# Theoretische Physik III: Quantenmechanik

Prof. F.Wegner, Universität Heidelberg, SS04

6. Übungsblatt, Präsenzübung 28.05.04, Hausaufgaben Abgabetermin: 2.06.04

**P5. Gauss'sches Wellenpaket**
Zeigen Sie, dass die Orts–Impuls Unschärferelation als Gleichung $\Delta p \Delta x = \hbar/2$ einzig für Gauss'sche Wellenpakete gilt. Hinweis: Unter welcher Bedingung wird die Schwarz'sche Ungleichung zur Gleichung? Leiten sie eine Differentialgleichung in $x$ für die Wellenfunktion $\psi$ her, deren eindeutige quadratintegrable Lösung ein Gauss'sches Wellenpaket ist.

**P5. Gaussian wave packet**
Show that the position–momentum uncertainty relation holds as equality $\Delta p \Delta x = \hbar/2$ only for Gaussian wave packets. Hint: Under which condition does the inequality of Schwarz become an equality? Derive a differential equation in $x$ for the wave function $\psi$ with Gaussian wave packets as the unique square integrable solutions.

**H14. Translationsoperator**
Zeigen Sie, daß der Operator

**H14. Translationoperator**
Show that the operator

$$U(\mathbf{a}) = e^{\mathbf{i}\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{p}}/\hbar}$$

eine Translation bewirkt

induces a translation

$$U(\mathbf{a})\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}+\mathbf{a}) \ . \quad \mathbf{(2P)}$$

**H15. Kommutatorrelationen des Drehimpulses**
i) Verifizieren Sie den Kommutator zweier Drehimpulskomponenten

**H15. Commutator relations of angular momentum**
i) Verify the commutator of two components of the angular momentum

$$[L_x, L_y] = \mathrm{i}\hbar L_z$$

anhand der Darstellung

using the representation

$$\mathbf{L} = -\mathrm{i}\hbar\mathbf{x}\times\nabla \ . \quad \mathbf{(2P)}$$

ii) Berechnen Sie den Kommutator

ii) Calculate the commutator

$$[\mathbf{a}\cdot\mathbf{L}, \mathbf{b}\cdot\mathbf{L}] \ . \quad \mathbf{(1P)}$$

**H16. Hyperbolisches Potential**
Gegeben sei die stationäre Schrödingergleichung eines Teilchens in einem attraktiven Potential der Form $\sim \cosh^{-2}$

**H16. Hyperbolic Potential**
Consider the stationary Schrödinger equation of a particle in an attractive potential with the shape $\sim \cosh^{-2}$

$$\psi'' + \frac{a}{\cosh^2(bx)}\psi + k^2\psi = 0 \quad , \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \ a > 0, \ b \text{ reell (real)}$$

i) Finden Sie eine Eigenfunktion $\psi_0$ und dessen Eigenwert $k^2$ indem Sie ansetzen

$$\psi_0(x) \quad \propto \quad \frac{1}{\cosh^n(bx)}$$

und $n$ bestimmen. **(2 P)**

ii) Warum ist die gefundene Lösung die (nicht normierte) Wellenfunktion bzw. die Energie $E_0$ des Grundzustandes? **(1 P)**

iii) Man kann zeigen, daß die gebundenen Zustände die Form

$$\psi_m(x) \quad \propto \quad \frac{P_m(\sinh(bx))}{\cosh^n(bx)}$$

haben, wobei $P_m$ ein Polynom der Ordnung $m$ ist. Wie verhält sich $\psi_m(x)$ für große $|x|$? Welche Bedingungen muß $m$ erfüllen, damit $\psi_m(x)$ normierbar bleibt? Wie groß sind demnach die Energien $E_m$ der Anregungszustände? **(2 P)**

i) Find an eigenfunction $\psi_0$ and its eigenvalue $k^2$ by using the ansatz

and determining $n$. **(2 P)**

ii) Why is the solution the wave function (up to normalization) and the energy $E_0$ of the ground state? **(1 P)**

iii) One can show that the bound states can be written

where $P_m$ is a polynomial of highest order $m$. What is the asymptotic behavior of $\psi_m(x)$ for large $|x|$? Under which condition for $m$ does the wave function $\psi_m(x)$ remain normalizable? What are the energy eigenvalues $E_m$ of the excited states?**(2 P)**