

Cherenkov Strahlung

Alessandro Simon

15. Mai 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Historisches	1
2	Theoretische Beschreibung	2
3	Anwendungen	6
3.1	H.E.S.S. Teleskop	7
3.2	Super-Kamiokande	7

1 Historisches

Im Jahre 1934 entdeckte *Pavel Cherenkov* während seiner Forschungsarbeit die nach ihm benannte Cherenkov Strahlung (in Russland auch Vavilov-Cherenkov Strahlung genannt). Nach dem Studium ging Cherenkov für seine Promotion an das Lebedev-Institut in Moskau wo ihm der Institutsleiter *Sergei Vavilov* einige Forschungsgebiete vorschlug. Er entschied sich für das Gebiet der Fluoreszenz (Vavilov hatte hier bereits Erfolge verzeichnet), speziell die der Uransalze. Diese löste er in verschiedenen Lösungsmitteln auf und bestrahlte sie mit γ -Strahlung (s. Abb. 1).¹

Die schnellen Photonen bewirkten, dass die Atome der Salze angeregt wurden und Licht emittierten sobald sie in einen tieferen Zustand wechselten. Während seiner Untersuchungen fiel ihm auf, dass Flüssigkeiten ohne gelöstes Salz, also schon die Lösungsmittel allein leuchteten. Diese

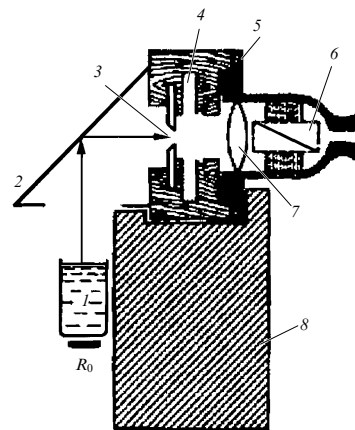


Abbildung 1: Messapparatur

¹ R_0 : Strahlenquelle, 1: Lösung

Beobachtung veranlasste Cherenkov fast dazu sein Forschungsthema zu ändern, da er dachte dass die von ihm beabsichtigten Messungen so unmöglich wären. Jedoch konnte Vavilov ihn überzeugen weiter an der unbekanntem Strahlung zu arbeiten. Diese wurde dann zunächst mit Fluoreszenz der Lösungsmittel selbst begründet. Um diese Theorie weiter zu festigen wurden Effekte der Fluoreszenzlöschung verwendet. Dazu gehört das Hinzufügen von Quenchern die die Energie der angeregten Atome in Form von kinetischer Energie übernehmen sollen was die Helligkeit des erzeugten Lichts vermindert. Allerdings änderte sich nichts am Leuchten der Flüssigkeit.

Da es sich nun scheinbar nicht um Fluoreszenz handelte mutmaßte man die Strahlung könnte etwas mit schnellen Elektronen in der Flüssigkeit zu tun haben. Diese These wurde unterstützt durch die Tatsache, dass sich die Richtung der Strahlung durch Anlegen eines Magnetfeldes änderte. Eine vollständige Erklärung wurde jedoch nicht gefunden.

