Die drei Massen bilden also ein gleichseitiges Dreieck, so dass man noch zwei weitere Lagrange-Punkte erhält,

$$(x_{4,5}, y_{4,5}) = \left(\frac{m_1 - m_2}{2(m_1 + m_2)} R, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} R \right). \tag{27.17}$$

Wenn das Massenverhältnis m_1/m_2 hinreichend groß ist, sind diese Lagrange-Punkte stabil. [6] Generell können die drei Körper nicht nur auf Kreisbahnen umeinander laufen, sondern auch Kepler-Ellipsen beschreiben, wobei sie stets ein gleichseitiges Dreieck bilden. Dabei ist es nicht nötig, dass eine Masse vernachlässigbar klein gegen die anderen beiden ist. [7]

An diesen Punkten können im Sonnen-Planeten-System wie auch im Planeten-Mond-System kleine Körper mitlaufen. Den vorauslaufenden Lagrange-Punkt bezeichnet man als L_4, den nachlaufenden als L_5. Der erste derartige Körper (Achilles) wurde 1906 von Max Wolf im Sonne-Jupiter-System in L_4 gefunden. Im Folgejahr wurden zwei weitere, Hector in L_4 und Patroclus in L_5 gefunden. Heute kennt man über 1000, die Jupiter voraus und etwa 600, die hinter Jupiter herlaufen. Es hat sich eingebürgert, diese nach den Helden von Troja zu bezeichnen, wobei die Namen inzwischen ausgegangen sind. Seither spricht man bei diesen Himmelskörpern auch von Trojanern und dies nicht nur bei Jupiter. Im Gegensatz zur großen Anzahl von Trojanern bei Jupiter hat man bisher keine beim Saturn gefunden. Bei Mars werden zwei Trojaner in L_4 und in vier in L_5 behauptet. Neptun hat einen. COBE (Cosmic Background Explorer) hat vor kurzem einen Staubring im L_5 der Erde gefunden, der allerdings auf Grund des Lichtdrucks der Sonne verschoben ist.

In Planeten-Mond-Systemen sind keine Trojaner beim Jupiter bekannt, dagegen läuft dem Saturn-Mond Tethys (1060 km Durchmesser) der Mond Telesto (24 km Durchmesser) um 60^0 voraus und Calypso (19 km Durchmesser) um 60^0 hinterher. Dem Mond Dione (1120 km Durchmesser) läuft Helene (35 km Durchmesser) voraus. Im Erde-Mond-System wurden von Kordylewski in L_4 und L_5 Staubwolken gefunden. Solcher Staub kann allerdings auch Felsbrocken von $5m$ Durchmesser enthalten.

---

[6] Für allgemeine Massen m, m_1 und m_2 findet man die drei Schwingungsfrequenzen

$$\omega_1 = \omega_0, \quad \omega_{2,3} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{27 M_2}{M^2}}\right)}\omega_0 \tag{27.18}$$

mit $M_2 = m_0 m_1 + m_0 m_2 + m_1 m_2$, $M = m_0 + m_1 + m_2$. Dabei ist ω_0 die Umlauf-Frequenz der drei Körper. Man erkennt, dass $\omega_{2,3}$ nur reell sind, wenn $M_2 < M^2/27$.

[7] In diesem Fall lautet die Bewegungsgleichung für die Seitenlänge r des gleichseitigen Dreiecks

$$\ddot{r} = \frac{l^2 M^2}{r^3 M_2^2} - \frac{\gamma M}{r^2}. \tag{27.19}$$

27.c Janus und Epimetheus

Wie bereits im Zusammenhang mit dem Virialsatz bemerkt, umlaufen Janus und Epimetheus den Saturn auf fast gleichen Bahnen und tauschen, sobald sich einer dem anderen nähert, etwas Energie aus, so dass der raschere einholende gebremst und auf eine höhere Bahn gehoben wird und der langsamere vorauseilende beschleunigt und gleichzeitig auf eine niedrigere Bahn gebracht wird. Da dies der Intuition zuwiderläuft, wollen wir diesen Energieaustausch hier quantitativ betrachten. Dabei stellt sich heraus, dass aus der anziehenden Gravitationswechselwirkung effektiv eine dreimal so starke abstoßende wird.

