

Aharonov-Bohm-Effekt

Mathis Brosowsky
Quantenmechanisches Seminar
bei Prof. Dr. Georg Wolschin
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

6. November 2013

Zusammenfassung

Der Aharonov-Bohm-Effekt sagt eine Änderung des Interferenzmusters von Elektronen bei einem Doppelspaltexperiment durch ein außerhalb des Einflussbereichs liegenden Magnetfelds voraus. Das im Raumbereich der Elektronen nichtvorhandene elektrische und magnetische Feld schließt eine Erklärung mithilfe der klassischen Elektrodynamik aus. Der Effekt wird erst durch die quantenmechanisch fundamentalen elektromagnetischen Potentiale greifbar, obwohl die physikalischen Observablen nur von eichinvarianten Größen abhängen. Wir werden sehen, dass dies kein Widerspruch ist.

1 Einführung

Allgemein bezeichnet der Aharonov-Bohm-Effekt die Änderung der Phasenbeziehung von geladenen Partikeln durch ein elektromagnetisches Feld, obwohl dieses im Einflussbereich der Teilchen verschwindet. Der Effekt existiert sowohl für elektrische als auch für magnetische Felder. In dieser Arbeit wird nur der magnetische Aharonov-Bohm-Effekt beleuchtet.

Der Effekt kann mit dem Experiment in Abbildung 1 veranschaulicht werden. Hierbei wird ein gewöhnliches Doppelspaltexperiment durch eine sehr lange Spule zwischen den Spalten erweitert. Erstaunlicherweise wird bei stromdurchflossener Spule ein anderes Interferenzbild als im ausgeschalteten Fall beobachtet, obwohl aufgrund der Länge der Spule kein Magnetfeld im Raum der Elektronen existiert.

Werner Ehrenberg und Raymond E. Siday erkannten dieses Phänomen schon 1949. In einer Publikation über einen Brechungsindex in der Elektronenoptik stellten sie das Experiment in Abbildung 1 vor und zeigten die notwendige Abhängigkeit vom Vektorpotential gegenüber den verschwindenden elektromagnetischen Feldern.

Erst 1959 veröffentlichten die Namensgeber David Bohm und sein Doktorand Yakir Aharonov ihre Arbeit, in der sie wie W. Ehrenberg und R. E.

Siday den Effekt durch eine Phasenänderung theoretisch vorher sagten. Sie verallgemeinerten das Phänomen mit einem elektrischen Analogon. 1960, ein Jahr nach der Veröffentlichung von Aharonov und Bohm, wurde der Effekt durch Robert G. Chambers experimentell bestätigt und nochmals 1962 von Gottfried Möllenstedt gemessen. 1986 gelang dem japanischen Physiker Akira Tonomura ein endgültiger Nachweis mithilfe von Supraleitern, die das Magnetfeld vollständig abschirmen konnten.

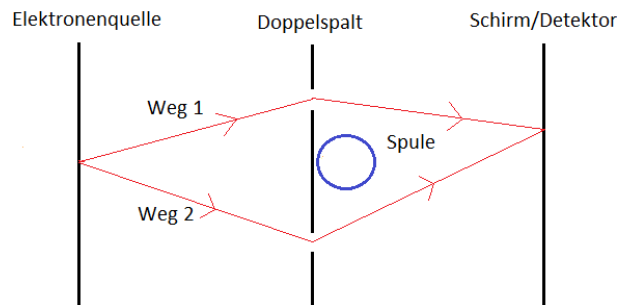


Abbildung 1: *Doppelspaltexperiment mit Spule*

2 Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

In diesem Abschnitt werden Konzepte aus der klassischen Physik vorbereitet.

