Theoretische Physik III: Quantenmechanik

Prof. F.Wegner, Universität Heidelberg, SS04
7. Übungsblatt, Präsenzübung 4.06.04, Hausaufgaben Abgabetermin: 7.06.04

P6. Erwartungswerte im Coulombpotential
Berechnen Sie die Erwartungswerte des Radius $\langle r\rangle_{nl}$ und des Radiusquadrats $\langle r^2\rangle_{nl}$ und $(\Delta r)_{nl}$. Benutzen Sie die Orthogonalitätsrelation und Rekursionsformel für Laguerre Polynome

P6. Expectation values in Coulomb Potential
Calculate the expectation values of the the radius $\langle r\rangle_{nl}$, the square of the radius $\langle r^2\rangle_{nl}$ and $(\Delta r)_{nl}$, respectively. Use the following orthogonality and recursion relations for Laguerre polynomials

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dz z^\alpha e^{-z} L_N^\alpha(z) L_M^\alpha(z) &= \frac{(N+\alpha)!}{N!}\delta_{NM}\\ (n+1)\, L_{n+1}^\alpha(z) + (n+\alpha)\, L_{n-1}^\alpha(z) &= (2n+\alpha+1-z)L_n^\alpha(z)\ .\end{aligned}$$

H17. 3 dim. harmonischer Oszillator
Finden Sie die Eigenfunktionen des 3 dim. isotropen harmonischen Oszillators in Kugelkoordinaten.
i) Schreiben Sie zunächst die Schrödingergleichung für den 3 dim. harmonische Oszillator in Kugelkoordinaten. **(1 P)**
ii) Lösen Sie nun die Gleichung für den Radialteil der Wellenfunktion $R(r)$, indem Sie die Gleichung auf die in der Vorlesung behandelte Gleichung

H17. 3–d harmonic Oscillator
Find the eigenfunctions of the 3–d isotropic harmonic oscillator in spherical coordinates.
i) First state the Schrödinger equation of the 3–d harmonic oscillator in spherical coordinates. **(1 P)**
ii) Now solve the equation for the radial part of the wave function $R(r)$. To this end map the equation onto the equation

$$\left(\frac{d^2}{dq^2} - \frac{l'(l'+1)}{q^2} + \frac{q_0}{q} - 1\right) u(q) \quad = \quad 0$$

für den Radialteil einer Wellenfunktion im Coulombpotential mit entsprechend modifiziertem q_0 abbilden. Wie lauten q_0 und l'? Benutzen Sie die Variablentransformation

of the radial part of a wave function in a Coulomb potential, which was given in the lecture. What are now the values of q_0 und l'? Use the variable transformation

$$R(r) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt[4]{q^3}}u(q), \quad q \;=\; \frac{r^2}{2x_0^2} \quad , \quad x_0^2 \;=\; \frac{\hbar}{m\omega}\ . \quad \textbf{(3P)}$$

iii) Geben Sie die Beziehung zwischen Energie und Drehimpuls an. In **P.4** fanden Sie daß ein bestimmter Eigenwert E_n genau $(n+1)(n+2)/2$–fach entartet ist. Wie spaltet die Entartung auf in verschiedene Werte des Drehimpulses?**(1 P)**
iv) Geben Sie die komplette Wellenfunktion in Kugelkoordinaten an.**(1 P)** + einen Extra-Punkt für die Normierung

iii) Give a relation between energy and angular momentum. In **P.4** we found the degree of a given energy eigenvalue E_n to be exactly $(n+1)(n+2)/2$. How does this value decompose into the different values of the angular momentum? **(1 P)**
iv) State the complete wave function in spherical coordinates.**(1 P)** 1 + one extra point for the normalization

H18. Kugelflächenfunktionen
i) Finden Sie die Kugelflächenfunktionen Y_{2m}, $m = -1, 0$ ausgehend von der Kugelflächenfunktion

H18. Spherical harmonics
i) Find the spherical harmonics Y_{2m}, $m = -1, 0$ starting from the spherical harmonic

$$Y_{2-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{-2\mathrm{i}\phi}$$

durch wiederholtes Anwenden des Leiteroperators

by repeatedly applying

$$L_+ = \hbar e^{\mathrm{i}\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{i}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) .(\mathbf{2P})$$

ii) Berechnen Sie Y_{21} und Y_{22} aus

ii) Calculate Y_{21} and Y_{22} with

$$Y_{lm} = (-1)^m Y^*_{l-m} . \quad (\mathbf{2P})$$