dies wird zum Beispiel am Foucault-Pendel im KIP (Kirchhoff-Institut für Physik) demonstriert.

Ein weiteres Beispiel sind die Passat-Winde. Diese entstehen durch die Aufheizung des Bodens unter der senkrechten Einstrahlung der Sonne. Dadurch wird die Luft darüber stark erhitzt und steigt nach oben. Von Norden und Süden strömt Luft nach. Diese Winde werden durch die Coriolis-Kraft nach Osten abgelenkt. Dadurch kommt es zum Nordost- und Südost-Passat. Ähnlich ist es mit den Winden, die in ein Tiefdruckgebiet wehen. Sie werden auf der Nordhalbkugel nach rechts abgelenkt, so dass sie das Tiefdruckgebiet gegen den Uhrzeigersinn umkreisen.

Ostablenkung beim freien Fall Wir betrachten die Ostablenkung beim freien Fall eines Körpers auf Grund der Coriolis-Kraft durch die Erdrotation. Wir lassen nun die Striche für das rotierende Bezugssystem weg. Die Koordinaten legen wir so, dass x nach Osten, y nach Norden und z nach oben weist. Die geographische Breite sei ϕ. Die Winkelgeschwindigkeit der Erde ist $\boldsymbol{\omega}=\omega(0,\cos\phi,\sin\phi)=\omega\mathbf{e}_\omega$.



Die Winkelgeschwindigkeit ist klein. Wir entwickeln daher nach Potenzen von ω

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\omega\mathbf{x}_1+O(\omega^2).\tag{26.11}$$

Die Bewegungsgleichung lautet im rotierenden System

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}_0}{\mathrm{d}t^2}+m\omega\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}_1}{\mathrm{d}t^2}=-mg\mathbf{e}_z+2m\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_0}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{\omega}+O(\omega^2).\tag{26.12}$$

oder

$$m\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}_0}{\mathrm{d}t^2}+g\mathbf{e}_z\right)}_{0}+m\omega\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}_1}{\mathrm{d}t^2}-2\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_0}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{e}_\omega\right)}_{0}+O(\omega^2)=0. \tag{26.13}$$

Mit der Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0)=z(0)\mathbf{e}_z$ und $\dot{\mathbf{x}}=0$ folgt aus der ersten Gleichung

$$\mathbf{x}_0=(z(0)-\frac{g}{2}t^2)\mathbf{e}_z. \tag{26.14}$$

Die zweite Gleichung lautet

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}_1}{\mathrm{d}t^2}=2\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_0}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{e}_\omega=2(-gt)\mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_\omega=2gt\cos\phi\mathbf{e}_x. \tag{26.15}$$

Daraus folgt

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_1}{\mathrm{d}t}=gt^2\cos\phi\mathbf{e}_x,\quad \mathbf{x}_1=\frac{1}{3}gt^3\cos\phi\mathbf{e}_x, \tag{26.16}$$

also

$$\mathbf{x}=(z(0)-\frac{g}{2}t^2)\mathbf{e}_z+\underbrace{\frac{1}{3}\omega gt^3\cos\phi}_{\text{Ostabweichung}}\,\mathbf{e}_x+O(\omega^2). \tag{26.17}$$

27 Lagrange-Punkte, Trojaner und Hufeisenbahnen

Eine typische Anwendung für ein rotierendes Bezugssystem findet man bei der Bewegung von Massen, die sich mit einem Planeten um die Sonne oder mit einem Mond um einen Planeten bewegen.

Drei typische Fragen sind:
a) An welchen Punkten kann eine Masse mit den beiden vorgegebenen Massen mitrotieren ohne seine relative Lage zu diesen beiden Massen zu verändern? Diese Punkte werden als Lagrange-Punkte bezeichnet.
b) Wie verändert sich die potentielle Energie auf der Erdoberfläche durch Mond und Sonne? Dies führt zu den Gezeiten.
c) Wir erwähnten in Abschnitt (21), dass Janus und Epimetheus auf praktisch der gleichen Bahn um den Saturn laufen. Ähnlich bewegen sich auch Cruithne wie auch $2002\mathrm{AA}_{29}$ auf erdnahen Bahnen, die im System, das mit der Erde um die Sonne rotiert, die Gestalt von Hufeisenbahnen haben.

