
Das Feynman'sche Pfadintegral

Stefan Knirck

Zusammenfassung zum Vortrag vom 31.1.2014

Inhaltsverzeichnis

Einleitung <i>oder</i> Pfadintegral – Bitte was?	1
Herleitung.....	1
Einige Eigenschaften des Propagators	4
Beispiel: Der Harmonische Oszillator	5
Ausblick – Anwendungen des Pfadintegrals	8
Literatur	9

Einleitung *oder* Pfadintegral – Bitte was?

Die Feynman'sche Pfadintegralformulierung ist neben dem bekannten Matrix-Formalismus und der Formulierung mit Wellenfunktionen und der Schrödinger-Gleichung eine weitere Formulierung der Quantenmechanik.

Im Mittelpunkt dieses Formalismus steht der sogenannte Propagator:

$$K(b; a) \equiv K(x_b, t_b; x_a, t_a)$$

Er steht im Gegensatz zu der Wellenfunktion in den bisher behandelten Formalismen:

$$\Psi(x, t)$$

Gibt das Betragsquadrat der Wellenfunktion eines Teilchens die Wahrscheinlichkeit an, das Teilchen zum Zeitpunkt t am Ort x zu finden, so gibt das Betragsquadrat des Propagators die Wahrscheinlichkeit an, das Teilchen am Ort x_b zur Zeit t_b zu finden, sofern es zum Zeitpunkt t_a am Ort x_a war.

Wir möchten im Folgenden einen Ausdruck für K herleiten, was uns schließlich zum Feynman'schen Pfadintegral führen wird.

Herleitung

Um einen Ausdruck für den Propagator herzuleiten, stellen wir den Zeitentwicklungsoperator im Ortsraum dar:

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \langle x_b | U(t_b, t_a) | x_a \rangle \quad \text{mit} \quad U(t_b; t_a) = \tau \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt H(t)\right)$$

Außerdem nehmen wir im Folgenden vereinfachend an:

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + V(x, t) \quad (1)$$

und setzen der Übersichtlichkeit wegen $\hbar = 1$.

Wir möchten nun U in infinitesimalen Zeitschritten entwickeln. Dafür führen wir ein:

$$t_b \equiv t_{n+1} \geq t_n \geq \dots \geq t_1 \geq t_0 \equiv t_a \quad \text{und} \quad \varepsilon \equiv \frac{t_b - t_a}{n+1}$$

$$x_b \equiv x_{n+1} \quad ; \quad x_a \equiv x_0$$

Damit ergibt sich für K:

$$\begin{aligned} K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \langle x_{n+1} | U(t_{n+1}, t_n) U(t_n, t_{n-1}) \cdots U(t_1, t_0) | x_0 \rangle \\ &= \left(\prod_{i=1}^n \int dx_i \right) \prod_{i=1}^{n+1} \underbrace{\langle x_i | U(t_i, t_{i-1}) | x_{i-1} \rangle}_{\equiv K(i, i-1)} \end{aligned} \quad (2)$$

Wobei wir im letzten Schritt n Einsen $\int dx_i |x_i\rangle \langle x_i| = 1$ eingefügt haben.

Für einen infinitesimalen Zeitschritt erhalten wir nun:

$$\begin{aligned} K(i, i-1) &= \langle x_i | \exp\{-i\varepsilon H\} | x_{i-1} \rangle \\ &\quad \quad \quad T+V \\ &= \langle x_i | \exp\{-i\varepsilon V\} \exp\{-i\varepsilon T\} \exp\{-i\varepsilon^2 X\} | x_{i-1} \rangle \quad ; \quad \text{mit} \quad X = \frac{i}{2}[V, T] + \mathcal{O} \end{aligned}$$

Da wir ε gegen 0 gehen lassen wollen, wird ε^2 schneller gegen 0 und damit die Exponentialfunktion in X schneller gegen 1 gehen als die Exponentialfunktionen linear in ε , sofern V und T unendlich oft differenzierbare Funktionen ohne Singularitäten sind. Für $T = \frac{p^2}{2m}$ ist dies sicherlich erfüllt, für V nicht unbedingt. Beispielsweise hat das Coulomb-Potential bei $x = 0$ eine Singularität; für solche Potentiale siehe das Vorgehen nach Duru & Kleinert (Wasserstoffatom).

