

Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon und Bellsche Ungleichung

Zusammenfassung des Vortrags vom 20.12.2013 im Seminar
„Quantenmechanik“

Johannes Hölck

1 Geschichtlicher Hintergrund

Die Anfänge der modernen Quantenmechanik gehen zurück auf den Beginn des 20. Jahrhunderts. Innerhalb kurzer Zeit konnten mit ihrer Hilfe viele bisher unerklärbare physikalische Phänomene, wie das Wasserstoffspektrum, mathematisch beschrieben und mit hoher Genauigkeit berechnet werden. Im Kontrast zu ihrem sehr erfolgreichen mathematischen Formalismus stand allerdings die Tatsache, dass sie keinerlei Auskünfte zu den genauen physikalischen Abläufen im Mikrokosmos bot. Eine physikalische Interpretation der verwendeten Wellenfunktionen, die die Grundlage der Theorie lieferten, konnte nicht gegeben werden.

Dies und die als störend empfundene probabilistische Natur der Quantenmechanik führte bei vielen Physikern, zu denen unter anderem auch Albert Einstein zählte, zu der Überzeugung, dass die Quantenmechanik in ihrer damaligen Form verbesserungswürdig und durch eine bessere Theorie abzulösen sei.

2 Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon

Im Jahre 1935 veröffentlichten Albert Einstein, Boris Podolsky und Nathan Rosen (EPR) einen vielbeachteten Artikel unter dem Titel *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, in welchem sie ausgehend von einem Widerspruch im quantenmechanischen Formalismus die Vollständigkeit der Quantenmechanik in Frage stellten. Der Gegenstand des Artikels erlangte in den kommenden Jahren große Bekanntheit unter den Bezeichnungen EPR-Paradoxon oder EPR-Argument.

2.1 Grundlegende Annahmen und Definitionen

Zur damaligen Zeit existierten mit den Konzepten von Lokalität und Realismus zwei zentrale Annahmen über die Struktur der Realität, auf denen auch Einstein, Podolsky und Rosen ihre Argumentation aufbauten:

- Das Prinzip der *Lokalität* fordert, dass raumartig getrennte Ereignisse sich nicht gegenseitig beeinflussen dürfen.
- *Realismus* bezeichnet die Auffassung, dass physikalische Größen unabhängig davon existieren, ob sie gemessen werden. Hieraus folgt direkt, dass das Ergebnis jeder Messung bereits vor deren Durchführung feststehen muss.

Eine physikalische Theorie wird nun nach Einstein, Podolsky und Rosen dann als *vollständig* erachtet, falls in ihr jedes „Element der physikalischen Realität“ eine Entsprechung findet. Als Elemente der physikalischen Realität werden hierbei jene Observablen A bezeichnet, deren Wert a mit Sicherheit (d.h. beliebig genau) vorhersagbar ist, ohne dass die dazu notwendige Messung das zugehörige System mit der Wellenfunktion φ stört:

$$\hat{A}\varphi = a \cdot \varphi \quad (1)$$

Die allgemeine quantenmechanische Unschärferelation besagt nun, dass zwei nichtkommutierende Observablen nicht beide beliebig genau bestimmt werden können. Dies ist nach obiger Definition gleichbedeutend damit, dass *nichtkommutierende Observablen nicht Elemente derselben physikalischen Realität sein können*.

2.2 Gedankenexperiment zur Konstruktion des Widerspruchs

Um einen Widerspruch zu dieser allgemein gültigen Aussage zu konstruieren, betrachteten Einstein, Podolsky und Rosen folgendes Gedankenexperiment:

Angenommen, ein Teilchen zerfällt in zwei neue Teilchen I und II mit jeweils identischen Massen. Wählt man als Bezugssystem das Schwerpunktsystem der Teilchen, müssen sich die Impulse der beiden Zerfallsprodukte aufgrund der Impulserhaltung jederzeit zu null addieren. Da sich der Ursprung des Koordinatensystems an der Position des ursprünglichen Teilchens befindet, muss auch die Summe der Orte der Zerfallsprodukte stets null ergeben. Würde man Impuls oder Ort eines der beiden entstandenen neuen Teilchen messen, wäre folglich auch sofort Impuls bzw. Ort des anderen Teilchens genau bekannt; die Orte bzw. Impulse der Teilchen sind *korreliert*. Sind nun beide Teilchen raumartig getrennt, könnte eine Orts- bzw. Impulsmessung am ersten Teilchen aufgrund der Lokalität das zweite Teilchen nicht beeinflussen. Ergo müssen Ort und Impuls des zweiten Teilchens unabhängig von der Messung am ersten Teilchen bereits eindeutig bestimmt sein und beide Observablen somit Elemente der physikalischen Realität. Für Ort und Impuls gilt jedoch die fundamentale Kommutatorrelation $[p, x] = i\hbar \neq 0$, was im Widerspruch zur in Abschnitt 2.1 abgeleiteten Aussage steht.

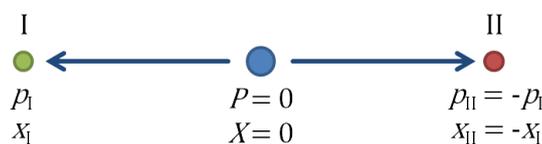


Abbildung 1: Teilchenzerfall im Schwerpunktsystem

Aus diesem Gegenbeispiel folgerten die Autoren, dass einige Observablen durch die Quantenmechanik nicht, d.h. nicht widerspruchsfrei, beschrieben werden könnten und die Quantenmechanik daher als *nicht vollständig* angesehen werden müsste.

Die Frage nach der Existenz einer vollständigen lokalen realistischen Quantentheorie konnte mit diesen Überlegungen jedoch nicht beantwortet werden, allerdings verwiesen Einstein, Podolsky und Rosen am Ende ihres Artikel ausdrücklich darauf, dass sie die Existenz einer solchen Theorie durchaus für möglich hielten.

2.3 Diskussion des Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon

Ein Kritikpunkt in der Herleitung des obigen Paradoxons lässt sich in der Abhängigkeit der Definition von Realität finden: Wie die Autoren in ihrem Artikel selbst eingestehen, löst sich der Widerspruch sofort auf, wenn zwei physikalische Größen nur dann als gleichzeitig physikalisch real betrachtet werden, falls sie auch gleichzeitig in einer Messung bestimmt werden können. Dies ist für Ort und Impuls des zweiten Teilchens nicht erfüllt, da eine Messung einer der beiden Größen die andere stören und deren Kenntnis aus einer vorherigen Messung damit zunichte machen würde.

Wenige Monate später veröffentlichte Niels Bohr daher einen Artikel gleichen Namens, in welchem er Einstein, Podolsky und Rosens unangemessene Definition der „störungsfreien Messung“ mit Hinweis auf die Rolle des Messapparats kritisierte: Da die Messinstrumente stets Teil des Experimentes wären und mit den Versuchsobjekten wechselwirkten, schließe ein Versuchsaufbau zur Vorhersage des Impulses eines Teilchens unweigerlich die Messung dessen Ortes aus. Ort und Impuls des Teilchens könnten damit niemals Elemente derselben Realität sein, sondern wären in diesem Sinne Elemente *komplementärer* Realitäten, da jeweils nur eine der Messungen realisiert werden könnte.

2.4 Weiterentwicklung der Thematik

Auch nach der teilweisen Auflösung des EPR-Paradoxons durch Bohr beschäftigte die Frage nach der Existenz einer vollständigen lokalen realistischen Quantentheorie weiterhin viele Jahre die Wissenschaftsgemeinschaft, ohne dass eine zufriedenstellende Lösung des Problems gefunden werden konnte.

Im Jahre 1957 stellten David Bohm und Yakir Aharonov eine Neuformulierung des EPR-Gedankenexperimentes vor, die einen entscheidenden Einfluss auf die weitere Entwicklung der Fragestellung haben sollte. Statt korrelierter Orte und Impulse betrachteten sie zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen im Singulettzustand, deren Spins auch nach beliebig großer räumlicher Trennung aufgrund der Gesamtspinerhaltung in entgegengesetzte Richtungen orientiert sein müssen. Da Spinkomponenten im Gegensatz zu Ort und Impuls vergleichsweise einfach messbar sind, rückte damit eine experimentelle Untersuchung der Thematik erstmals in greifbare Nähe.