27.a Lagrange-Punkte

Wir betrachten zwei Massen m_1 und m_2, die umeinander im Abstand R mit Frequenz ω rotieren. Der Schwerpunkt liege dabei im Ursprung. Im mitrotierenden Koordinatensystem habe m_1 die Koordinaten $(x_1, 0)$ und m_2 die Koordinaten $(x_2, 0)$. Da Zentrifugalkraft und Gravitationskraft im Gleichgewicht sein müssen, folgt

$$m_1\omega^2 x_1 - \frac{\gamma m_1 m_2 (x_1 - x_2)}{R^3} = 0, \quad m_2\omega^2 x_2 - \frac{\gamma m_1 m_2 (x_2 - x_1)}{R^3} = 0 \qquad (27.1)$$

mit der Gravitationskonstanten γ. Es folgt

$$x_1 = \frac{-m_2}{m_1 + m_2} R, \quad x_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} R, \quad \omega^2 = \frac{\gamma(m_1 + m_2)}{R^3}. \qquad (27.2)$$

Wir fügen nun eine dritte Masse m, die klein ist gegen m_1 und m_2 ist, hinzu, so dass wir deren Einfluss auf die großen Massen vernachlässigen können. Mit raumfesten Koordinaten (ξ, η) und rotierenden Koordinaten (x, y) haben wir

$$\xi = x\cos\omega t + y\sin\omega t, \quad \eta = -x\sin\omega t + y\cos\omega t. \qquad (27.3)$$

Daraus erhält man die Geschwindigkeit und kinetische Energie

$$\begin{aligned}
\dot\xi &= (\dot x + \omega y)\cos\omega t + (\dot y - \omega x)\sin\omega t, && (27.4)\\
\dot\eta &= (\dot y - \omega x)\cos\omega t - (\dot x + \omega y)\sin\omega t, && (27.5)\\
\mathcal{T} &= \frac{m}{2}\left((\dot x + \omega y)^2 + (\dot y - \omega x)^2\right). && (27.6)
\end{aligned}$$

Die potentielle Energie ergibt sich zu

$$\mathcal{V} = -\frac{\gamma m m_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|} - \frac{\gamma m m_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|}. \qquad (27.7)$$

Zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen für die Masse m berechnen wir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x} - \omega y), \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = m\omega(\dot{y} + \omega x) - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \tag{27.8}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m(\dot{y} + \omega x), \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = m\omega(-\dot{x} + \omega y) - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}. \tag{27.9}$$

Daraus folgen die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} + \omega^2 x - \frac{\gamma m_1 (x - x_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} - \frac{\gamma m_2 (x - x_2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3}, \tag{27.10}$$

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x} + \omega^2 y - \frac{\gamma m_1 y}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} - \frac{\gamma m_2 y}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3}. \tag{27.11}$$

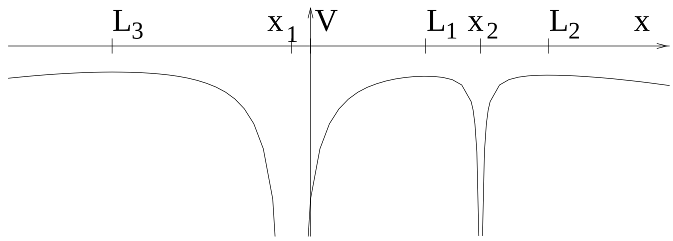
Lagrange untersuchte, an welchen Punkten die mitrotierende Masse m im Gleichgewicht ist. Hierzu muss man $\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ setzen. Es gibt dann zwei Arten von Lösungen. In einer Klasse liegen die drei Massen in einer Geraden, das heißt, man hat $y = 0$. Dann ist die zweite Gleichung erfüllt. Die erste Gleichung beinhaltet, dass Zentrifugalpotential plus Gravitationspotential

$$-\frac{m}{2}\omega^2 x^2 - \mathcal{V} = -\frac{m}{2}\omega^2 x^2 - \frac{\gamma m m_1}{|x - x_1|} - \frac{\gamma m m_2}{|x - x_2|} \tag{27.12}$$

