Theoretische Physik III: Quantenmechanik

Prof. F.Wegner, Universität Heidelberg, SS04

5. Übungsblatt, Präsenzübung 21.05.04, Hausaufgaben Abgabetermin: 24.05.04

P4. 3 dim. harmonischer Oszillator

Der 3 dimensionale harmonische Oszillator ist beschrieben durch den Hamilton Operator

P4. 3–d harmonic Oscillator

The three dimensional harmonic oscillator is described by the Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + \frac{m}{2}\sum_i \omega_i^2 x_i^2$$

i) Geben Sie die Eigenfunktionen und Eigenwerte an. Diskutieren Sie die Grenzfälle $\omega_1 \ll \omega_2, \omega_3$ und $\omega_1, \omega_2 \ll \omega_3$.

ii) Setzen Sie $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$. Bestimmen Sie die drei niedrigsten Eigenwerte und deren Entartungsgrad. Wieviele Entartungen hat ein beliebiger Eigenwert E_N?

i) Determine the eigenfunctions and the eigenvalues. Discuss also the limiting cases $\omega_1 \ll \omega_2, \omega_3$ and $\omega_1, \omega_2 \ll \omega_3$.

ii) Set $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$. Determine the three lowest eigenvalues and their degree of degeneracy. What is the degree of degeneracy of an arbitrary eigenvalue E_N?

H12. Teilchen im Gravitationsfeld

Ein Teilchen unter dem Einfluß einer konstanten Kraft (z. B. eines Gravitationsfeldes) wird beschrieben durch die Schrödinger Gleichung Operator

H12. Particle in a gravitation field

A particle in a field of constant force (i. e. gravitation field) is described by the Schrödinger equation

$$\mathrm{i}\hbar\frac{d}{dt}\psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + mgx\right)\psi(x,t)\ .$$

Zeigen Sie, dass man sich eine Lösung dieser Gleichung aus einer Lösung $\psi_0(x,t)$ der Schrödingergleichung des freien Teilchens

Show that one can obtain a solution of this equation from the solution $\psi_0(x,t)$ of the Schrödinger equation of a free particle

$$\mathrm{i}\hbar\frac{d}{dt}\psi_0(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_0(x,t)$$

beschaffen kann. Setzen Sie dafür an

Use the ansatz

$$\psi(x,t) = \psi_0(x + gt^2/2, t)e^{\mathrm{i}\phi(t) - \mathrm{i}axt}$$

und bestimmen Sie a und $\phi(t)$. Hinweis: Bezeichnen Sie die Ableitung nach dem ersten Argument von ψ_0 mit ψ_0' und nach dem zweiten Argument mit $\dot{\psi}_0$. **(5 P)**

and determine a and $\phi(t)$. Hint, denote the derivatives of ψ_0 in the first argument as ψ' and the derivative in the second argument as $\dot{\psi}_0$. **(5 P)**

H13. Potentialstufe

Betrachten Sie den Hamilton Operator für ein Teilchen in einem Stufenpotential

H13. Potentialstep

Consider the Hamiltonian for a particle in a potential of the form of a step function.

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad , \quad V(x) = V_0\theta(x) \ .$$

i) Berechnen Sie die auslaufende Welle ψ_{out} für eine einlaufende Welle der Form

i) Calculate the outgoing wave ψ_{out} for an incoming wave of the form

$$\psi_{\text{in}} = A\theta(-x)e^{\mathrm{i}kx} + B\theta(x)e^{-\mathrm{i}qx} \quad , \quad k > \sqrt{2mV_0}/\hbar \quad , \quad q > 0, \text{real} \ .$$

Setzen Sie an

Make the ansatz

$$\psi_{\text{out}} = C\theta(-x)e^{-\mathrm{i}kx} + D\theta(x)e^{\mathrm{i}qx}$$

und bestimmen Sie C und D. **(3 P)**
ii) Berechnen Sie die Stromdichten j_C, j_D. Welcher Zusammenhang besteht zwischen j_A, j_B, j_C und j_D. **(2 P)**

and determine C and D. **(3 P)**
ii) Calculate the current densities j_C and j_D. What is the relation between j_A, j_B, j_C and j_D. **(2 P)**