Für hinreichend kleines ε erhalten wir also:

$$\begin{aligned} K(i, i-1) &\approx \langle x_i | \exp\{-i\varepsilon V\} \exp\{-i\varepsilon T\} | x_{i-1} \rangle \\ &= \int \frac{dp_i}{2\pi} \langle x_i | \exp\{-i\varepsilon V\} | p_i \rangle \langle p_i | \exp\{-i\varepsilon T\} | x_{i-1} \rangle \\ &= \int \frac{dp_i}{2\pi} \exp\{-i\varepsilon V_i\} \underbrace{\langle x_i | p_i \rangle}_{\exp(ip_i x_i)} \exp\{-i\varepsilon T(p_i)\} \underbrace{\langle p_i | x_{i-1} \rangle}_{\exp(-ix_{i-1} p_i)} \quad \text{wobei } V_i \equiv V(x_i, t_i) \\ &= \int \frac{dp_i}{2\pi} \exp\left\{ i \left[p_i (x_i - x_{i-1}) - \varepsilon \left(\frac{p_i^2}{2m} + V_i \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Setzt man diesen Ausdruck wieder in (2) ein, erhält man:

$$\begin{aligned} K(b; a) &= \langle x_{n+1} | U(t_{n+1}, t_n) U(t_n, t_{n-1}) \cdots U(t_1, t_0) | x_0 \rangle \\ &= \left(\prod_{i=1}^n \int dx_i \right) \left(\prod_{i=1}^{n+1} \int \frac{dp_i}{2\pi} \right) \exp\{iS^{(n)}\} \end{aligned}$$

$$\text{mit: } S^{(n)} = \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon \left[p_i \frac{1}{\varepsilon} (x_i - x_{i-1}) - \frac{p_i^2}{2m} - V_i \right]$$

$S^{(n)}$ ist bei genauerer Betrachtung bereits eine diskretisierte Version der Wirkung als Zeitintegral über die Lagrange-Funktion, während die Lagrange-Funktion hier als Legendre-Transformierte der Hamiltonfunktion steht.

Um einen einfacheren Ausdruck zu erhalten, können wir nun noch die Integrale über die p_i ausführen und erhalten mit

$$\int \frac{dp_i}{2\pi} \exp \left\{ ip_i(x_i - x_{i-1}) - i\varepsilon \frac{p_i^2}{2m} \right\} = \underbrace{\sqrt{\frac{m}{2\pi i\varepsilon}}}_{\equiv A^{-1}} \exp \left\{ im \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2\varepsilon} \right\}$$

folgenden Ausdruck für den Propagator:

$$K(b; a) \approx \left(\prod_{i=1}^n \int dx_i \right) \frac{1}{A^{n+1}} \exp \left\{ i \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon \underbrace{\left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\varepsilon} \right)^2 - V_i \right]}_{\equiv \tilde{S}^{(n)}} \right\}$$

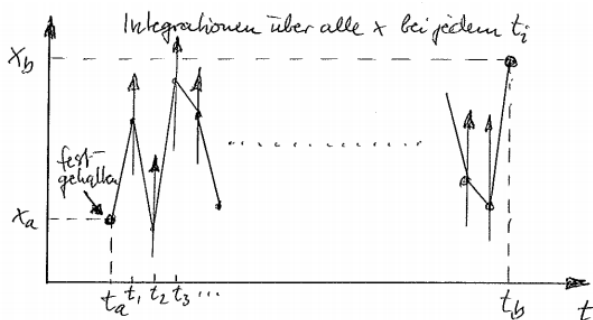
$\tilde{S}^{(n)}$ ist nun eine diskretisierte Version der Wirkung, die nur noch von der Lagrange-Funktion L abhängt, also nur noch von x , der Zeitableitung von x und t .

Im kontinuierlichen Grenzfalle erhalten wir damit

$$\tilde{S}^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S(b; a) = \int_{t_a}^{t_b} dt L(t) \quad \text{mit} \quad L(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x, t)$$

sowie für den gesamten Ausdruck:

$$K(b; a) \approx \left(\prod_{i=1}^n \int dx_i \right) \frac{1}{A^{n+1}} \exp \{ i \tilde{S}^{(n)} \} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K(b; a) = \int_{x_a}^{x_b} \mathcal{D}x \exp \{ i \cdot S(b; a) \} \quad (3)$$



Das Integral in (3) ist das sogenannte Pfadintegral. Seinen Namen hat es ausgehend von der Tatsache, dass wir hier über alle Pfade vom Punkt x_a zum Punkt x_b integrieren. Dieses Integrieren über alle Pfade kann man sich anschaulich leicht an nebenstehender Skizze klar machen.