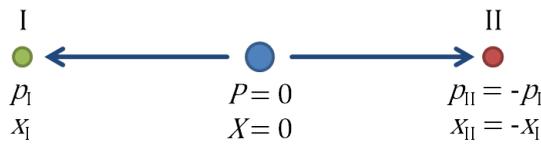


Abbildung 2: Spinkorrelation im Singulettzustand

3 Bellsche Ungleichung

Aufbauend auf Bohms und Aharonovs Neuformulierung des EPR-Gedankenexperiments veröffentlichte John Stewart Bell 1964 eine mathematische Relation, welche bald nach ihrem Entdecker kurz als *Bellsche Ungleichung* bezeichnet wurde. Die Ungleichung beschreibt eine allgemeine mathematische Beziehung zwischen Messergebnissen, die in jeder lokalen realistischen Theorie stets erfüllt ist; betrachtet man allerdings die nach der Quantenmechanik zu erwartenden Messwerte (d.h. die quantenmechanischen Erwartungswerte), verletzen diese im Allgemeinen die Bellsche Ungleichung. Daraus ergab sich nun die Möglichkeit, die Vorhersagen von Quantenmechanik und lokalen realistischen Theorien einem experimentellen Test zu unterziehen und dabei eine der beiden Theorien zu falsifizieren.

3.1 Zugrundeliegendes Experiment

Im Experiment, auf dem die Bellsche Ungleichung basiert, werden die beiden Teilchen des Spin-Singulett getrennt passieren anschließend eine Filtereinrichtung mit ausgezeichneter Achse \vec{a} bzw. \vec{b} , die die Teilchen in Richtung oder Gegenrichtung dieser Achse ablenkt, abhängig davon, ob die Projektion des Teilchenspins auf diese Achse ein positives oder negatives Ergebnis liefert. Anschließend wird die Richtung der Ablenkung durch einen von zwei Detektoren registriert.

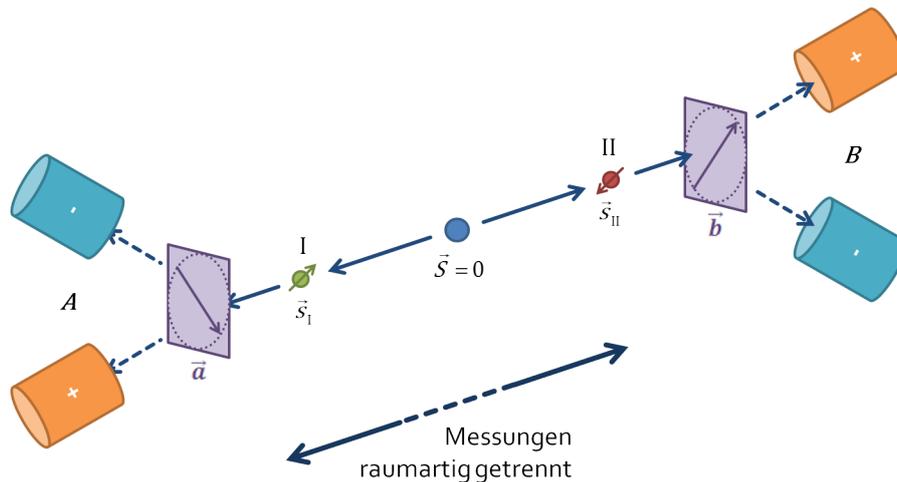


Abbildung 3: Schematischer Aufbau des Experiments zur Bellschen Ungleichung

Eine grundlegende Eigenschaft des Spins ist es nun, dass seine Messung entlang einer beliebigen normierten Achse stets nur zwei Werte annehmen kann, $+\frac{\hbar}{2}$ oder $-\frac{\hbar}{2}$. Der obige Versuchsaufbau entspricht somit einer Messung der beiden Teilchenspins entlang der Achsen \vec{a} bzw. \vec{b} . Für die Projektion des im Folgenden verwendeten normierten Spins $\vec{\sigma}_I$ von Teilchen I bzw. $\vec{\sigma}_{II}$ von Teilchen II entlang der beiden Achsen gilt damit stets:

$$\vec{\sigma}_I \cdot \vec{a} = \pm 1 \quad \text{bzw.} \quad \vec{\sigma}_{II} \cdot \vec{b} = \pm 1 \quad \text{falls} \quad \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1 \quad (2)$$