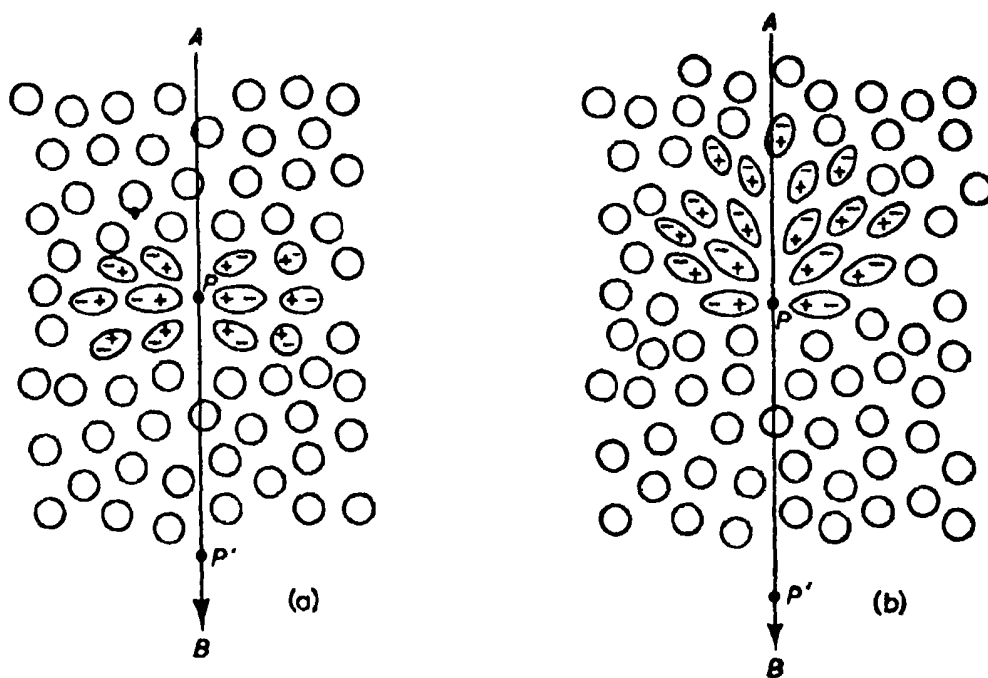


Abbildung 2: Polarisierung des Mediums

2 Theoretische Beschreibung

Die Antwort auf die Herkunft der Strahlung lieferten im Jahr 1937 die, auch am Lebedev-Institut beschäftigten, Theoretiker *Igor Tamm* und *Ilja Frank*. Zusammen mit Cherenkov erhielten sie hierfür 1958 den Nobelpreis für Physik.

Für die theoretische Beschreibung gehen wir davon aus, dass ein geladenes Teilchen durch ein polarisierbares Medium fliegt. Wie man in Abb. 2 sieht, werden die Atome des Mediums polarisiert. Diese Polarisation findet mit einer endlichen Geschwindigkeit statt (nämlich c/n , mit n : Brechungsindex im Medium).

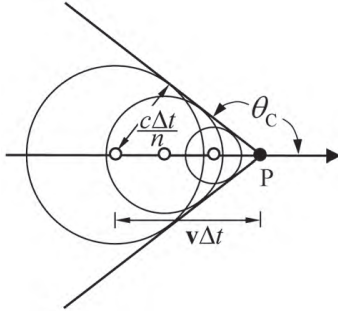


Abbildung 3: Interferenz der Wellen

Die Grundannahme ist die, dass das geladene Teilchen auf jedem Punkt seines Weges eine elektromagnetische Elementarwelle auslöst. In Abb. 2 (a) ist die Teilchengeschwindigkeit klein gegenüber c_n ² und die Polarisierung in alle Richtungen symmetrisch, sodass alle entstehenden Wellen sich gegenseitig auslöschen. In Abb. 2 (b) ist das Teilchen nun schneller als c_n , was zur Folge hat, dass die Polarisierung langsamer als das Teilchen ist, wodurch die Symmetrie entlang der Bewegungsrichtung verloren geht. Die entstehenden Wellen können sich konstruktiv überlagern. Um zu verstehen wann dies der Fall ist betrachten wir Abb. 3. Die vom Teilchen ausgesendeten Kugelwellen breiten sich mit der Geschwindigkeit c_n aus, das Teilchen selbst mit v . Die Wellen überlagern sich zu einem Kegel mit Außenwinkel θ_c wenn gilt³

$$\sin \theta_c = \frac{c_n}{v} = \frac{1}{\beta n}$$

Dies ist die Grundvoraussetzung damit Cherenkov Strahlung entstehen kann. Ausserdem folgt hieraus die Minimalgeschwindigkeit des Teilchens und der maximale Winkel des Kegels

- $\beta_{\min} = 1/n$
- $\theta_{\max} = \arcsin 1/n$

Für die Berechnung benutzen wir, anders als Tamm und Frank, die Liénard-Wiechert-Potentiale

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{q}{R - \beta R} \right]_{\text{ret}} \quad (1)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \left[\frac{q\mathbf{v}}{R - \beta R} \right]_{\text{ret}} \quad (2)$$