Für jeden Zeitschritt t_i integrieren wir im diskreten Fall einmal über alle Orte x_i , was sich im kontinuierlichen Fall zu einem Integral über

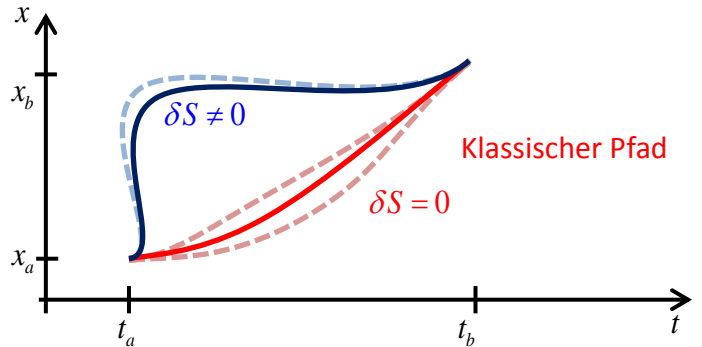
alle Pfade vom Ort x_a zum Zeitpunkt t_a bis zum Ort x_b zum Zeitpunkt t_b ergibt.

Einige Bemerkungen:

- Wir integrieren wirklich über alle möglichen Pfade, das heißt auch Pfade, bei denen das Teilchen völlig nicht-klassische Pfade durchläuft, Zitterbewegungen ausführt oder zwischenzeitlich mit Überlichtgeschwindigkeit reisen muss.
- Die Pfade laufen nur vorwärts in der Zeit.
Verallgemeinert man das Pfadintegral relativistisch, muss die Zeitkoordinate als gleichberechtigte Koordinate neben den Ortskoordinaten angesehen werden, so dass das Teilchen auch rückwärts in der Zeit reisen kann (Antiteilchen).
Die Rolle der Zeit wird dann von einem Parameter τ abgelöst.

- An dieser Stelle wird nichts über das Konvergenzverhalten im kontinuierlichen Fall für dieses sogenannte Funktionalintegral gesagt; wer sich für die mathematischen Hintergründe interessiert, dem sei Funktionalanalysis ans Herz gelegt.

Ein wichtiger Fakt ist außerdem, dass wir über Wirkungen als Phasenfaktoren einer Exponentialfunktion integrieren. Da für klassische Pfade die Variation der Wirkung verschwindet, addieren sich die Beiträge, die Pfade nahe dem klassischen Pfad liefern, auf (konstruktive Interferenz). Für Pfade, die weit weg vom klassischen Pfad liegen, verschwindet die Variation der Wirkung dagegen nicht und der Phasenfaktor oszilliert sehr stark, sodass sich Pfade, die weit weg vom klassischen Pfad liegen, gegenseitig auslöschen.



Für große Wirkungen wird der Bereich, in dem die Pfade um den klassischen Pfad konstruktiv interferieren immer schmaler, sodass für makroskopische Systeme, d.h. im klassischen Grenzfall, nur noch der klassische Pfad erlaubt ist. Hier wird also unmittelbar der Grenzübergang zur klassischen Mechanik deutlich.

Einige Eigenschaften des Propagators

Einige Wichtige Eigenschaften des Propagators, die hier nur kurz genannt sein sollen.

$$K(x_b, t_a; x_a, t_a) = \langle x_b | x_a \rangle = \delta(x_b - x_a)$$

$$\begin{aligned} K(c; a) &= \langle x_c | U(t_c, t_a) | x_a \rangle \\ &= \int d^3x_b \langle x_c | U(t_c, t_b) | x_b \rangle \langle x_b | U(t_b, t_a) | x_a \rangle \\ &= \int d^3x_b K(c; b) K(b; a) \end{aligned}$$

Zusammenhang mit der Wellenfunktion:

$$\begin{aligned} K(f; i) &= \langle x_f | U(t_f, t_i) | x_i \rangle \\ &= \sum_n \langle x_f | U(t_f, t_i) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | x_i \rangle \\ &= \sum_n \langle x_f | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | x_i \rangle \exp(-iE_n T) \\ &= \sum_n \Psi_n(x_f) \Psi_n^\dagger(x_i) \exp(-iE_n T) \end{aligned}$$

$$\sum_n |\Psi_n\rangle \langle \Psi_n| = 1$$

$$T = t_f - t_i$$

$$\begin{aligned} \Psi(x_f) &= \langle x_f | U(t_f, t_i) | \Psi(t_i) \rangle \\ &= \int d^3x_i \langle x_f | U(t_f, t_i) | x_i \rangle \langle x_i | \Psi(t_i) \rangle \\ &= \int d^3x_i K(f; i) \Psi(x_i) \end{aligned}$$

