Theoretische Physik III: Quantenmechanik

Prof. F.Wegner, Universität Heidelberg, SS04

2. Übungsblatt, Präsenzübung 30.04.04, Hausaufgaben Abgabetermin: 3.05.04

P1. Kommutatorbeziehungen

i) Zeigen Sie für zwei Hermitesche Operatoren A, B

P1. Commutator relations

i) Show for two Hermitean Operators A, B

$$[A, B]^\dagger = -[A, B]$$

ii) Zeigen Sie für A, B mit $[A, B] = C$, wobei C der Bedingung

ii) Show for A, B with $[A, B] = C$, where C obeys

$$[A, C] = [B, C] = 0$$

genüge, daß

that

$$[A, f(B)] = C\frac{d}{dB}f(B)$$

gilt, wenn sich f in eine Taylorreihe entwickeln lässt.

if f can be expanded in a Taylorseries.

H3. Beugung von Fullerenen

Jüngst ist es der Gruppe um A. Zeilinger gelungen, Beugungsmuster für C_{70} Atome zu erzeugen (PRL,88,S.100404,2002). Sie benutzte die Methode des Talbot–Lau Interferometers.

i) Berechnen Sie ungefähr die de Broglie Wellenlänge (die Wellenlänge eines Teilchens der Energie $\pi k_B T$) für Fullerene der Temperatur 650 C°. **(1P)**

ii) Eine ebene Welle der Wellenlänge λ treffe auf ein optisches Gitter mit der Gitterkonstante D und infinitesimal schmalen Spalten. Positionieren Sie nun ein zweites Gitter desselben Typs derart, daß die transmittierte Intensität maximal wird. Approximieren Sie dazu die Weglänge $r(l)$ mit $l = n_1 - n_2$, siehe Fig. 1,

H3. Diffraction of Fullerenes

Recently the group of A. Zeilinger obtained diffraction patterns of C_{70}–atoms, using a Talbot–Lau Interferometer (PRL, 88, S.100404, 2002).

i) Calculate approximately the de Broglie wave length (wave length of a particle with energy $\pi k_B T$) of fullerenes at a temperature of 650 C°. **(1P)**

ii) Consider a plane wave of wavelength λ incident on a grating with infinitesimal small slits. How must a second grating of the same type be positioned in order to maximize the transmitted intensity. Approximate the length of the path $r(l)$ with $l = n_1 - n_2$, travelled by the particle, see Fig. 1, by

$$r(l) = \sqrt{L^2 + D^2(l+c)^2} \approx L + \frac{D^2}{2L}(l+c)^2 ,$$

wobei $0 \leq c < 1$ und L zu bestimmen bleiben aus der Bedingung, daß

where $0 \leq c < 1$ and L are to be determined through the condition

$$r(l) - r(l') \;=\; n\lambda \quad (n \in Z)$$

für beliebige $l \neq l'$. **(2P)**
iii) Begründen Sie kurz qualitativ, warum das Experiment so wichtig ist.**(1P)**

for arbitrary integer $l \neq l'$. **(2P)**
iii) Explain quantitatively the importance of the experiment.**(1P)**

H4. Teilchen im Magnetfeld

Der Hamilton Operator von einem nicht relativistischen geladenen Teilchen in einem magnetischen Feld ist

H4. Particle in a magnetic field

The Hamiltonian for a non relativistic charged particle in a magnetic field is given by

$$H \;=\; \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 .$$

Formulieren Sie eine Bedingung an $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, so daß für die gemischten Terme gilt

Formulate a condition for $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ so that for the cross terms holds

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{p} \;=\; \mathbf{p}\mathbf{A}(\mathbf{x}) . \qquad (\mathbf{1p})$$

H.5 Erwartungswerte eines freien Teilchens

Betrachten Sie ein freies Teilchen. Berechnen Sie die Zeitentwicklung der folgenden Erwartungswerte

H.5 Expectation values of a free particle

Consider a free particle. Calculate the time evolution of the following expectation values

$$\begin{aligned} C_{xx}(t) &= \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle && (\mathbf{2P}) \\ C_{pp}(t) &= \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle && (\mathbf{1P}) \\ C_{xp}(t) &= \frac{1}{2}\langle (x - \langle x \rangle)(p - \langle p \rangle) + (p - \langle p \rangle)(x - \langle x \rangle) \rangle && (\mathbf{2P}) \end{aligned}$$

für ein beliebiges Wellenpaket.

for an arbitrary wave packet.

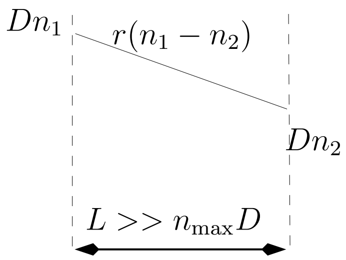

Figure 1: Skizze der Gitter **(H3)** mit ganzen $n_1 < n_{\max}$ und $n_2 < n_{\max}$
Figure 1: Sketch of the gratings **(H3)**, $n_1 < n_{\max}$ and $n_2 < n_{\max}$ are integer