² $c_n = c/n$

³ $v/c = \beta$

Das Kürzel **ret** deutet an, dass die Größen in der Klammer zur retardierten Zeit t_{ret} ausgewertet werden müssen. Um diese zu ermitteln betrachten wir die Geometrie des Problems (s. Abb. 4). Es gilt

$$\mathbf{R}_{\text{ret}} = \mathbf{R} + \mathbf{v}(t - t_{\text{ret}}) \quad (3)$$

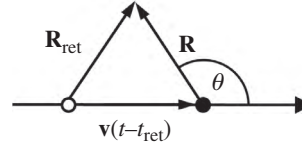


Abbildung 4: Position zu versch. Zeiten

Quadriert man diese Gleichung und betrachtet $t - t_{\text{ret}}$ als Variable gelangt man zu der quadratischen Gleichung

$$t - t_{\text{ret}} = \frac{-\mathbf{v} \cdot \mathbf{R} \pm \sqrt{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^2 - (v^2 - c_n^2)R^2}}{v^2 - c_n^2} \quad (4)$$

Aus der Positivität von Gleichung (4) können wir schon zwei Schlüsse ziehen

- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{R} < 0 \implies \theta > \frac{\pi}{2}$
- $\sin \theta \leq \sin \theta_c = 1/\beta_n$

Rechnet man den Term aus Gleichung (4) aus vereinfacht sie die Wurzel zu

$$Rv\sqrt{\frac{c_n^2}{v^2} - \sin^2 \theta}$$

Die Lösung aus Gleichung (4) kann man dann über Gleichung (2) in die Liénard-Wiechert-Potentiale einsetzen ⁴

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \frac{q}{R(1 - \beta_n^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \Theta(\cos \theta_c - \cos \theta) \quad (5)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{2\pi} \frac{q\mathbf{v}}{R(1 - \beta_n^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \Theta(\cos \theta_c - \cos \theta) \quad (6)$$

Aus den Potentialen folgen schließlich über

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

die Vektorfelder \mathbf{E} und \mathbf{B}

⁴Die Θ -Funktion folgt aus der zweiten Bedingung oben

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{2\pi\epsilon} \frac{(\beta_n^2 - 1)\hat{\mathbf{R}}}{R^2(1 - \beta_n^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \Theta(\cos \theta_c - \cos \theta) + \frac{1}{2\pi\epsilon} \frac{\sqrt{\beta_n^2 - 1}\hat{\mathbf{R}}}{R^2\beta_n(1 - \beta_n^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \delta(\cos \theta_c - \cos \theta) \quad (7)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}}{c_n^2} \sin \theta (-\hat{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{E}) \quad (8)$$

An Gleichung (7) erkennt man, dass das E-Feld aus zwei Komponenten besteht. Die Erste sorgt für ein Feld innerhalb des Kegels, dass in Richtung der Ladung zeigt. Der zweite Teil ist ein singuläres Feld (δ -Funktion) auf der Kegeloberfläche das zum Beobachter zeigt. Um das Frequenzspektrum zu bestimmen bilden wir die Fouriertransformation des zeitabhängigen Feldes $\mathbf{E}(t)$. Dieses finden wir auf folgende Art. Wir legen den Ursprung des Koordinatensystems zur bewegten Ladung (s. Abb. 5). Die Position des Beobachters zur Zeit $t = 0$ ist $(R(0), \theta_c)$. Nehmen wir an, dass $R(0) \approx R(t) \gg vt$ und $\Delta\theta \ll 1$, folgen durch $\theta(t) = \theta_c + \Delta\theta$ die Näherungen

$$\Delta\theta \approx vt \frac{\sin \theta_c}{R(0)} \quad (9)$$

$$\cos \theta_c - \cos \theta(t) = \cos \theta_c - \cos \theta_c + \Delta\theta \approx \sin \theta_c \Delta\theta = \frac{c_n t}{\beta_n R(0)} \quad (10)$$

$$1 - \beta_n^2 \sin^2 \theta(t) \approx -2\beta_n^2 \cos \theta_c \sin \theta_c \Delta\theta = \frac{2c_n t \sqrt{1 - \beta_n^2}}{R(0)} \quad (11)$$