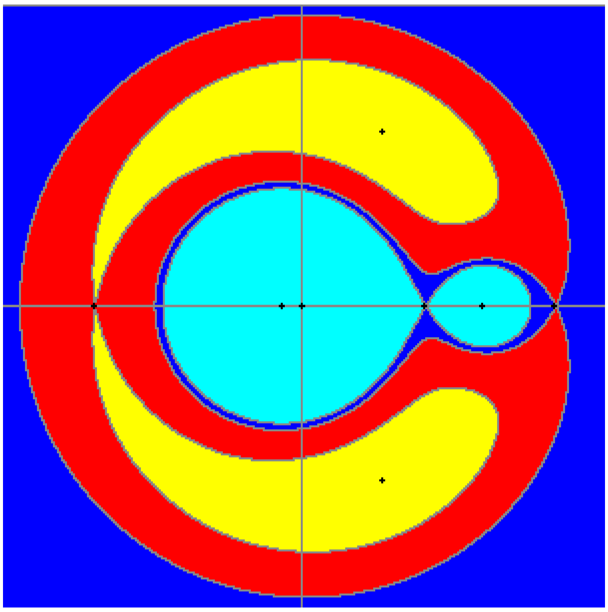
extremal werden.

Bei $x = x_1$ und $x = x_2$ geht das Potential gegen $-\infty$, das gleiche gilt, wenn x gegen $\pm\infty$ geht. Dazwischen liegen drei Extrema (Maxima), die als Lagrange-Punkte bezeichnet werden. Der Lagrange-Punkt zwischen den beiden Massen wird als L_1, der jenseits der leichteren Masse als L_2 und der jenseits der schweren Masse als L_3 bezeichnet. Eine genauere Untersuchung zeigt, dass diese Punkte instabil sind, d.h. eine kleine Auslenkung genügt und die Masse bewegt sich von diesem Punkt weg. Man kann sie trotzdem verwenden, um Raumsonden zu stationieren. Wegen der Instabilität muss man ab und zu die Bahn der Sonde etwas korrigieren. In L_1 ist SOHO (Solar and Heliospheric Observatory) stationiert. In L_2 ist WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) stationiert. In Science fiction-Romanen gibt es den Planeten X (Gegen-Erde) jenseits der Sonne in L_3, der von der Erde aus nicht sichtbar ist.

Wir geben jeweils für $m_1/m_2 = 9 : 1$ das Potential (27.12) längs der y-Achse an, sowie die Darstellung der Äquipotential-Linien dieses Potentials durch die Lagrange-Punkte. Das Potential ist maximal an den Punkten L_4 und L_5 im gelben (hellen) Bereich. Bei L_3 liegt ein Sattelpunkt des Potentials, der den gelben (hellen) vom roten (mittelgrauen) Bereich trennt. Bei L_2 liegt ein zweiter Sattelpunkt, der den roten (mittelgrauen) von den beiden dunkelblauen (dunkelgrauen) Bereichen trennt. Bei L_1 ist der Sattelpunkt, der den inneren dunkelblauen (dunkelgrauen) Bereich von den beiden hellblauen (hellgrauen) Bereichen um die beiden Massen trennt. Bei den beiden Massen sowie weit draußen ist das Potential am tiefsten.



Gravitations- und Zentrifugalpotential für $m_1/m_2 = 9:1$ mit Lagrange-Punkten



Äquipotentiallinien für das effektive Potential (27.12) zusammengesetzt aus Gravitations- und Zentrifugal-Potential und die dadurch eingeteilten Bereiche für $m_1/m_2 = 9$.

27.b Trojaner

Es gibt zwei weitere Gleichgewichtslagen für $y \neq 0$. Aus (27.10) und (27.11) erhalten wir

$$\omega^2 x - \frac{\gamma m_1 (x - x_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} - \frac{\gamma m_2 (x - x_2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3} = 0 \tag{27.13}$$

$$\omega^2 - \frac{\gamma m_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} - \frac{\gamma m_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3} = 0. \tag{27.14}$$

Multiplizieren wir (27.14) mit x und subtrahieren wir sie von (27.13), so bleibt

$$\frac{\gamma m_1 x_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} + \frac{\gamma m_2 x_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3} = 0. \tag{27.15}$$

Zusammen mit (27.2) finden wir, dass $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|$ gleich $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|$ ist und unter Verwendung von (27.14), dass