Wir betrachten zunächst eine kleine Masse (Mond) m im Schwerefeld einer großen Masse (Saturn) m_0 am Ursprung. Im System, das mit der Frequenz ω rotiert, erhalten wir unter Berücksichtigung von Coriolis-Kraft und Zentrifugalkraft die Bewegungsgleichung (mit Koordinaten $\bar{x}$ und y)

$$\ddot{\bar{x}} = 2\omega\dot{y} + \omega^2\bar{x} - \frac{\gamma m_0 \bar{x}}{r^3}, \quad \ddot{y} = -2\omega\dot{\bar{x}} + \omega^2 y - \frac{\gamma m_0 y}{r^3} \tag{27.20}$$

mit dem Abstand $r = \sqrt{\bar{x}^2 + y^2}$. Wir nehmen nun an, dass sich die Masse in der Nähe von $(\bar{x}, y) = (R + x, y)$ mit kleinem x und y bewegt. Dabei sei $x = 0$, $y = 0$ eine stationäre Lösung. Daraus folgt

$$\omega^2 R - \frac{\gamma m_0}{R^2} = 0, \tag{27.21}$$

also $\gamma/R^3 = \omega^2/m_0$. Entwickeln wir in der Bewegungsgleichung bis zur ersten Ordnung in x und y, so folgt

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} + 3\omega^2 x, \quad \ddot{y} = -2\omega\dot{x}. \tag{27.22}$$

Dieses homogene Gleichungs-System hat die zwei linear unabhängigen Lösungen

$$x = x_0, \quad y = -\frac{3}{2}\omega x_0 t + y_0 \text{ und } x = a\cos(\omega t + \phi_0), \quad y = -2a\sin(\omega t + \phi_0). \tag{27.23}$$

Die erste Lösung entspricht einem Verhalten, bei dem die Masse m einen etwas abweichenden Abstand (x_0) vom Planeten hat und sich daher mit einer etwas anderen Geschwindigkeit bewegt, also für positives x_0 (größerer Abstand) gegen das rotierende System zurückbleibt. Die zweite Lösung beschreibt eine etwas exzentrische Bahn. Dadurch variiert der Abstand vom Planeten (x) periodisch. Wegen der Erhaltung des Drehimpulses (Flächensatz) bleibt der Mond gegenüber dem rotierenden System mal zurück, mal läuft er voraus (y).

Wir betrachten nun zwei kleine Massen m_1 und m_2, zwischen denen die Gravitationskraft zu berücksichtigen ist und erhalten die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x}_i = 2\omega\dot{y}_i + 3\omega^2 x_i - \frac{1}{m_i}\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad \ddot{y}_i = -2\omega\dot{x}_i - \frac{1}{m_i}\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad i = 1, 2. \tag{27.24}$$

Mit $V = V(r_{12}) = V(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2})$ und $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$ folgt für die Relativ-Koordinaten x und y

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} + 3\omega^2 x - \frac{1}{\mu}\frac{\partial V}{\partial x}, \tag{27.25}$$

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x} - \frac{1}{\mu}\frac{\partial V}{\partial y} \tag{27.26}$$

$$\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad V = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r_{12}} \tag{27.27}$$

mit der reduzierten Masse μ. Wir betrachten nun die Bewegung im Grenzfall, in dem $\ddot{x}$ und $\partial V/\mu\partial x$ in Gleichung 27.25 gegen die beiden anderen Terme vernachlässigbar sind. Dann erhalten wir aus dieser Gleichung $x = -\frac{2}{3\omega}\dot{y}$. Dies eingesetzt in Gleichung 27.26 ergibt

$$\ddot{y} = \frac{4}{3}\ddot{y} - \frac{1}{\mu}\frac{\partial V}{\partial y}. \tag{27.28}$$

Damit erhalten wir

$$\ddot{y} = \frac{3}{\mu}\frac{\partial V}{\partial y}. \tag{27.29}$$

Damit tritt hier die Wechselwirkung mit dem umgekehrten Vorzeichen auf und hat sich auch noch verdreifacht. An die Stelle der ursprünglichen Anziehung tritt nun eine Abstoßung. Vernachlässigen wir in dieser Gleichung die Abhängigkeit, die V von x hat, so lässt sich die Gleichung integrieren.

$$\dot{y} = \pm 3\omega\sqrt{2\rho^3(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{y})}, \quad \rho^3 = \frac{R^3(m_1 + m_2)}{3m_0}. \tag{27.30}$$

Dabei ist y_0 Integrationskonstante und gibt den kleinsten Abstand an, den y annimmt. Der Gleichung (27.25) entnehmen wir, dass ρ der Abstand der beiden Massen ist, wenn die große und die beiden kleinen Massen die Lagrange-Punkt-Konstellation 1 oder 2 einnehmen. Sie ist eine charakteristische Länge für das Problem. Hieraus folgt

$$x = \mp 2\sqrt{2\rho^3(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{y})}. \tag{27.31}$$