2.1 Lorentzkraft

Auf ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld wirkt die Lorentzkraft:

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Für konservative Kräfte existiert ein Skalarpotential V mit $\vec{F}_L = \nabla V$ und der Hamiltonoperator ist trivial über $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$ gegeben. Allerdings ist leicht zu sehen, dass die Lorentzkraft im Allgemeinen nicht konservativ ist:

$$\begin{aligned} W &= \oint_C \vec{F}_L d\vec{r} = \oint_C q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) d\vec{r} = \oint_C q\vec{E} d\vec{r} \\ &= q \int_F \nabla \times \vec{E} d\vec{F} = -q \int_F \partial_t \vec{B} d\vec{F} = -q\dot{\Phi} \neq 0 \end{aligned}$$

Im Abschnitt 2.3 wird die Hamiltonfunktion allgemeiner als für den Spezialfall einer konservativen Kraft hergeleitet.

2.2 Elektromagnetische Potentiale

In der Elektrodynamik existieren Potentiale, die die elektromagnetischen Felder beinhalten:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\nabla\Phi - \partial_t\vec{A}\end{aligned}$$

Die Potentiale sind allerdings nicht eindeutig. So bleiben die elektromagnetischen Felder unter der folgenden Eichtransformation invariant:

$$\begin{aligned}\vec{A} &\longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda \\ \Phi &\longrightarrow \Phi' = \Phi - \partial_t\Lambda\end{aligned}$$

In der klassischen Elektrodynamik ist die gesamte Physik in den elektromagnetischen Feldern enthalten, da die Lorentzkraft und die Maxwellgleichungen nur von diesen Größen abhängen. Die Potentiale treten dabei nur als mathematische Hilfsgrößen in Erscheinung.

2.3 Hamiltonfunktion

Um die Hamiltonfunktion für eine nicht konservative Kraft wie die Lorentzkraft zu finden, ist es sinnvoll zunächst die Lagrangefunktion aufzustellen. Anschließend kann die Hamiltonfunktion durch Anwenden der Legendre-Transformation bestimmt werden. Werden die physikalischen Bewegungsgleichungen durch die Lagrange-Gleichung 2. Art beschrieben, ist die Lagrangefunktion von der Gestalt $\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = T - U$. Dabei ist T die kinetische Energie und U das verallgemeinerte Potential. In kartesischen Koordinaten, d.h. $\vec{q} = \vec{x}$, gilt:

$$\begin{aligned}T &= \sum_i \frac{m}{2} \dot{x}_i^2 \\ \vec{F}_i &= \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial U}{\partial x_i}\end{aligned}$$

Offensichtlich erfüllt ein gewöhnliches Potential V auch die Bedingung für das verallgemeinerte Potential. Allerdings sind noch weitere, insbesondere geschwindigkeitsabhängige, Potentiale erlaubt. So liefert das folgende verallgemeinerte Potential die Lorentzkraft:

$$U = q(\Phi - \dot{\vec{x}}\vec{A})$$

Damit ist die Lagrangefunktion gefunden und explizites Durchführen der Legendre-Transformation liefert die Hamiltonfunktion:

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\Phi$$

3 Quantenmechanische Erklärung

3.1 Vektorpotential einer unendlich langen Spule

Beim eingangs vorgestellten Interferenzexperiment müssen die Fälle der ein- und ausgeschalteten Spule unterschieden werden. Für den Fall der ausgeschalteten Spule gilt für das Magnetfeld $\vec{B} = 0$, sodass auch das Vektorpotential $\vec{A} = 0$ gewählt werden kann. Die angeschaltete Spule erzeugt in ihrem Inneren ein konstantes Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ entlang der Spulenachse, während außerhalb das Magnetfeld aufgrund der Länge der Spule verschwindet $\vec{B} = 0$. Fordert man für das Vektorpotential stetige Differenzierbarkeit, folgt mit dem Satz von Stokes die wichtige Erkenntnis, dass es außerhalb der angeschalteten Spule nicht verschwinden kann:

$$\oint_{\gamma} \dot{A} d\vec{r} = \int_F \nabla \times \dot{A} d\vec{F} = \int_F \vec{B} d\vec{F} = \Phi = B_0 \pi r^2 \neq 0$$

Damit ist außerhalb der Spule ein wesentlicher Unterschied zwischen den Vektorpotentialen der an- und ausgeschalteten Spule gefunden.