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_2| = R. \tag{27.16}$$

Die drei Massen bilden also ein gleichseitiges Dreieck, so dass man noch zwei weitere Lagrange-Punkte erhält,

$$(x_{4,5}, y_{4,5}) = \left(\frac{m_1 - m_2}{2(m_1 + m_2)} R, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} R \right). \tag{27.17}$$

Wenn das Massenverhältnis m_1/m_2 hinreichend groß ist, sind diese Lagrange-Punkte stabil. [6] Generell können die drei Körper nicht nur auf Kreisbahnen umeinander laufen, sondern auch Kepler-Ellipsen beschreiben, wobei sie stets ein gleichseitiges Dreieck bilden. Dabei ist es nicht nötig, dass eine Masse vernachlässigbar klein gegen die anderen beiden ist. [7]

An diesen Punkten können im Sonnen-Planeten-System wie auch im Planeten-Mond-System kleine Körper mitlaufen. Den vorauslaufenden Lagrange-Punkt bezeichnet man als L_4, den nachlaufenden als L_5. Der erste derartige Körper (Achilles) wurde 1906 von Max Wolf im Sonne-Jupiter-System in L_4 gefunden. Im Folgejahr wurden zwei weitere, Hector in L_4 und Patroclus in L_5 gefunden. Heute kennt man über 1000, die Jupiter voraus und etwa 600, die hinter Jupiter herlaufen. Es hat sich eingebürgert, diese nach den Helden von Troja zu bezeichnen, wobei die Namen inzwischen ausgegangen sind. Seither spricht man bei diesen Himmelskörpern auch von Trojanern und dies nicht nur bei Jupiter. Im Gegensatz zur großen Anzahl von Trojanern bei Jupiter hat man bisher keine beim Saturn gefunden. Bei Mars werden zwei Trojaner in L_4 und in vier in L_5 behauptet. Neptun hat einen. COBE (Cosmic Background Explorer) hat vor kurzem einen Staubring im L_5 der Erde gefunden, der allerdings auf Grund des Lichtdrucks der Sonne verschoben ist.

In Planeten-Mond-Systemen sind keine Trojaner beim Jupiter bekannt, dagegen läuft dem Saturn-Mond Tethys (1060 km Durchmesser) der Mond Telesto (24 km Durchmesser) um 60^0 voraus und Calypso (19 km Durchmesser) um 60^0 hinterher. Dem Mond Dione (1120 km Durchmesser) läuft Helene (35 km Durchmesser) voraus. Im Erde-Mond-System wurden von Kordylewski in L_4 und L_5 Staubwolken gefunden. Solcher Staub kann allerdings auch Felsbrocken von $5m$ Durchmesser enthalten.

[6] Für allgemeine Massen m, m_1 und m_2 findet man die drei Schwingungsfrequenzen

$$\omega_1 = \omega_0, \quad \omega_{2,3} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{27 M_2}{M^2}} \right)} \omega_0 \tag{27.18}$$

mit $M_2 = m_0 m_1 + m_0 m_2 + m_1 m_2$, $M = m_0 + m_1 + m_2$. Dabei ist ω_0 die Umlauf-Frequenz der drei Körper. Man erkennt, dass $\omega_{2,3}$ nur reell sind, wenn $M_2 < M^2/27$.

[7] In diesem Fall lautet die Bewegungsgleichung für die Seitenlänge r des gleichseitigen Dreiecks

$$\ddot{r} = \frac{l^2 M^2}{r^3 M_2^2} - \frac{\gamma M}{r^2}. \tag{27.19}$$

27.c Janus und Epimetheus

Wie bereits im Zusammenhang mit dem Virialsatz bemerkt, umlaufen Janus und Epimetheus den Saturn auf fast gleichen Bahnen und tauschen, sobald sich einer dem anderen nähert, etwas Energie aus, so dass der raschere einholende gebremst und auf eine höhere Bahn gehoben wird und der langsamere vorauseilende beschleunigt und gleichzeitig auf eine niedrigere Bahn gebracht wird. Da dies der Intuition zuwiderläuft, wollen wir diesen Energieaustausch hier quantitativ betrachten. Dabei stellt sich heraus, dass aus der anziehenden Gravitationswechselwirkung effektiv eine dreimal so starke abstoßende wird.