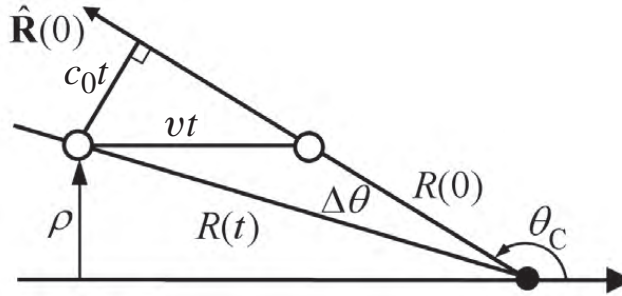


Abbildung 5: Zeitabhängiges Feld

Eingesetzt erhalten wir für das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(t) \approx \frac{q(\beta_n^2 - 1)^{1/4}}{(2c_n)^{3/2}\pi\epsilon\sqrt{R(0)}} \left[\frac{\delta(t)}{\sqrt{t}} - \frac{\Theta(t)}{2t^{3/2}} \right] \quad (12)$$

Die Fouriertransformation führen wir mithilfe von partieller Integration durch und erhalten

$$\mathbf{E}(\omega) \approx \frac{i\omega q(\beta_n^2 - 1)^{1/4}}{(2c_n)^{3/2}\pi\epsilon\sqrt{R(0)}} \hat{\mathbf{R}}(0) \int_0^\infty dt t^{-1/2} e^{i\omega t} = \frac{q(\beta_n^2 - 1)^{1/4}\omega^{1/2}}{4\sqrt{\pi}c_n^{3/2}\epsilon\sqrt{R(0)}} (1 - i)\hat{\mathbf{R}}(0) \quad (13)$$

Nun wollen wir die abgestrahlte Energie in Abhängigkeit der Frequenz bestimmen, also das Frequenzspektrum. Der Faktor $\sqrt{R(0)}$ legt Nahe dass es sich um eine zylindrische Welle handelt. Daher folgt

$$\frac{d^2U}{d\omega dA} = \frac{\epsilon c_n}{\pi} \|\mathbf{E}(\omega)\|^2 \quad (14)$$

Um nicht die Energie pro Flächenelement dA sondern pro Längeneinheit $d\ell$ zu erhalten müssen wir mit dem Umfang eines Kreises mit Radius ρ multiplizieren

$$\frac{d^2U}{d\omega d\ell} = 2\pi\rho(\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot (-\hat{\boldsymbol{\theta}})) \frac{d^2U}{d\omega dA} \quad (15)$$

Eingesetzt mit den Größen aus Abb. 5 erhalten wir schließlich

$$\frac{d^2U}{d\omega d\ell} = -2\pi \sin\theta_c \cos\theta_c \frac{d^2U}{d\omega dA} \quad (16)$$

Zusammen mit Gleichung (13) und (14) folgt

$$\frac{d^2U}{d\omega d\ell} = \frac{\mu(\omega)q^2}{4\pi} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2(\omega)}\right) \quad \text{bzw.} \quad (17)$$

$$\frac{d^2U}{d\ell} = \frac{q^2}{4\pi} \int_{v > \frac{c}{n(\omega)}} \mu(\omega)\omega \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2(\omega)}\right) d\omega \quad (18)$$

Am Endergebnis (auch Tamm-Frank-Formel genannt) sehen wir warum die Cherenkov Strahlung auf Fotos immer bläulich wirkt. Die Intensität des Lichts ist direkt proportional zur Frequenz, und da blaues Licht das sichtbare Licht mit der größten Frequenz ist überwiegt es im Spektrum. Nun kann so Aussehen, dass die abgestrahlte Energie unbeschränkt ist, da das Integral proportional zu ω ist und wir über alle Frequenzen integrieren müssen, dies ist jedoch natürlich nicht der Fall. Wie in Gleichung (18) angemerkt ist der Brechungsindex n nicht konstant sondern hängt von der Frequenz des Lichts ab. Für hohe Frequenzen geht n gegen 1 und die Bedingung