3.2 Schrödingergleichung unter Eichtransformation

Später wird sich zeigen, dass der Zusammenhang zwischen den Potentialen außerhalb der Spule für den an- und ausgeschalteten Fall durch eine Eichtransformation gegeben ist. Aus diesem Grund wird in diesem Abschnitt der Einfluss der Eichung auf die Lösung der Schrödingergleichung dargestellt.

Allgemeine Schrödingergleichung Die Schrödingergleichung für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld lautet:

$$\begin{aligned} \hat{H}\Psi &= i\hbar\partial_t\Psi \\ \hat{H} &= \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\vec{A} \right)^2 + q\Phi + V(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

Unter der Eichtransformation der Potentiale transformiert sich der Hamiltonoperator entsprechend $\hat{H}(\vec{A}, \Phi) \rightarrow \hat{H}' = \hat{H}(\vec{A}', \Phi')$ und die Schrödingergleichung zu $\hat{H}'\hat{\Psi} = i\hbar\partial_t\hat{\Psi}$. Es ist durch Einsetzen leicht zu zeigen, dass $\hat{\Psi} = \Psi \exp(i\frac{q}{\hbar}\Lambda)$ die transformierte Schrödingergleichung löst.

$$\Psi \rightarrow \hat{\Psi} = \Psi \exp(i\frac{q}{\hbar}\Lambda)$$

Stationäre Schrödingergleichung Falls die Eichfunktion Λ zeitunabhängig ist, gilt unter der Eichtransformation der Lösung auch die stationäre Schrödingergleichung:

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle \Rightarrow \hat{H}'|\hat{n}\rangle = E_n|\hat{n}\rangle$$

Energieeigenzustände bleiben demnach Energieeigenzustände zu der gleichen invarianten Energie.

Anwendung der Eichtransformation Außerhalb der angeschalteten Spule gilt $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = 0$ und auf einfach zusammenhängenden Gebieten existiert für das Vektorpotential folglich ein Skalarpotential Λ . Mit der Wahl $\vec{A} = 0$ für das Vektorpotential der ausgeschalteten Spule folgt:

$$\vec{A} = \nabla \Lambda = \vec{A} + \nabla \Lambda$$

Mit der Eichfunktion $\Lambda(\vec{x}) = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{A} d\vec{r}$ gehen die Vektorpotentiale der an- und ausgeschalteten Spule durch Eichtransformation ineinander über.

Da das Vektorpotential \vec{A} statisch ist, enthält alleine das Skalarpotential Φ über $\vec{E} = -\nabla\Phi - \partial_t\vec{A} = -\nabla\Phi$ das elektrische Feld. Das nicht vorhandene elektrische Feld kann demnach über $\Phi = \dot{\Phi} = 0$ modelliert werden. Da die oben definierte Eichfunktion Λ zeitunabhängig ist, können auch die Skalarpotentiale der an- und ausgeschalteten Spule durch Eichtransformation ineinander umgeformt werden:

$$\dot{\Phi} = \Phi - \partial_t\Lambda$$

4 2-Wellenfunktionen-Lösung

Das Prinzip der Lösung des Aharonov-Bohm-Effekts besteht in der Nutzung der Eichtransformation zur Unterscheidung der an- und ausgeschalteten Spule. Beim Doppelspaltexperiment muss die Schrödingergleichung im grau gefärbten Bereich der Abbildung 2 mit Randbedingungen gelöst werden. Offensichtlich ist dieses Gebiet nicht einfach zusammenhängend und die Potentiale können nicht durch Eichtransformation ineinander überführt werden.