Wir betrachten zunächst eine kleine Masse (Mond) m im Schwerefeld einer großen Masse (Saturn) m_0 am Ursprung. Im System, das mit der Frequenz ω rotiert, erhalten wir unter Berücksichtigung von Coriolis-Kraft und Zentrifugalkraft die Bewegungsgleichung (mit Koordinaten $\bar{x}$ und y)

$$\ddot{\bar{x}} = 2\omega\dot{y} + \omega^2\bar{x} - \frac{\gamma m_0 \bar{x}}{r^3}, \quad \ddot{y} = -2\omega\dot{\bar{x}} + \omega^2 y - \frac{\gamma m_0 y}{r^3} \tag{27.20}$$

mit dem Abstand $r = \sqrt{\bar{x}^2 + y^2}$. Wir nehmen nun an, dass sich die Masse in der Nähe von $(\bar{x}, y) = (R + x, y)$ mit kleinem x und y bewegt. Dabei sei $x = 0$, $y = 0$ eine stationäre Lösung. Daraus folgt

$$\omega^2 R - \frac{\gamma m_0}{R^2} = 0, \tag{27.21}$$

also $\gamma/R^3 = \omega^2/m_0$. Entwickeln wir in der Bewegungsgleichung bis zur ersten Ordnung in x und y, so folgt

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} + 3\omega^2 x, \quad \ddot{y} = -2\omega\dot{x}. \tag{27.22}$$

Dieses homogene Gleichungs-System hat die zwei linear unabhängigen Lösungen

$$x = x_0, \quad y = -\frac{3}{2}\omega x_0 t + y_0 \text{ und } x = a\cos(\omega t + \phi_0), \quad y = -2a\sin(\omega t + \phi_0). \tag{27.23}$$

Die erste Lösung entspricht einem Verhalten, bei dem die Masse m einen etwas abweichenden Abstand (x_0) vom Planeten hat und sich daher mit einer etwas anderen Geschwindigkeit bewegt, also für positives x_0 (größerer Abstand) gegen das rotierende System zurückbleibt. Die zweite Lösung beschreibt eine etwas exzentrische Bahn. Dadurch variiert der Abstand vom Planeten (x) periodisch. Wegen der Erhaltung des Drehimpulses (Flächensatz) bleibt der Mond gegenüber dem rotierenden System mal zurück, mal läuft er voraus (y).

Wir betrachten nun zwei kleine Massen m_1 und m_2, zwischen denen die Gravitationskraft zu berücksichtigen ist und erhalten die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x}_i = 2\omega\dot{y}_i + 3\omega^2 x_i - \frac{1}{m_i}\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad \ddot{y}_i = -2\omega\dot{x}_i - \frac{1}{m_i}\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad i = 1, 2. \tag{27.24}$$

Mit $V = V(r_{12}) = V(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2})$ und $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$ folgt für die Relativ-Koordinaten x und y

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} + 3\omega^2 x - \frac{1}{\mu}\frac{\partial V}{\partial x}, \tag{27.25}$$

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x} - \frac{1}{\mu}\frac{\partial V}{\partial y} \tag{27.26}$$

$$\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad V = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r_{12}} \tag{27.27}$$

mit der reduzierten Masse μ. Wir betrachten nun die Bewegung im Grenzfall, in dem $\ddot{x}$ und $\partial V/\mu\partial x$ in Gleichung 27.25 gegen die beiden anderen Terme vernachlässigbar sind. Dann erhalten wir aus dieser Gleichung $x = -\frac{2}{3\omega}\dot{y}$. Dies eingesetzt in Gleichung 27.26 ergibt

$$\ddot{y} = \frac{4}{3}\ddot{y} - \frac{1}{\mu}\frac{\partial V}{\partial y}. \tag{27.28}$$

Damit erhalten wir

$$\ddot{y} = \frac{3}{\mu}\frac{\partial V}{\partial y}. \tag{27.29}$$

Damit tritt hier die Wechselwirkung mit dem umgekehrten Vorzeichen auf und hat sich auch noch verdreifacht. An die Stelle der ursprünglichen Anziehung tritt nun eine Abstoßung. Vernachlässigen wir in dieser Gleichung die Abhängigkeit, die V von x hat, so lässt sich die Gleichung integrieren.