$$v > \frac{c}{n(\omega)}$$

kann nicht mehr erfüllt werden (hier handelt es sich um die Vakuumlichtgeschwindigkeit), weshalb keine Strahlung mehr emittiert wird. Neben der Frequenz ist die Strahlung auch proportional zur Permeabilität μ des Mediums was Sinn macht, da der Effekt ja auf der Polarisierung des Mediums beruht. Aus dem Klammer-Ausdruck folgt, dass die Intensität mit höheren Geschwindigkeiten steigt. (Allerdings beschränkt, da $v < c$)

3 Anwendungen

Der Cherenkov Effekt findet in vielen Teilgebieten der Physik Anwendung, vor allem zur Detektion von Teilchen. Im Folgenden werden kurz zwei wichtige Projekte beschrieben, die den Cherenkov Effekt nutzen um bestimmte Größen zu messen. Bei beiden wird sowohl die Intensität als auch die Richtung ⁵ der Strahlung genutzt.

3.1 H.E.S.S. Teleskop

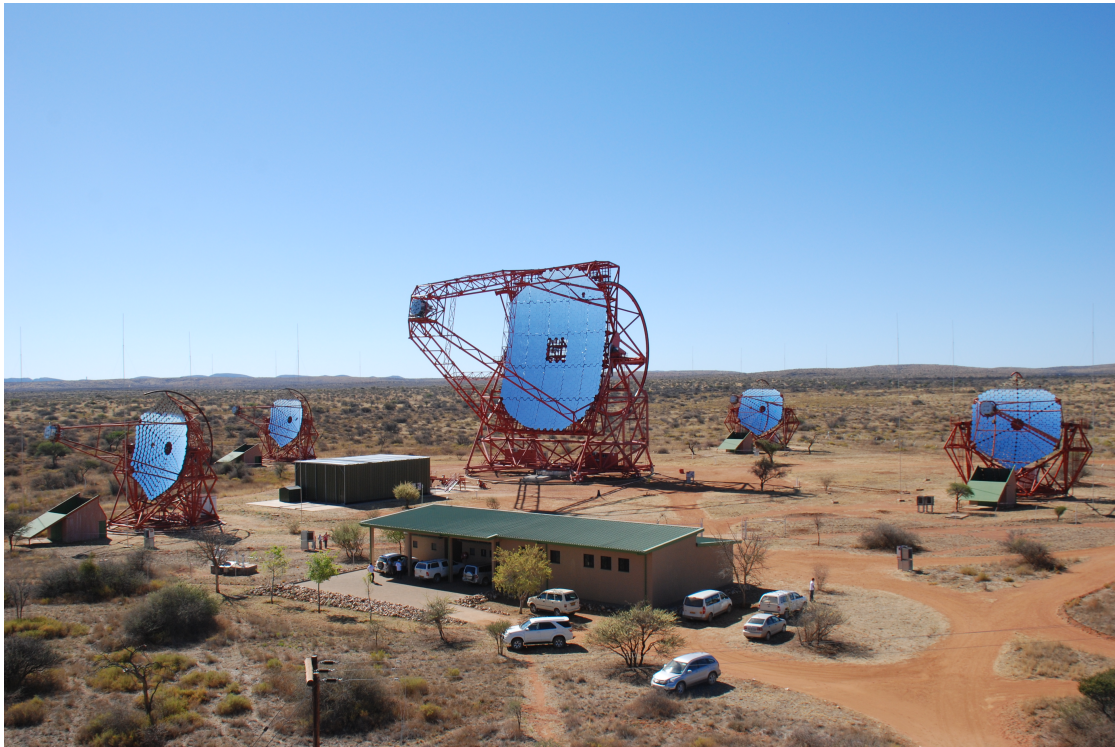


Abbildung 6: Das H.E.S.S Teleskop

Beim H.E.S.S. Teleskop (*High Energy Stereoscopic System*) handelt es sich um mittlerweile fünf Spiegelteleskope, die in der Wüste von Namibia aufgestellt sind. Mit die-