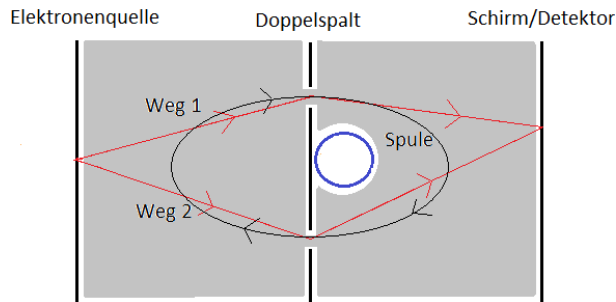


Abbildung 2: Gebiet der Elektronen ist nicht einfach zusammenhängend

Dieses Problem wird mit der 2-Wellenfunktion-Lösung umgangen. Die Gesamtdynamik eines Elektrons mit (Ψ_B) und ohne Magnetfeld (Ψ_0) kann durch eine Superposition der Bewegung durch den oberen ($\Psi_{1,0}$ bzw. $\Psi_{1,B}$) und unteren Spalt ($\Psi_{2,0}$ bzw. $\Psi_{2,B}$) dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= \Psi_{1,0} + \Psi_{2,0} \\ \Psi_B &= \Psi_{1,B} + \Psi_{2,B}\end{aligned}$$

Die Wellenfunktion eines einzelnen Spaltes zeichnet sich durch das Verschwinden am anderen Spalt aus, da hier die Aufenthaltswahrscheinlichkeit Null ist. Die Schrödingergleichung für diese Wellenfunktion muss nur noch auf einem einfachzusammenhängenden Gebiet gelöst werden. Deshalb können die elektromagnetischen Potentiale der an- und ausgeschalteten Spule auf diesem Gebiet durch Eichtransformation ineinander überführt werden. Die Wellenfunktion transformiert sich dabei für den oberen Spalt wie folgt:

$$\Psi_{1,B} = \Psi_{1,0} \exp\left(i\frac{q}{\hbar}\Lambda\right) = \Psi_{1,0} \exp\left(i\frac{q}{\hbar} \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \dot{A}d\vec{r}\right) = \Psi_{1,0} \exp\left(i\frac{q}{\hbar} \int_{\gamma_1} \dot{A}d\vec{r}\right)$$

Hier ist zu beachten, dass der Weg γ_1 in dem einfachzusammenhängenden Gebiet liegen muss. Wird die Wellenfunktion beispielsweise an einem Punkt auf dem Schirm, wie in Abbildung 1 dargestellt, ausgewertet, muss γ_1 durch den oberen Spalt gehen. Analog gilt für den unteren Spalt:

$$\Psi_{2,B} = \Psi_{2,0} \exp\left(i\frac{q}{\hbar} \int_{\gamma_2} \dot{A}d\vec{r}\right)$$

Daraus lässt sich die Gesamtlösung mit Magnetfeld für einen Punkt auf dem Schirm berechnen:

$$\begin{aligned}\Psi_B &= \Psi_{1,B} + \Psi_{2,B} \\ &= \Psi_{1,0} \exp\left(i\frac{q}{\hbar} \int_{\gamma_1} \dot{A}d\vec{r}\right) + \Psi_{2,0} \exp\left(i\frac{q}{\hbar} \int_{\gamma_2} \dot{A}d\vec{r}\right) \\ &= [\Psi_{1,0} \exp\left(i\frac{q}{\hbar} \int_{\gamma_1 - \gamma_2} \dot{A}d\vec{r}\right) + \Psi_{2,0}] \exp\left(i\frac{q}{\hbar} \int_{\gamma_2} \dot{A}d\vec{r}\right) \\ &= [\Psi_{1,0} \exp\left(i\frac{q}{\hbar} \oint_C \dot{A}d\vec{r}\right) + \Psi_{2,0}] \exp\left(i\frac{q}{\hbar} \int_{\gamma_2} \dot{A}d\vec{r}\right) \\ &= [\Psi_{1,0} \exp\left(i\frac{q}{\hbar} \int_F \nabla \times \dot{A}d\vec{F}\right) + \Psi_{2,0}] \exp\left(i\frac{q}{\hbar} \int_{\gamma_2} \dot{A}d\vec{r}\right) \\ &= [\Psi_{1,0} \exp\left(i\frac{q}{\hbar} \int_F \dot{B}d\vec{F}\right) + \Psi_{2,0}] \exp\left(i\frac{q}{\hbar} \int_{\gamma_2} \dot{A}d\vec{r}\right) \\ &= [\Psi_{1,0} \exp\left(i\frac{q}{\hbar} \Phi\right) + \Psi_{2,0}] \exp\left(i\frac{q}{\hbar} \int_{\gamma_2} \dot{A}d\vec{r}\right)\end{aligned}$$