$$\dot{y} = \pm 3\omega\sqrt{2\rho^3(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{y})}, \quad \rho^3 = \frac{R^3(m_1 + m_2)}{3m_0}. \tag{27.30}$$

Dabei ist y_0 Integrationskonstante und gibt den kleinsten Abstand an, den y annimmt. Der Gleichung (27.25) entnehmen wir, dass ρ der Abstand der beiden Massen ist, wenn die große und die beiden kleinen Massen die Lagrange-Punkt-Konstellation 1 oder 2 einnehmen. Sie ist eine charakteristische Länge für das Problem. Hieraus folgt

$$x = \mp 2\sqrt{2\rho^3(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{y})}. \tag{27.31}$$

Wir müssen nun untersuchen, unter welchen Bedingungen die anfangs gemachte Annahme gerechtfertigt ist, dass zwei Terme in der Gleichung (27.25) vernachlässigbar sind. Typischerweise (für $y \gg y_0$) haben wir

$$2\omega\dot{y}_\infty = -3\omega^2 x_\infty = 6\omega^2\sqrt{\frac{2\rho^3}{y_0}}. \tag{27.32}$$

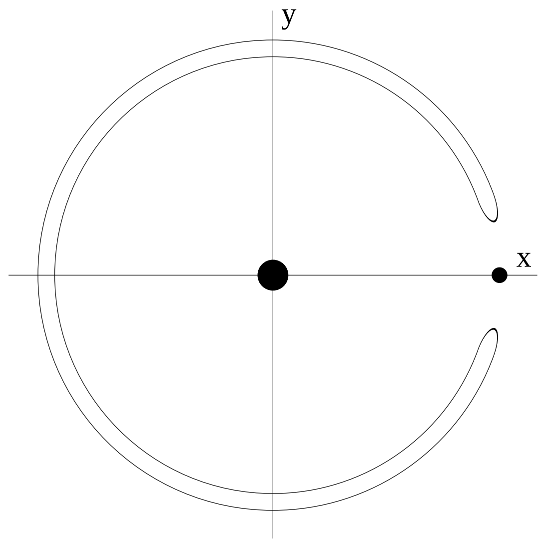
Vergleichsweise sind $\partial V/\mu\partial x$ und $\ddot{x}$ von der Ordnung $\omega^2 x\rho^3/y_0^3$. Daher muss der Mindestabstand y_0 groß gegen ρ sein. Da andererseits $y_0 = 8\rho^3/x_\infty^2$, muss x_∞ klein gegen ρ sein.

Aus den Daten $R = 151500$ km, $m_0 = 5.68 \cdot 10^{26}$ kg für Saturn, $m_1 = 2 \cdot 10^{18}$ kg für Janus und $m_2 = 0.5 \cdot 10^{18}$ kg für Epimetheus folgt $\rho = 170$ km. Tatsächlich ist $x_\infty = 50$ km klein gegen ρ. Wir erhalten $y_0 = 16000$ km. Wir bemerken noch, dass der Saturn-Radius 60000 km beträgt. Die Monde umlaufen den Saturn in 0.69 Tagen. Für die Relativgeschwindigkeit $\dot{y}_\infty$ der beiden Monde bei großem Abstand erhält man ungefähr 700 km/Tag. Der Austausch der Energie erstreckt sich also über viele Umläufe.

Hufeisen-Bahnen Ähnlich ist die Situation in dem System Erde - Cruithne. Jedoch sind hier die Massenunterschiede gewaltig. Die Erdbahn wird von Cruithne nur in zu vernachlässigendem Maße beeinflusst. Damit steht die Erde im rotierenden System praktisch fest. Die Bahn, die Cruithne durchläuft, ähnelt einem Hufeisen. Daher spricht man von einer Hufeisenbahn.

Allerdings gibt es noch zwei Unterschiede: Zum einen hält sich Cruithne bei weitem nicht so genau an die Erdbahn. Die Bahnebene von Cruithne ist um etwa 20^0 gegen die der Erde verkippt. Zum anderen ist die Bahn von Cruithne ziemlich exzentrisch ($\epsilon \approx 0.5$). Die Astronomen waren daher erstaunt, dass die Bahn Cruithnes wesentliche Züge einer Hufeisenbahn zeigt.