Aus dem Zusammenhang mit der Wellenfunktion wird unmittelbar deutlich, dass genau dann der Propagator die Schrödingergleichung erfüllt, wenn dies auch für die Wellenfunktion gilt:

$$\left(-i\partial_t + \frac{(-i\nabla)^2}{2m} + V(x)\right)\Psi(x) = 0 \quad (\text{Schrödingergleichung für die Wellenfunktion})$$

Dass der Propagator die Wellenfunktion erfüllt, lässt sich leicht zeigen, in dem man die zeitliche Ableitung $\partial_t K(t, x, t_0, x_0)$ mit Hilfe eines infinitesimalen Zeitschritts explizit ausrechnet, mehr dazu findet man in [2] und [3].

Beispiel: Der Harmonische Oszillator

Im Folgenden betrachten wir den Formalismus anhand des Harmonischen Oszillators, für den wir mit Hilfe des Pfadintegrals natürlich den Propagator

$$K(f; i) = \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x \exp\{i \cdot S(f; i)\}$$

berechnen möchten.

Dazu betrachten wir zunächst die Wirkung, die gegeben ist durch

$$S[\vec{x}] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(m \frac{\dot{\vec{x}}^2 - \omega^2 \vec{x}^2}{2} \right).$$

Aufgrund der Linearität des Integrals und der Tatsache, dass die Wirkung nur von \vec{x}^2 und $\dot{\vec{x}}^2$ abhängt, wird unmittelbar deutlich, dass sie in eine Summe über die einzelnen Dimensionen zerfällt:

$$S[\vec{x}] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(m \frac{\dot{x}_1^2 - \omega^2 x_1^2}{2} \right) + \int_{t_i}^{t_f} dt \left(m \frac{\dot{x}_2^2 - \omega^2 x_2^2}{2} \right) + \int_{t_i}^{t_f} dt \left(m \frac{\dot{x}_3^2 - \omega^2 x_3^2}{2} \right)$$

Damit zerfällt der Propagator in ein Produkt

$$K(f; i) = \underbrace{K(x_{1,f}, t_f; x_{1,i}, t_i)}_{\equiv K_x} \cdot K(x_{2,f}, t_f; x_{2,i}, t_i) \cdot K(x_{3,f}, t_f; x_{3,i}, t_i)$$

Es reicht also, das Problem zunächst Eindimensional zu behandeln.

Für den Pfad wählen wir zunächst folgenden Ansatz:

$$x(t) = \underbrace{z(t)}_{\text{Klassischer Pfad}} + \underbrace{y(t)}_{\text{Quantenfluktuation}}, \text{ d.h. fordere: } \frac{\delta S}{\delta x}[z] = 0$$

Der Vorteil dieses Ansatzes liegt darin, dass wir die Wirkung des Klassischen Pfads berechnen können und deren Variation verschwindet. Außerdem wissen wir, dass der klassische Pfad am Anfangspunkt beginnen und am Endpunkt enden muss. Somit sind die Quantenfluktuationen am Anfangs- und Endpunkt notwendigerweise 0.

$$\begin{aligned} z(t_i) &= x_i & z(t_f) &= x_f \\ y(t_i) &= 0 & y(t_f) &= 0 \end{aligned}$$

Für die Wirkung gilt nun:

$$\begin{aligned}
S[z+y] &= \underbrace{m \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{\dot{z}^2 - \omega^2 z^2}{2}}_{\equiv S_z} + \underbrace{m \int_{t_i}^{t_f} dt (\dot{z}\dot{y} + \omega^2 zy)}_{\equiv S_y} + \underbrace{m \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{\dot{y}^2 - \omega^2 y^2}{2}}_{\equiv S_y} \\
&= \underbrace{m \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{\dot{z}^2 - \omega^2 z^2}{2}}_{\equiv S_z} - \underbrace{m \int_{t_i}^{t_f} dt y(\ddot{z} + \omega^2 z)}_{\equiv S_y} + \underbrace{m \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{\dot{y}^2 - \omega^2 y^2}{2}}_{\equiv S_y}
\end{aligned} \tag{4}$$

Im zweiten Schritt haben wir ausgenutzt, dass die Quantenfluktuationen an den Randpunkten verschwinden müssen, sodass der Randterm der Partiellen Integration verschwindet.