Damit folgt für die gemessene Intensität auf dem Schirm:

$$\begin{aligned}|\Psi_B|^2 &= |\Psi_{1,0} \exp\left(i\frac{q}{\hbar} \Phi\right) + \Psi_{2,0}|^2 \\ |\Psi_0|^2 &= |\Psi_{1,0} + \Psi_{2,0}|^2\end{aligned}$$

Der Unterschied im Interferenzbild zeigt sich in der Aharonov-Bohm Phase:

$$\Delta\varphi = \frac{q}{\hbar}\Phi$$

4.1 Berry-Phasen-Modell

Adiabatisches Theorem Die Energieeigenzustände eines zeitabhängigen Hamiltonoperators der Form $\hat{H}(\vec{R}(t))$ sind durch die stationäre Schrödingergleichung gegeben:

$$\hat{H}(\vec{R}(t))|n(\vec{R}(t))\rangle = E_n(\vec{R}(t))|n(\vec{R}(t))\rangle$$

Befindet sich das System zu Beginn in einem Energieeigenzustand $|\Psi(t=0)\rangle = |n(\vec{R}(0))\rangle$ und ändert sich der Hamiltonoperator nur „langsam“ in der Zeit, dann sagt das Adiabatische Theorem die folgende Zeitentwicklung voraus:

$$|\Psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E_n(\vec{R}(\acute{t}))d\acute{t}\right) \exp\left(i \underbrace{\gamma_n(t)}_{\text{geometrische Phase}}\right) |n(\vec{R}(t))\rangle$$

dynamische Phase
geometrische Phase

$$\gamma_n(t) = i \int_0^t \langle n(\vec{R}(\acute{t})) | \dot{n}(\vec{R}(\acute{t})) \rangle d\acute{t}$$

Da $\gamma_n \in \mathbb{R}$, ist die Bezeichnung Phase berechtigt. Ein Energieeigenzustand bleibt demnach einer und es entsteht nur eine zusätzliche Phase, die sich aus der dynamischen und der geometrischen Phase zusammensetzt.

Berry-Phase Durchläuft $\vec{R}(t)$ eine geschlossene Kurve, wird die geometrische Phase als Berry-Phase bezeichnet. Abbildung 3 zeigt eine Veranschaulichung der Berry-Phase. Auch hier ändert sich der Zustand nach Umlauf einer geschlossenen Kurve nur um eine Phase bzw. Winkel.

Der Ausdruck für die Berry-Phase lässt sich wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \gamma_n(T) &= i \int_0^T \langle n(\vec{R}(\acute{t})) | \dot{n}(\vec{R}(\acute{t})) \rangle d\acute{t} \\ &= i \int_0^T \underbrace{\langle n(\vec{R}(\acute{t})) | \nabla_{\vec{R}} |n(\vec{R}(\acute{t})) \rangle}_{\vec{F}} \dot{\vec{R}} d\acute{t} \\ &= i \int_0^T \vec{F}(\vec{R}) \dot{\vec{R}} d\acute{t} \\ &= i \oint_C \vec{F}(\vec{R}) d\vec{R} \\ &= i \oint_C \langle n(\vec{R}(\acute{t})) | \nabla_{\vec{R}} |n(\vec{R}(\acute{t})) \rangle d\vec{R} \\ &= \gamma_n(C) \end{aligned}$$

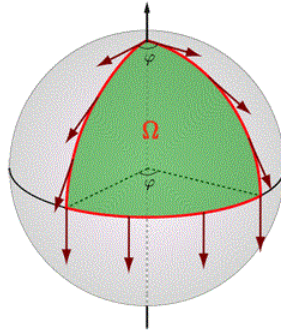


Abbildung 3: *Klassisches Berry-Phasen-Analogon* http://.ati.tuwien.ac.at/research_areas/neutron_quantum_physics/research/fundamental_tests_of_quantum_mechanics/geometric_phase/EN/

Diese Umformung zeigt, dass die Berry-Phase nur von der Form der Kurve abhängt und nicht direkt vom zeitlichen Verhalten, solange der Durchlauf adiabatisch bleibt.

