Thermodynamik und Statistische Mechanik

Prof. F. Wegner, Universität Heidelberg, SS02

1. Übungsblatt, Abgabetermin: 30.4.02

P1. Diplomarbeit

Ihre Diplomarbeit wird von zwei unabhängigen Freunden Korrektur gelesen. Freund A entdeckt 200 Druckfehler, Freund B 150, wobei 100 identisch sind. Geben Sie eine Abschätzung, wie viele Fehler noch unentdeckt sind, falls alle Fehler gleich auffällig sind.

P1. Diploma Thesis

Your diploma thesis is proofread by two independent friends. Friend A finds 200 typos, friend B 150. Among the discovered typos, 100 are identical. Give an estimate for the typos still missing if all typos are equally apparent.

P2. Statistischer Operator

Kann es sich bei den folgenden Matrizen um die Matrixdarstellung eines statistischen Operators handeln? Geben Sie eine Begründung.

P2. Statistical Operator

Can the following matrices resemble a matrix representation of a statistical operator? Give an explanation.

$$\rho^{(1)} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}, \rho^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 0 \\ 1/5 & 1/3 & 1/5 \\ 0 & 1/4 & 1/3 \end{pmatrix}, \rho^{(3)} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/3 \end{pmatrix}, \rho^{(4)} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

H1. Spin-System

a) Ein Spin-System befinde sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit in den Zuständen $\binom{u}{v}$ und $\binom{u}{-v}$ mit $u^2 + v^2 = 1$. Geben Sie den statistischen Operator und dessen Eigenwerte an. (2 Punkte)

b) Das Spin-System sei in $\vec{e}_z \cos\theta + \vec{e}_x \sin\theta$ bzw. in $\vec{e}_z \cos\theta - \vec{e}_x \sin\theta$ Richtung orientiert. Bestimmen Sie u und v. (Hinweis: $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$, $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$) (2 Punkte)

H1. Spin-System

a) A spin-system shall be with equal likelihood in the states $\binom{u}{v}$ and $\binom{u}{-v}$ where $u^2 + v^2 = 1$. Determine the statistical operator and its eigenvalues. (2 points)

b) The spin-system is oriented in $\vec{e}_z \cos\theta + \vec{e}_x \sin\theta$ and in $\vec{e}_z \cos\theta - \vec{e}_x \sin\theta$ direction, respectively. Determine u and v. (Hint: $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$, $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$) (2 points)

H2. Drei Würfel

Ein Spiel besteht aus dem Wurf von drei Würfeln.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $w_{N_1,N_6}(n_1, n_6)$, daß n_1 Würfel eine Eins und n_6 Würfel eine Sechs zeigen. Stellen Sie eine Tabelle auf. (3 Punkte)

b) Prüfen Sie die folgende Relation nach : (1 Punkt)

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle N_1\rangle$, $\langle N_6\rangle$, $\langle N_1^2\rangle$, $\langle N_6^2\rangle$ und $\langle N_1 N_6\rangle$, sowie die Varianz $(\Delta N_1)^2$ und die Korrelation (Kovarianz) K_{N_1,N_6}. Warum ist K_{N_1,N_6} negativ. (2 Punkte)

H2. Three Dice

A game consists of throwing three dice.

a) What is the probability $w_{N_1,N_6}(n_1, n_6)$ that n_1 dice show a One and n_6 dice show a Six. Display your results in a table. (3 points)

b) Check the following relation : (1 point)

$$\sum_{n_6} w_{N_1,N_6}(n_1, n_6) = w_{N_1}(n_1)$$

c) Evaluate the expectation values $\langle N_1\rangle$, $\langle N_6\rangle$, $\langle N_1^2\rangle$, $\langle N_6^2\rangle$, and $\langle N_1 N_6\rangle$, as well as the variance $(\Delta N_1)^2$ and the correlation (covariance) K_{N_1,N_6}. Why is K_{N_1,N_6} negative. (2 points)