Daneben können wir die Wirkung S in einer Taylorreihe für Funktionale entwickeln und erhalten:

$$S[z+y] = S[z] + \underbrace{\int dt y \frac{\delta S}{\delta z}[z]}_{=0} + \frac{1}{2} \int dt y^2 \frac{\delta^2 S}{\delta z^2}[z] + \dots$$

Zunächst fallen alle Terme höherer Ordnung weg, da die Wirkung nur quadratisch von x abhängt. Dies ist der Vorteil des Harmonischen Oszillators und führt dazu, dass wir ihn hier so vergleichsweise einfach berechnen können.

Außerdem sehen wir, dass der Term linear in y verschwinden muss, da die Variation der Wirkung für den klassischen Pfad z verschwindet, dies eliminiert also den Mischterm in (4) und führt zu

$$S[z+y] = \underbrace{m \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{\dot{z}^2 - \omega^2 z^2}{2}}_{\equiv S_Z} + \underbrace{m \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{\dot{y}^2 - \omega^2 y^2}{2}}_{\equiv S_Y}.$$

Die Wirkung separiert also wieder in zwei unabhängige Summanden, sodass der Propagator in ein Produkt zerfällt:

$$K_x = \exp(iS_Z) \int \mathcal{D}y \exp(iS_Y)$$

Dabei können wir die klassische Wirkung und den klassischen Pfad mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen leicht berechnen:

$$z(t) = \frac{x_f \sin(\omega(t-t_i)) + x_i \sin(\omega(t_f-t))}{\sin(\omega T)}; T = t_f - t_i$$

$$\Rightarrow S_Z = \frac{m\omega}{2\sin(\omega T)} ((x_f^2 + x_i^2) \cos(\omega T) - 2x_f x_i)$$

Es verbleibt also im Wesentlichen nur noch das Pfadintegral $\int \mathcal{D}y \exp(iS_Y)$ zu berechnen.

Um dieses Integral zu berechnen, verfahren wir so, wie wir bereits in der Herleitung des Pfadintegrals vorgegangen sind und betrachten unser Problem in infinitesimalen Zeitschritten.

Dazu betrachten wir zunächst die Wirkung

$$S_Y = m \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{\dot{y}^2 - \omega^2 y^2}{2}$$

Diese lässt sich wie folgt diskret schreiben:

$$\begin{aligned}
S_Y^{(N)} &= -\frac{m}{2} \sum_{n=1}^N \varepsilon \left(-\frac{y_{n+1} - y_n}{\varepsilon} \cdot \frac{y_n - y_{n-1}}{\varepsilon} + \omega^2 y_n^2 \right) \\
&= -\frac{m}{2\varepsilon} \sum_{n=1}^N y_n (y_{n+1} - (2 - \omega^2 \varepsilon^2) y_n - y_{n-1}) \equiv \frac{m}{2\varepsilon} y M y
\end{aligned}$$

$y M y$ ist hierbei ein Matrixprodukt mit

$$M = \begin{pmatrix} (2 - \omega^2 \varepsilon^2) & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & (2 - \omega^2 \varepsilon^2) & -1 & 0 & \\ 0 & -1 & (2 - \omega^2 \varepsilon^2) & -1 & \\ 0 & 0 & -1 & (2 - \omega^2 \varepsilon^2) & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Für den Propagator gilt dann

$$\begin{aligned}
K_x &= \exp(iS_Z) \int \mathcal{D}y \exp(iS_Y) \approx \exp(iS_Z) \int d^N y \frac{1}{A^{N+1}} \exp(i \frac{m}{2\varepsilon} y M y) \\
&= \exp(iS_Z) \sqrt{\frac{m}{2\pi i \varepsilon \det(M)}}
\end{aligned}$$

Das Pfadintegral geht also im Diskreten in ein einfaches N-dimensionales Gaußintegral über und es verbleibt noch die Determinante von M zu berechnen.