Berry-Phasen-Modell Wir wollen nun ein zweites Experiment betrachten, bei dem ein Elektron einmal um die Spule geführt wird. Um das zu realisieren, wird das Elektron in einen Potentialkasten, der in \vec{R} zentriert ist, gesperrt.

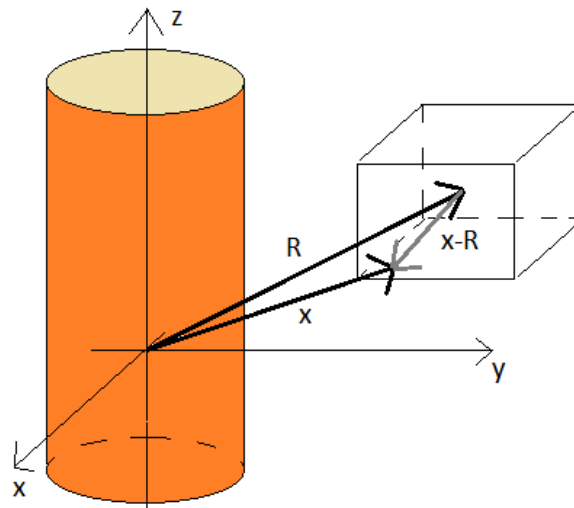


Abbildung 4: *Berry-Phasen-Modell*

Wir definieren uns nun ein Potential $\Lambda(\vec{x}) = \int_{\vec{R}}^{\vec{x}} \vec{A} d\vec{r}$ im Potentialkasten,

dem Raum in dem die Schrödingergleichung gelöst werden muss. Es gilt $\dot{\vec{A}} = \nabla\Lambda$ und bei adiabatischem Umlauf in guter Näherung $\partial_t\Lambda = 0$, da die einzige Zeitabhängigkeit von Λ durch die Integrationsgrenze \vec{R} gegeben ist. Ein Blick zurück zur Anwendung der Eichtransformation zeigt, dass damit alle Bedingungen erfüllt sind, um die elektromagnetischen Potentiale für an- und ausgeschaltete Spule durch Eichtransformation ineinander zu überführen. Wird das Elektron zu Beginn des Umlaufs bei ausgeschalteter Spule in den Energieeigenzustand $|n\rangle$ präpariert, so ist es zu Beginn bei angeschalteter Spule im Zustand $|\dot{n}\rangle = |n\rangle \exp(i\frac{q}{\hbar}\Lambda) = |n\rangle \exp(i\frac{q}{\hbar}\int_{\vec{R}}^{\vec{x}} \dot{\vec{A}}d\vec{r})$. Die zeitliche Entwicklung nach langsamem Umlauf der an- und ausgeschalteten Spule $t = T$ ergibt sich aus dem Adiabatischen Theorem:

$$|\Psi(T)\rangle = \exp\left(-\underbrace{\frac{i}{\hbar}\int_0^t E_n(\vec{R}(t))dt}_{\alpha}\right) \exp(i\gamma_n(C)) |n(\vec{R}(T))\rangle$$

$$|\dot{\Psi}(T)\rangle = \exp\left(-\underbrace{\frac{i}{\hbar}\int_0^t E_n(\vec{R}(t))dt}_{\alpha}\right) \exp(i\dot{\gamma}_n(C)) |\dot{n}(\vec{R}(T))\rangle$$

Nach einem Umlauf ist das Elektron bis auf eine Phase wieder im gleichen Zustand wie zu Beginn. Da die Eigenenergie E_n unter der Eichtransformation invariant ist, ist die dynamische Phase α für die an- und ausgeschaltete Spule gleich groß. Der einzige Unterschied in der Phasenänderung ergibt sich aus der Berry-Phase $\Delta\varphi = \dot{\gamma}_n(C) - \gamma_n(C)$.

