Theoretische Physik III: Quantenmechanik

Prof. F.Wegner, Universität Heidelberg, SS04
4. Übungsblatt, Präsenzübung 14.05.04, Hausaufgaben Abgabetermin: 17.05.04

P3. Eichtransformationen
In der Quantenmechanik sind die Kommutatorrelationen

P3. Gauge Transformations
In quantum mechanics the commutator relations

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0 \quad , \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = \mathrm{i}\hbar\delta_{ij} \quad , \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$$

wesentlich. In der Ortsdarstellung kann man auch

are essential. In the position representation one can introduce

$$\hat{x}_i = x_i \qquad , \qquad \hat{p}_i = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{d}{dx_i} + g_i(\mathbf{x})$$

einführen. Welche Bedingung müssen die Funktionen $g_i(\mathbf{x})$ erfüllen damit weiterhin gilt

Which condition have the functions $g_i(\mathbf{x})$ to meet in order to guarantee

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \, .$$

H10. Potential mit einem gebundenen Zustand
Von großer Wichtigkeit in der Anwendung sind Potentiale, die nur einen gebundenen Zustand erlauben. Betrachten Sie die stationäre Schrödingergl.

H10. Potential with only one bound state
Potentials with only one bound state are important for many applications. Look at the stationary Schrödinger equation

$$\psi''(x) + a\delta(x)\psi(x) + k^2\psi(x) = 0 \, , \quad k = \sqrt{2Em}/\hbar \, ,$$

a sei eine positive reelle Zahl.
i) Berechnen Sie den einzigen gebundenen Zustand und seine Energie E. Beachten Sie dabei, daß durch das singuläre Potential die Ableitung der Wellenfunktion bei $x = 0$ nicht stetig ist. Wie groß ist ihr Sprung? Hinweis: differenzieren Sie die Schrödingergl. in einer ϵ–Umgebung um 0 und nehmen Sie dann den Limes $\epsilon \to 0$. **(3 P)**
ii) Berechnen Sie auch den Streuzustand zur Wellenzahl k. Setzen Sie an

a is a positive real.
i) Calculate the single bound state and its energy E. Observe that the singularity of the potential causes a discontinuity in the first derivative of the wave function at $x = 0$. What is the value of this discontinuity? Hint: integrate the Schrödinger Eq. from $-\epsilon$ to ϵ and take the limit $\epsilon \to 0$. **(3 P)**
ii) Calculate also the scattering state for a wave vector k. Use the ansatz

$$\begin{aligned}
\psi_-(x) &= f_- \cos(kx) + g_- \sin(kx) \qquad , \quad x < 0 \\
\psi_+(x) &= f_+ \cos(kx) + g_+ \sin(kx) \qquad , \quad x > 0 \, ,
\end{aligned}$$

und bestimmen sie f_+ und g_+ in Abhängigkeit von f_- und g_- . **(2 P)**
iii) Bestimmen Sie die Dimension von a. **(1 P)**

and determine f_+ and g_+ as functions of f_- and g_- . **(2 P)**
iii) Determine the dimension of a. **(1 P)**

H11. Harmonischer Oszillator

i) Berechnen Sie die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ eines Teilchens unter dem Einfluß eines harmonischen Oszillatorpotentials zum Zeitpunkt $t = T/2$, also nach einer halben Periode, in Abhängigkeit von $\psi_0(x) = \psi(x,0)$. Benützen Sie daß man eine beliebige quadratintegrable Funktion nach Eigenfunktionen ϕ_n des harmonischen Oszillators entwickeln kann

H11. Harmonic Oscillator

i) Calculate the wave function $\psi(x,t)$ of a particle moving in a harmonic oscillator potential at time $t = T/2$, i. e. after half a period, in dependence on its initial value $\psi_0(x) = \psi(x,0)$. Use the expansion of an arbitrary square integrable function in terms of oscillator wave functions ϕ_n as

$$\psi(x,t) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\mathrm{i}\omega_n t}\phi_n(x) \; . \qquad \textbf{(2P)}$$

ii) Zeigen Sie, daß auch die Funktion

ii) Show that the function

$$\psi(x) \;=\; \exp\left(\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \quad , \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega m}}$$

eine Lösung der stationären Schrödingergleichung

is a solution of the stationary Schrödinger equation

$$\frac{\hbar\omega}{2}\left(-x_0^2\frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{x_0^2}\right)\psi(x) \;=\; E\psi(x)$$

ist. Für welche Energie E? Warum ist diese Lösung als Eigenzustand unzulässig? **(2 P)**

For which energy E? Why is this solution not allowed as an eigenstate? **(2 P)**