Etwas vereinfacht kann man sich die Hufeisenbahnen auch so vorstellen: Die Coriolis-Kraft übt eine Kraft proportional und senkrecht zur Geschwindigkeit der Massen aus. Dies ist analog zur Lorentzkraft auf ein geladenes Teilchen im Magnetfeld (Abschnitt 13.d). Dort fanden wir, dass sich in einem homogenen elektrischen Feld die Ladung längs Linien konstanten elektrischen Potentials bewegt. Ähnlich kann man hier erwarten, dass sich die Masse längs konstanten effektiven Potentials bewegt. Das würde im vorhergehenden Bild bedeuten, dass sich die Masse längs einer Kurve im roten (mittelgrauen) Bereich bewegt und damit Hufeisengestalt hat. Dies stimmt insofern nicht ganz, als das Kraftfeld des effektiven Potentials nicht konstant ist, gibt aber doch eine anschauliche Vorstellung. Man beachte, dass das Massenverhältnis von Sonne zu Erde 333400:1 ist und daher der gelbe (helle) Bereich wesentlich schmäler ist als für das Massenverhältnis 9:1.



Schema einer Hufeisenbahn mit großer und kleiner Masse. Die dritte Masse läuft auf der Hufeisenbahn.

E Hamilton-Theorie

28 Hamilton-Funktion

28.a Bewegungsgleichungen

Aus der Lagrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}}_{p_i} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} \tag{28.1}$$

folgt

$$p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}, \quad \dot{p}_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}, \tag{28.2}$$

also das Differential von $\mathcal{L}$

$$\mathrm{d}\mathcal{L}(q,\dot{q},t) = \sum_i \dot{p}_i \mathrm{d}q_i + \sum_i p_i \mathrm{d}\dot{q}_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\mathrm{d}t. \tag{28.3}$$

Wir führen nun eine Legendre-Transformation durch, das heißt wir führen eine neue Funktion $\mathcal{H}$ ein. Diese heißt Hamilton-Funktion. Sie soll von p statt $\dot{q}$ abhängen und ist definiert durch

$$\mathcal{H}(p,q,t) = \sum_i p_i\dot{q}_i - \mathcal{L}(q,\dot{q},t). \tag{28.4}$$

Dabei drückt man die $\dot{q}_j$ aus durch die p und q durch Auflösen der Gleichungen $p_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$ nach den $\dot{q}_j$. Für das Differential von $\mathcal{H}$ erhält man dann

$$\mathrm{d}\mathcal{H}(p,q,t) = \underbrace{\sum_i p_i\mathrm{d}\dot{q}_i}_{} + \sum_i \dot{q}_i\mathrm{d}p_i - \sum_i \dot{p}_i\mathrm{d}q_i - \underbrace{\sum_i p_i\mathrm{d}\dot{q}_i}_{} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\mathrm{d}t. \tag{28.5}$$

Die beiden unterklammerten Beiträge kürzen sich weg. Damit finden wir die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial\mathcal{H}(p,q,t)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial\mathcal{H}(p,q,t)}{\partial q_i} \tag{28.6}$$

Weiter ist

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}. \tag{28.7}$$

Falls $\mathcal{L}$ nicht explizit von der Zeit abhängt, gilt dies auch für $\mathcal{H}$. Dann ist

$$\mathcal{H} = \sum_i p_i\dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_i \dot{q}_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} - \mathcal{L} \tag{28.8}$$

Erhaltungsgröße. Für skleronome Systeme ist das die Energie E.

28.b Beispiele

28.b.α Massenpunkt im Potential, kartesische Koordinaten

Ausgehend von der Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \mathcal{V}(\mathbf{x}) \tag{28.9}$$

erhalten wir

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \to \dot{x} = \frac{p_x}{m}. \tag{28.10}$$

Damit erhalten wir die Hamilton-Funktion

$$\mathcal{H} = p_\alpha \dot{x}_\alpha - \mathcal{L} = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \mathcal{V}(\mathbf{x}). \tag{28.11}$$

Wir müssen nun $\dot{x}$ etc durch p_x etc ausdrücken

$$p_x\dot{x} - \frac{m}{2}\dot{x}^2 = \frac{p_x^2}{m} - \frac{p_x^2}{2m} = \frac{p_x^2}{2m} \tag{28.12}$$

und erhalten

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \mathcal{V}(\mathbf{x}). \tag{28.13}$$

Dies ist offensichtlich die Energie des Systems. Wir betrachten noch die Bewegungsgleichungen

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \quad \to \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \tag{28.14}$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \quad \to \quad \dot{\mathbf{p}} = -\operatorname{grad} \mathcal{V}. \tag{28.15}$$

Dies sind die uns bekannten Bewegungsgleichungen.

