Thermodynamik und Statistische Mechanik

Prof. F. Wegner, Universität Heidelberg, SS02

3. Übungsblatt, Abgabetermin: 14.5.02

P5. Ideales Gas

Berechnen Sie für ein ideales Gas die folgenden Erwartungswerte bezüglich des kanonischen Ensembles:

P5. Ideal Gas

For an ideal gas, calculate the following expectation values with respect to the canonical ensemble:

$$\langle p_{ix}^4 \rangle \quad , \quad \langle p_{ix}^2 p_{iy}^2 \rangle \quad , \quad \langle p_{i\alpha}^2 p_{j\beta}^2 \rangle \quad , \quad i \neq j$$

H6. Wärmekontakt

Zwei ideale klassische Gase mit den Teilchenzahlen N_1, N_2, den Volumina V_1, V_2 und den Energien E_1, E_2 stehen in thermischem Kontakt.

a) Zeigen Sie, daß für $\omega(E)$ des Gesamtsystems die folgende Beziehung gilt: (2 Punkte)

H6. Heat Contact

Two sets of ideal classical gases with the number of particles N_1, N_2, the volumes V_1, V_2 and the energies E_1, E_2 are in thermal contact.

a) Show that for $\omega(E)$ of the total system the following relation holds: (2 points)

$$\omega(E) = \int_0^E dE_1 \omega_1(E_1)\omega_2(E - E_1)$$

b) Man berechne $W(E)$ des Gesamtsystems und vergleiche das Ergebnis mit der Näherungslösung

b) Evaluate $W(E)$ of the total system and compare the result with the approximate solution

$$W(E) \approx \max[W_1(E_1)W_2(E - E_1)] \quad .$$

(Hinweis: Benutzen Sie die folgende Integraldarstellung der Beta-Function.) (2 Punkte)

(Hint: Use the following integral representation of the beta-function) (2 points)

$$B(x, y) = \int_0^1 dt t^{x-1}(1-t)^{y-1} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

H7. Temperaturausgleich

Zwei Mengen idealen Gases (Volumina V_1, V_2; Teilchenzahlen $N_1 = N_2 = N$) mit den Anfangstemperaturen T_1 und T_2 werden in Wärmekontakt gebracht. Mechanische Arbeit oder Wärmeaustausch mit der Umgebung finde nicht statt. Man berechne die Entropieänderung ΔS zwischen Anfangs- und Endzustand, nachdem sich das thermische Gleichgewicht eingestellt hat. Zeigen Sie, daß $\Delta S \geq 0$ gilt. (3 Punkte)

H8. Stirlingsche Formel

Benutzen Sie die Integraldarstellung der Γ-Function $n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty dx x^n e^{-x}$ und $x^n = e^{n \ln x}$, um die Stirlingsche Formel $n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ abzuleiten, welche für $n \gg 1$ gilt. Geben Sie auch den führenden Korrekturterm an, und bestimmen Sie den Gültigkeitsbereich der Näherung. (Hinweis: Sattelpunktsnäherung - Entwickeln Sie den Exponenten des Integanden um $x_0 = n$.) (3 Punkte)

H7. Balance of Temperature

Two sets of an ideal gas (volumes V_1, V_2; number of particles $N_1 = N_2 = N$) with initial temperatures T_1 and T_2 are brought into thermal contact. There are no mechanical processes nor temperature exchange with the environment. What is the difference of entropy ΔS between the initial and final state, after thermal equilibrium has recalibrated itself. Show that $\Delta S \geq 0$ holds. (3 points)

H8. Stirling Formula

Employ the integral representation of the Γ-function $n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty dx x^n e^{-x}$ and $x^n = e^{n \ln x}$ in order to derive the Stirling formula $n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$, valid for $n \gg 1$. Determine also the leading correction term and give an estimate for the validity of the approximation. (Hint: Saddle-point expansion - Taylor expansion of the exponent of the integrand around $x_0 = n$.) (3 points)