Thermodynamik und Statistische Mechanik

Prof. F. Wegner, Universität Heidelberg, SS02

2. Übungsblatt, Abgabetermin: 7.5.02

P3. Harmonischer Oszillator

Für einen eindimensionalen harmonischen Oszillator der Frequenz ω berechne man den klassischen und den quantenmechanischen Wert von $W(E)$ und vergleiche beide Resultate.

P3. Harmonic Oscillator

Evaluate the classical and the quantum mechanical value of $W(E)$ for a one-dimensional oscillator with frequency ω and compare the results.

P4. Zustandssumme

Betrachten Sie eine lineare Kette N nichtwechselwirkender Spins in einem magnetischen Feld. Die Spins können sich entweder parallel oder antiparallel zur Richtung des Feldes stellen. Die Mikrozustände sind von der Form $r = (s_{z,1}, s_{z,2}, ..., s_{z,N})$ mit $s_{z,\nu} = \pm 1/2$ und haben die Energie $E_r = -2\mu_B B \sum_{\nu=1}^{N} s_{z,\nu}$. Berechnen Sie die Zustandssumme $\Omega(E, B, N)$ im Grenzfall $N \gg 1$. Skizzieren und diskutieren Sie $\ln \Omega$ als Funktion von E. (Hinweis: $\ln n! \approx n \ln(n/e)$ für $n \gg 1$)

P4. Partition Function

Consider a linear chain of N non-interacting spins in a magnetic field. The spins are oriented either parallel or antiparallel with respect to the direction of the field. The microscopic states are given by $r = (s_{z,1}, s_{z,2}, ..., s_{z,N})$ with $s_{z,\nu} = \pm 1/2$ and have the energy $E_r = -2\mu_B B \sum_{\nu=1}^{N} s_{z,\nu}$. Evaluate the partition function $\Omega(E, B, N)$ in the limit $N \gg 1$. Sketch and discuss $\ln \Omega$ as a function of E. (Hint: $\ln n! \approx n \ln(n/e)$ for $n \gg 1$)

H3. Drei Spins

Ein System aus drei Elektronen besitze den Gesamtspin $3/2$ mit $m_z = 1/2$. Der statistische Operator ist somit gegeben durch $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ mit $|\psi\rangle = (|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)/\sqrt{3}$. Bestimmen Sie die verkürzte Dichtematrix für

a) zwei der drei Elektronen und geben Sie deren Eigenwerte an. (2 Punkte)

b) eines der drei Elektronen. (1 Punkt)

H3. Three Spins

A system of three electrons is in the state of total spin $3/2$ and $m_z = 1/2$. The statistical operator is thus given by $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ with $|\psi\rangle = (|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)/\sqrt{3}$. Evaluate the reduced density matrix for

a) two of the three electrons and determine its eigenvalues. (2 points)

b) one of the three electrons. (1 point)

H4. Phasenraumdichte

Betrachten Sie ein klassisches ideales Gas mit der Phasenraumdichte

H4. Density of the Phase-Space

Consider a classical ideal gas with the density of the phase-space given as

$$\rho(H) = \frac{\Theta(E-H)}{\phi_N(E)} \quad .$$

Um wieviel weicht für dieses ρ der Erwartungswert $\langle H \rangle$ von E ab. (3 Punkte)

For this ρ, to what extent does the expectation value $\langle H \rangle$ deviate from E. (3 points)

H5. Normalverteilung

N (nichtwechselwirkende) magnetische Momente mit den möglichen Einstellungen "$\uparrow$" and "$\downarrow$" seien unabhängig voneinander mit den Wahrscheinlichkeiten $p_\uparrow$ und $p_\downarrow = 1 - p_\uparrow$ ausgerichtet. Die Wahrscheinlichkeit $w_{N_\uparrow}(n)$, daß dabei n Momente die Einstellung "$\uparrow$" zeigen, ist dann laut Vorlesung näherungsweise

H5. Gaussian Distribution

N (non-interacting) magnetic moments with the possible orientations "$\uparrow$" and "$\downarrow$" shall be independently oriented with the likelihood $p_\uparrow$ und $p_\downarrow = 1 - p_\uparrow$. The probability $w_{N_\uparrow}(n)$ that n moments show the orientation "$\uparrow$" is then according to the lecture approximately given by

$$w_{N_\uparrow}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N p_\uparrow p_\downarrow}} \exp\left(-\frac{(n - N p_\uparrow)^2}{2 N p_\uparrow p_\downarrow}\right) \quad .$$

a) Man vergleiche $w_{N_\uparrow}(n)$ für $N = 10$, $p_\uparrow = 0.7$, $n = 3$ und $n = 5$ mit dem exakten Resultat der Binomialverteilung. (2 Punkte)

b) Man schätze die Wahrscheinlichkeit ab, daß $n \leq 0.69N$ für $p_\uparrow = 0.7$, $N = 10^2$ und $N = 10^4$. (2 Punkte)

a) Compare $w_{N_\uparrow}(n)$ for $N = 10$, $p_\uparrow = 0.7$, $n = 3$ and $n = 5$ with the exact result of the binomial distribution. (2 points)

b) Give an estimate for the probability that $n \leq 0.69N$ for $p_\uparrow = 0.7$, $N = 10^2$ and $N = 10^4$. (2 points)