$$|\dot{n}\rangle = |n\rangle \exp\left(i\frac{q}{\hbar}\int_{\vec{R}}^{\vec{x}} \dot{\vec{A}}d\vec{r}\right)$$

$$\Rightarrow \nabla_R |\dot{n}\rangle = \exp\left(i\frac{q}{\hbar}\int_{\vec{R}}^{\vec{x}} \dot{\vec{A}}d\vec{r}\right) \nabla_R |n\rangle - i\frac{q}{\hbar} |\dot{n}\rangle$$

$$\Rightarrow \langle \dot{n} | \nabla_R | \dot{n} \rangle = -i\frac{q}{\hbar} \dot{\vec{A}} + \langle n | \nabla_R | n \rangle$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma}_n(C) - \gamma_n(C) = i \oint_C \langle \dot{n} | \nabla_R | \dot{n} \rangle d\vec{R} - i \oint_C \langle n | \nabla_R | n \rangle d\vec{R}$$

$$= \frac{q}{\hbar} \oint_C \dot{\vec{A}} d\vec{R} = \frac{q}{\hbar} \int_F \nabla \times \dot{\vec{A}} d\vec{F} = \frac{q}{\hbar} \int_F \dot{\vec{B}} d\vec{F} = \frac{q}{\hbar} \Phi$$

Hier beträgt der Unterschied in der Phasenänderung bei an- und ausgeschalteter Spule gerade wieder der Aharonov-Bohm-Phase. Dieses Experiment kann nicht nachgewiesen werden, da eine lokale Phase bei Betragsbildung verschwindet. Trotzdem demonstriert es den Aharonov-Bohm-Effekt, da nach Definition lediglich eine Beeinflussung der Phase entscheidend ist.

5 Fazit

In der klassischen Elektrodynamik sind die elektrischen und magnetischen Felder die physikalisch wechselwirkenden Größen. Die Potentiale sind mathematische Hilfskonstruktionen und vereinfachen häufig das Rechnen.

Der Aharonov-Bohm-Effekt ist hingegen nur mithilfe der Potentiale erklärbar, da die beiden unterschiedlichen Interferenzbilder ohne jegliches elektrische und magnetische Feld im Raumbereich der Elektronen entstehen. Die für die Interferenzbildänderung verantwortliche Aharonov-Bohm-Phase ist eichinvariant, da sie nur vom Fluss der angeschalteten Spule abhängt. Trotz der Wahlfreiheit der Potentiale bezüglich der Eichung, zeigt der Aharonov-Bohm-Effekt, dass die Potentiale nicht durch das elektrische und magnetische Feld ersetzt werden können. Dies demonstriert, dass eine fundamentale Rolle der Potentiale in der Quantenmechanik bei bleibender Eichfreiheit kein Widerspruch ist!

Literatur

- [1] W. Ehrenberg und R. E. Siday: *The Refractive Index in Electron Optics and the Principles of Dynamics*, Proceedings of Physical Society, 1949
- [2] Y. Aharonov und D. Bohm: *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*, The Physical Review 115, S. 485, 1959
- [3] A. Tonomura et al.: *Observation of Aharonov-Bohm Effect by Electron Holography*, Physical Review Letters 48, S.1443, 1982
- [4] J. Hamilton: *Aharonov-Bohm and other Cyclic Phenomena*, Springer, 1997
- [5] F. Schwabl: *Quantenmechanik*, S. 151-155, Springer, 2007
- [6] A. Návrát: *Geometric phase in quantum theory*, Diplomarbeit, Masaryk University, 2006, http://is.muni.cz/th/42314/prif_m/diplomkaF.pdf
- [7] Prof. Dr. T. Brandes: *Elektrodynamik*, Vorlesungsskript der TU Berlin, 2012/13 <http://www.itp.physik.tu-berlin.de/brandes/Edyn2010.pdf>
- [8] http://en.wikipedia.org/wiki/Adiabatic_theorem