28.b.β Geladener Massenpunkt im elektromagnetischen Feld

Wir hatten eine Ladung im elektromagnetischen Feld durch die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - e\Phi(\mathbf{x}) + \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} \tag{28.16}$$

beschrieben, wobei man in einem homogenen Feld die Potentiale $\Phi(\mathbf{x}) = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{x}$, $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{x}$ hatte. Wir erhalten nun den kanonischen Impuls

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\alpha} = m\dot{x}_\alpha + \frac{e}{c}A_\alpha(\mathbf{x}) \tag{28.17}$$

$\mathbf{p}$ ist dabei der kanonische oder generalisierte Impuls, nicht der mechanische Impuls. Damit erhalten wir

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{m}(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x})) \tag{28.18}$$

und die Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{p} - \mathcal{L} = \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{p} - \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + e\Phi - \frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} \\
&= \dot{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{p} - \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}) + e\Phi = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + e\Phi, \qquad (28.19)
\end{aligned}$$

also

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 + e\Phi(\mathbf{x}) \qquad (28.20)$$

28.c Poisson-Klammern

Es sei $f = f(p(t), q(t), t)$ eine Funktion von p, q und t, deren zeitliche Änderung wir verfolgen wollen

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right). \qquad (28.21)
\end{aligned}$$

Wir führen nun die Poisson-Klammer ein

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \qquad (28.22)$$

Dann können wir

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\} \qquad (28.23)$$

schreiben. Aus der Definition folgt

$$\{f, g\} = -\{g, f\}. \qquad (28.24)$$

Die partiellen Ableitungen nach p und q können wir

$$\frac{\partial g}{\partial p_j} = \{q_j, g\}, \quad \frac{\partial g}{\partial q_j} = -\{p_j, g\} \qquad (28.25)$$

schreiben. Weiter finden wir

$$\{p_j, p_k\} = 0, \quad \{q_j, q_k\} = 0, \quad \{q_j, p_k\} = \delta_{jk}. \qquad (28.26)$$

In der Quantenmechanik werden aus den Poisson-Klammern Kommutatoren von Operatoren

$$\{f, g\} \to \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[F, G] = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}(FG - GF), \qquad (28.27)$$

wobei F und G die zu f und g gehörenden Operatoren sind.

Drehimpuls Für die Drehimpuls-Komponenten finden wir

$$L_1 = \sum_j (x_{j2}p_{j3} - x_{j3}p_{j2}), \quad L_2 = \sum_j (x_{j3}p_{j1} - x_{j1}p_{j3}). \tag{28.28}$$

Da

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_{i1}} = \frac{\partial L_1}{\partial p_{j1}} = \frac{\partial L_2}{\partial x_{j2}} = \frac{\partial L_2}{\partial p_{j2}} = 0 \tag{28.29}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\{L_1, L_2\} &= \sum_i \left(\frac{\partial L_1}{\partial x_{i\alpha}} \frac{\partial L_2}{\partial p_{i\alpha}} - \frac{\partial L_1}{\partial p_{i\alpha}} \frac{\partial L_2}{\partial x_{i\alpha}} \right) \\
&= \sum_i \left(\frac{\partial L_1}{\partial x_{i3}} \frac{\partial L_2}{\partial p_{i3}} - \frac{\partial L_1}{\partial p_{i3}} \frac{\partial L_2}{\partial x_{i3}} \right) \\
&= \sum_i ((-p_{i2}(-x_{i1}) - x_{i2}p_{i1}) = L_3.
\end{aligned} \tag{28.30}$$

Ähnlich findet man

$$\{L_2, L_3\} = L_1, \quad \{L_3, L_1\} = L_2. \tag{28.31}$$