⁵Zur Bestimmung des Ursprungs der Teilchen

sen möchte man die Quellen von hochenergetischer γ -Strahlung untersuchen. Tritt γ -Strahlung, mit Energien im TeV-Bereich, in die Atmosphäre ein, entstehen durch Paarbildung Elektronen-Positronen Paare, die wiederum durch Bremsstrahlung, neue γ -Strahlung emittieren. Durch diesen Kreislauf entstehen viele schnelle geladene Teilchen, die, nun mit Luft als Medium, Cherenkov Strahlung aussenden. Diese wird aus einer Höhe von ca. 10 km innerhalb von Nanosekunden Richtung Erde gestrahlt wo sie von den Teleskopen registriert wird. Da nur einige wenige Photonen pro m^2 am Boden ankommen können nur bei optimalen Bedingungen (d.h. z.B. kein Mondlicht) Messungen vorgenommen werden (ca. 1000 h im Jahr).

3.2 Super-Kamiokande

Ein weiteres Beispiel ist der Neutrino Detektor Super-Kamiokande (s. Abb. 7). Es handelt sich im Grunde um einen Tank, der mit 50 000 t hochreinem Wasser gefüllt ist und an der Oberfläche mit Photomultipliern ausgekleidet ist. Um die, beim H.E.S.S. Teleskop noch essentielle, kosmische Strahlung abzuschirmen liegt der Detektor ca. 1 km unter der Erdoberfläche. Die Cherenkov Strahlung wird hier durch andere Effekte hervorgerufen.

Die elektrisch neutralen Neutrinos die z.B. von der Sonne zu uns gelangen, können mit einer geringen Wahrscheinlichkeit mit dem Wasser in den Tanks wechselwirken und so geladene Teilchen entstehen lassen. Diese führen dann bekannterweise zu Cherenkov Strahlung die mit den Photomultipliern aufgezeichnet wird. Aus dem Durchmesser der „Kegelböden“ und der Schärfe der Ränder (s. Abb. 8) kann man Rückschlüsse auf die detektierten Teilchen ziehen (z.B. deren Masse).