Per Vollständiger Induktion kann man zeigen, dass für diese gilt:

$$\begin{aligned}
d_1 &\equiv \det(M_{1 \times 1}) = 2 - \omega^2 \varepsilon^2 \\
d_2 &= (2 - \omega^2 \varepsilon^2)^2 - 1 \\
d_3 &= (2 - \omega^2 \varepsilon^2)^3 - 2(2 - \omega^2 \varepsilon^2) = 2d_2 - d_1 - \omega^2 \varepsilon^2 d_2 \\
&\vdots \\
d_{N+1} &= (2 - \omega^2 \varepsilon^2) d_N - d_{N-1}
\end{aligned}$$

Dies lässt sich etwas umstellen zu:

$$\begin{aligned}
\frac{d_{N+1} - 2d_N + d_{N-1}}{\varepsilon^2} - \omega^2 d_N &= 0 \\
\stackrel{\varepsilon \ll \omega^{-1}}{\longrightarrow} (\partial_t^2 - \omega^2) d_N &= 0
\end{aligned}$$

Die Determinante muss also eine Harmonische-Oszillator-Differentialgleichung erfüllen.

Damit ergibt sich:

$$d_\infty = \alpha \sin(\omega T) + \beta \cos(\omega T)$$

Für $\omega \rightarrow 0$ muss diese Gleichung immer noch erfüllt sein. Für $\omega = 0$ erhalten wir

$$d_{N-1} = N = \frac{T}{\varepsilon} \text{ und somit bleibt für die Koeffizienten nur noch } \alpha = \frac{1}{\omega \varepsilon}, \beta = 0 \text{ und wir}$$

erhalten:

$$K_x = \exp(iS_Z) \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \sin(\omega T)}}$$

Setzen wir die klassische Wirkung von oben ein und gehen wieder ins Dreidimensionale, folgt schließlich der endgültige Ausdruck für den Propagator des freien Harmonischen Oszillators:

$$K(f; i) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \sin(\omega T)}}^3 \exp \left[\frac{im\omega}{2\sin(\omega T)} (\vec{X}^2 \cos^2(\frac{\omega T}{2}) + 4 \vec{\bar{X}}^2 \sin^2(\frac{\omega T}{2})) \right]$$

$$\text{mit } \vec{X} = \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{2} \quad ; \quad \vec{\bar{X}} = \frac{\vec{x}_f + \vec{x}_i}{2}$$

Betrachten wir nun noch den Grenzfall $\omega \rightarrow 0$ erhalten wir den Propagator für ein freies Teilchen:

$$K(f,i) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i T}}^3 \exp\left[\frac{im}{2T} \vec{X}^2\right]$$

Eine ausführliche Herleitung für den gezwungenen Harmonischen Oszillator findet man bei [2].

Ausblick – Anwendungen des Pfadintegrals

Die Feynman'sche Pfadintegralformulierung der Quantenmechanik liefert eine weitere, anschauliche Formulierung der Quantenmechanik, die zunächst vielleicht unnütz oder unnötig aufwändig erscheinen mag. Dennoch haben wir bereits gesehen, dass gerade diese Formulierung sehr anschaulich ist und uns wie keine andere den Grenzübergang von der Quantenmechanik zur klassischen Mechanik aufzeigen kann.

Die Tatsache, dass das elektromagnetische Feld als harmonische Oszillatoren beschrieben wird (s. auch Vortrag „Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld“ von Daniel Geiss), führt dazu, dass sich das Pfadintegral als einfachsten Formalismus zur Formulierung der Quantenfeldtheorie herausstellt. Mehr dazu ist unter [2], [5], [6] und [7] zu finden.

Daneben wird das Pfadintegral auch in der statistischen Physik eingesetzt. Hier geht die Zeit in eine imaginäre Zeit

$$t \rightarrow -\frac{i\hbar}{kT}$$

über und es wird über geschlossene Pfade integriert. Mehr dazu findet man unter anderem auch in [3].

Darüber hinaus wird das Pfadintegral auch in modernen Theorien wie der Quantum Loop Theory und anderen gerne verwendet und bleibt damit weiterhin aktuell.

Literatur

- [1] Vorlesung zur Theoretischen Physik IV, Prof. Thomas Gasenzer
- [2] The Quantum Theory of the Hydrogen Atom, Felix Nendzig,
<http://www.fnendzig.de/data/Hydrogenatom.pdf>
- [3] Quantum Mechanics and Path Integrals, Feynman-Hibbs
- [4] <http://de.wikipedia.org/wiki/Pfadintegral>

- [5] An Introduction to Quantum Field Theory, Peskin-Schroeder
- [6] Quantum Field Theory, Itzykson-Zuber Kap. 9-1
- [7] https://en.wikipedia.org/wiki/Path_integral_formulation