Theoretische Physik III: Quantenmechanik

Prof. F.Wegner, Universität Heidelberg, SS04
3. Übungsblatt, Präsenzübung 7.05.04, Hausaufgaben Abgabetermin: 10.05.04

P2. Gauss'sches Wellenpaket
Eine allgemeine Lösung eines 1–dim. Hamilton Operators $H(\hat{p}, x)$ zu beliebigen Anfangsbedingung ψ_0 läßt sich mit Hilfe des Propagators $K(x, x', t)$ wie folgt ausdrücken:

P2. Gaussian wave packet
A general solution of a 1–d Hamiltonian $H(\hat{p}, x)$ for an arbitrary initial condition ψ_0 can be expressed in terms of the propagator $K(x, x', t)$ as follows

$$\psi(x,t) = \int dx' K(x,x',t)\psi_0(x') \ .$$

i) Zeigen Sie daß der Propagator folgende Eigenschaften erfüllen muß

i) Show that the propagator has to meet with the following conditions

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{i}\hbar\frac{d}{dt} - H(\hat{p}, x)\right) K(x-x', t) &= 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ K(x-x', 0) &= \delta(x-x') \ . \end{aligned}$$

ii) Finden Sie den Propagator eines freien Teilchens, benutzen Sie dabei die Lösung von **H2.**

ii) Find the propagator of a free particle. Use the solution of **H2.**

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \sqrt{\frac{\sigma}{\Delta\sqrt{2\pi}}} \exp\left[-\frac{1}{4\Delta}(x_0 - x + 2\mathrm{i}\sigma^2 p_0/\hbar)^2 - \sigma^2 p_0^2/\hbar^2 + ix_0 p_0/\hbar\right] \\ \Delta &= \sigma^2 + \mathrm{i}\frac{\hbar t}{2m} \end{aligned}$$

und verändern Sie die Anfangsbedingung entsprechend. Benutzen Sie die Darstellung der δ– Distribution

and modify the initial condition appropriately. Use the representation of the δ–distribution

$$\delta(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) \ .$$

H6. Wahrscheinlichkeitsstromdichte
Berechnen Sie die Stromdichte für die 1–d Wellenfunktion

H6. Probability current density
Calculate the current density for the 1–d wave function

$$\psi(x) = c_1 \exp(\mathrm{i}kx) + c_2 \exp(-\mathrm{i}kx) \quad , \quad c_1, c_2 \text{ complex} \ . \qquad \textbf{(2P)}$$

H7. Virialsatz und Ehrenfest'sches Theorem
Gegeben sei der Hamiltonoperator

H7. Virial theorem and Ehrenfest theorem
Consider the Hamilton operator

$$H = \frac{\hat{\mathbf{p}}^{\mathbf{2}}}{2m} + V(\mathbf{x})$$

i) Beweisen Sie für einem stationären Zustand $|\psi\rangle$ den Virialsatz

i) prove for a stationary state $|\psi\rangle$ the virial theorem

$$\langle\psi|\hat{\mathbf{p}}^2|\psi\rangle \quad = \quad m\langle\psi|\mathbf{x}\cdot\nabla V(\mathbf{x})|\psi\rangle \ . \quad \mathbf{(2P)}$$

ii) Beweisen Sie für den Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$ das zweite Ehrenfest'sche Theorem

ii) Prove for the angular momentum $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$ the second theorem of Ehrenfest

$$\frac{d}{dt}\langle\mathbf{L}\rangle \quad = \quad -\langle\mathbf{r}\times\nabla V\rangle \ . \quad \mathbf{(2P)}$$

H8. Kumulanten
Die charakteristische Funktion

H8. Cumulants
The generating function

$$\chi(\tau) \quad = \quad \int dx \exp(-\mathrm{i}\tau x) w(x)$$

einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(x)$ erzeugt das n–te Moment $\langle x^n\rangle$ der Verteilung durch die Vorschrift

of a probability distribution $w(x)$ generates the n–th moment of the distribution through the rule

$$\langle x^n\rangle \quad = \quad \mathrm{i}^n \frac{d^n}{d\tau^n}\chi(\tau)\Big|_{\tau=0} \ .$$

Eine andere nützliche Größe sind die Kumulanten C_n, die sich aus dem Logarithmus der charakteristischen Funktion ableiten lassen

Another useful quantity are the cumulants C_n, which are generated by the logarithm of the generating function

$$C_n \quad = \quad \mathrm{i}^n \frac{d^n}{d\tau^n}\ln\chi(\tau)\Big|_{\tau=0} \ .$$

i) Drücken Sie C_1, C_2, C_3 durch die Momente aus. **(3 P)**
ii) Bestimmen Sie alle Kumulanten $C_1 \ldots C_\infty$ der Gaußverteilung

i) Express C_1, C_2, C_3 in terms of the moments. **(3 P)**
ii) Derive all cumulants $C_1 \ldots C_\infty$ of the Gaussian distribution

$$w(x) \quad = \quad \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$