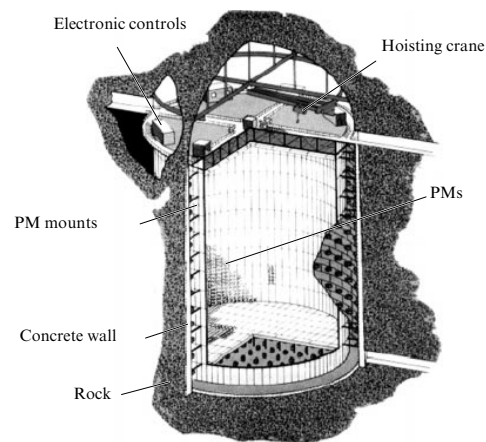


Abbildung 7: Super-Kamiokande

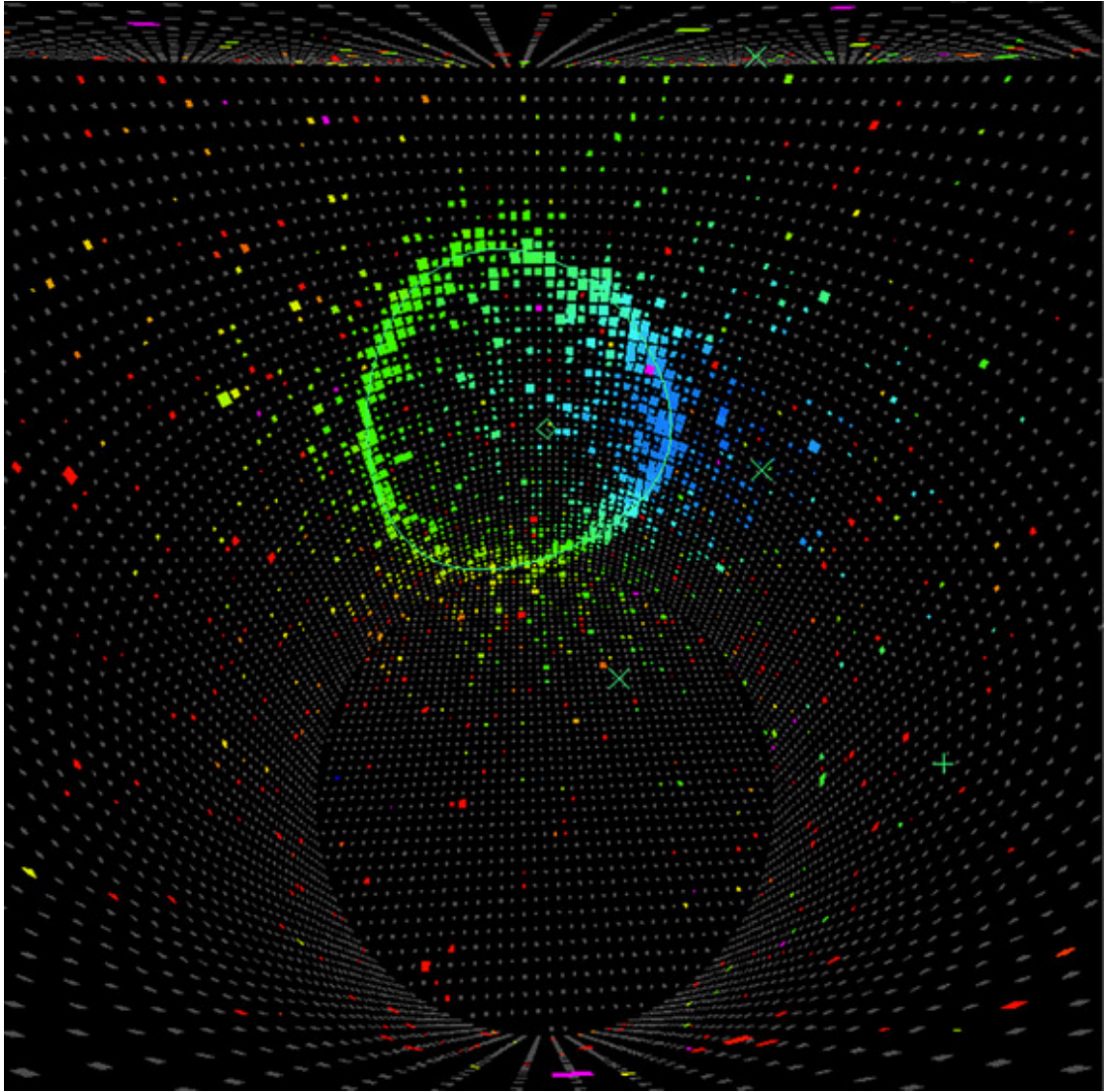


Abbildung 8: Beispiel eines Events

Literatur

- [1] URL: www.wikipedia.org.
- [2] Boris M Bolotovskii. "Vavilov – Cherenkov radiation: its discovery and application". In: *Physics-Uspeski* 52.11 (2009), S. 1099. URL: <http://stacks.iop.org/1063-7869/52/i=11/a=R03>.
- [3] J V Jelley. "Cerenkov radiation and its applications". In: *British Journal of Applied Physics* 6.7 (1955), S. 227. URL: <http://stacks.iop.org/0508-3443/6/i=7/a=301>.
- [4] K. Kleinknecht. *Detektoren für Teilchenstrahlung*. Teubner Studienbücher Physik. Vieweg+Teubner Verlag, 2005. ISBN: 9783835100589. URL: <https://books.google.de/books?id=Ythy5VR3TjkC>.
- [5] Ig. Tamm. "Radiation Emitted by Uniformly Moving Electrons". English. In: *Selected Papers*. Hrsg. von BorisM. Bolotovskii, VictorYa. Frenkel und Rudolf Peierls. Springer Berlin Heidelberg, 1991, S. 37–53. ISBN: 978-3-642-74628-4. DOI: 10.1007/978-3-642-74626-0_3. URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-74626-0_3.
- [6] Andrew Zangwill. *Modern electrodynamics*. Cambridge University Press, 2012.