Theoretische Physik I: Klassische Mechanik

Prof. F.Wegner, Universität Heidelberg, WS 2004/05
7. Übungsblatt: Präsenzübung 1.12.04, Hausaufgabe Abgabetermin 3.12.04

P9. *Eichtransformation und Eichinvarianz.* In der Vorlesung wurde die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - e\phi(\vec{x},t) + \frac{e}{c}\left(\vec{A}(\vec{x},t)\cdot\dot{\vec{x}}\,\right)$$

für eine Ladung e im elektromagnetischen Feld

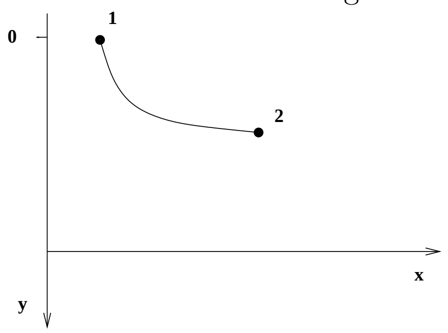
$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\phi(\vec{x},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{x},t); \vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$$

hergeleitet. Die Bewegungsgleichungen sind invariant gegen Transformationen

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + e\frac{d}{dt}\Lambda(\vec{x},t).$$

Berechnen Sie die Potentiale ϕ' und $\vec{A}'$ sowie die Felder $\vec{E}'$ und $\vec{B}'$, die sich aus der Transformation ergeben.

H16. Bestimmen Sie die allgemeine Form x(y) der Kurve, auf der eine Masse



m unter dem Einfluß der Schwerkraft reibungsfrei am schnellsten von Punkt 1 nach Punkt 2 gleitet, wobei sie sich zu Beginn in Punkt 1 in Ruhe befindet. Hinweis: Hängt eine Lagrange-Funktion nicht explizit von t ab, so ist $\mathcal{L} - \dot{q}\partial_{\dot{q}}\mathcal{L}$ eine Erhaltungsgröße der Bewegung.

(7 Punkte)

H17. Für ein zeitunabhängiges und translationsinvariantes System mit $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$ setze man $\delta\vec{x}_i = \vec{u}t$, $\delta t = 0$ mit konstantem $\vec{u}$. Wie muss man Λ wählen, damit

$$\mathcal{L}(\vec{x}+\delta\vec{x}, \dot{\vec{x}}+\delta\dot{\vec{x}}, t) - \mathcal{L}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) = \frac{d\Lambda(\vec{x},t)}{\mathrm{dt}}$$

erfüllt ist? Welcher Erhaltungssatz ergibt sich hieraus?

(5 Punkte)