Wir müssen nun untersuchen, unter welchen Bedingungen die anfangs gemachte Annahme gerechtfertigt ist, dass zwei Terme in der Gleichung (27.25) vernachlässigbar sind. Typischerweise (für $y \gg y_0$) haben wir

$$2\omega\dot{y}_\infty = -3\omega^2 x_\infty = 6\omega^2\sqrt{\frac{2\rho^3}{y_0}}. \tag{27.32}$$

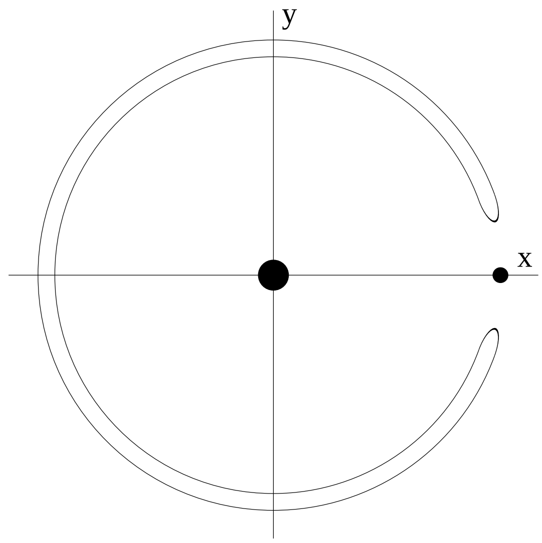
Vergleichsweise sind $\partial V/\mu\partial x$ und $\ddot{x}$ von der Ordnung $\omega^2 x\rho^3/y_0^3$. Daher muss der Mindestabstand y_0 groß gegen ρ sein. Da andererseits $y_0 = 8\rho^3/x_\infty^2$, muss x_∞ klein gegen ρ sein.

Aus den Daten $R = 151500$ km, $m_0 = 5.68 \cdot 10^{26}$ kg für Saturn, $m_1 = 2 \cdot 10^{18}$ kg für Janus und $m_2 = 0.5 \cdot 10^{18}$ kg für Epimetheus folgt $\rho = 170$ km. Tatsächlich ist $x_\infty = 50$ km klein gegen ρ. Wir erhalten $y_0 = 16000$ km. Wir bemerken noch, dass der Saturn-Radius 60000 km beträgt. Die Monde umlaufen den Saturn in 0.69 Tagen. Für die Relativgeschwindigkeit $\dot{y}_\infty$ der beiden Monde bei großem Abstand erhält man ungefähr 700 km/Tag. Der Austausch der Energie erstreckt sich also über viele Umläufe.

Hufeisen-Bahnen Ähnlich ist die Situation in dem System Erde - Cruithne. Jedoch sind hier die Massenunterschiede gewaltig. Die Erdbahn wird von Cruithne nur in zu vernachlässigendem Maße beeinflusst. Damit steht die Erde im rotierenden System praktisch fest. Die Bahn, die Cruithne durchläuft, ähnelt einem Hufeisen. Daher spricht man von einer Hufeisenbahn.

Allerdings gibt es noch zwei Unterschiede: Zum einen hält sich Cruithne bei weitem nicht so genau an die Erdbahn. Die Bahnebene von Cruithne ist um etwa 20^0 gegen die der Erde verkippt. Zum anderen ist die Bahn von Cruithne ziemlich exzentrisch ($\epsilon \approx 0.5$). Die Astronomen waren daher erstaunt, dass die Bahn Cruithnes wesentliche Züge einer Hufeisenbahn zeigt.

Etwas vereinfacht kann man sich die Hufeisenbahnen auch so vorstellen: Die Coriolis-Kraft übt eine Kraft proportional und senkrecht zur Geschwindigkeit der Massen aus. Dies ist analog zur Lorentzkraft auf ein geladenes Teilchen im Magnetfeld (Abschnitt 13.d). Dort fanden wir, dass sich in einem homogenen elektrischen Feld die Ladung längs Linien konstanten elektrischen Potentials bewegt. Ähnlich kann man hier erwarten, dass sich die Masse längs konstanten effektiven Potentials bewegt. Das würde im vorhergehenden Bild bedeuten, dass sich die Masse längs einer Kurve im roten (mittelgrauen) Bereich bewegt und damit Hufeisengestalt hat. Dies stimmt insofern nicht ganz, als das Kraftfeld des effektiven Potentials nicht konstant ist, gibt aber doch eine anschauliche Vorstellung. Man beachte, dass das Massenverhältnis von Sonne zu Erde 333400:1 ist und daher der gelbe (helle) Bereich wesentlich schmäler ist als für das Massenverhältnis 9:1.



Schema einer Hufeisenbahn mit großer und kleiner Masse. Die dritte Masse läuft auf der Hufeisenbahn.