Aufgrund der strengen Antikorrelation der Spins der zwei Teilchen gilt zudem:

$$\vec{\sigma}_I \cdot \vec{a} = -\vec{\sigma}_{II} \cdot \vec{a} \quad (3)$$

3.2 Herleitung der Bellschen Ungleichung

Zur Ableitung seiner Ungleichung setzte Bell die Gültigkeit der in Kapitel 2.1 vorgestellten Prinzipien Realismus und Lokalität voraus. Nach ersterem sollten die Ergebnisse der Spinmessungen von vornherein festgelegt sein, d.h. es existieren Funktionen A bzw. B zur Vorhersage der Ergebnisse, die zunächst von allen variablen Parametern im System abhängen können. Neben den beiden Achsen ist dies im Allgemeinen ein beliebiger Satz zusätzlicher unbekannter Variablen λ :

$$A(\vec{\sigma}_I \cdot \vec{a}) \equiv A(\vec{a}, \vec{b}, \lambda) = \pm 1 \quad \text{bzw.} \quad B(\vec{\sigma}_{II} \cdot \vec{b}) \equiv B(\vec{a}, \vec{b}, \lambda) = \pm 1 \quad (4)$$

Finden die Messungen der Spins von Teilchen I und II nun raumartig getrennt statt, kann das Ergebnis aufgrund der vorausgesetzten Lokalität nicht mehr von der Ausrichtung der jeweils anderen Messachse abhängen:

$$A(\vec{a}, \vec{b}, \lambda) \equiv A(\vec{a}, \lambda) \quad \text{bzw.} \quad B(\vec{a}, \vec{b}, \lambda) \equiv B(\vec{b}, \lambda) \quad (5)$$

Würde man statt einzelner Komponenten nun das Produkt der Spinkomponenten von Teilchen I und II messen wollen, ließe sich das Ergebnis folglich durch folgende Funktion p beschreiben:

$$p\left((\vec{\sigma}_I \cdot \vec{a})(\vec{\sigma}_{II} \cdot \vec{b})\right) \equiv p(\vec{a}, \vec{b}, \lambda) \equiv A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) \quad (6)$$

Da die Parameter λ nicht bekannt sind und damit ihr Einfluss auf das Messergebnis nicht kontrolliert werden kann, wird jede Messung von p zwangsweise bei zufälligen Werten für λ durchgeführt. Es liegt daher nahe, den Erwartungswert P bzgl. der λ zu betrachten, d.h. eine Mittelung über alle λ durchzuführen:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \int \rho(\lambda) p(\vec{a}, \vec{b}, \lambda) = \int \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) \quad (7)$$

Unter Ausnutzung der Antikorrelation $B(\vec{b}, \lambda) = -A(\vec{b}, \lambda)$ und Wahl einer dritten Messachse \vec{c} lässt sich daraus folgende Korrelation ableiten:

$$\begin{aligned}
\left| P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) \right| &\leq \int_{\geq 0} \rho(\lambda) \left| A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) \right| \\
&= \int \rho(\lambda) \left| A(\vec{a}, \lambda) \underbrace{\left[A(\vec{b}, \lambda) \right]^2}_{=(\pm 1)^2 = 1} A(\vec{c}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) \right| \\
&= \int \rho(\lambda) \underbrace{\left| A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) \right|}_{=1} \underbrace{\left| A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) - 1 \right|}_{\leq 1} \\
&= \int \rho(\lambda) - \int \rho(\lambda) A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) \\
&= 1 + P(\vec{b}, \vec{c})
\end{aligned} \tag{8}$$

Dies ist die Bellsche Ungleichung in ihrer ursprünglichen Formulierung.

Bei der Durchführung des Experiments werden die Achsen \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} stets koplanar zueinander gewählt. Da keine ausgezeichnete Richtung im Raum auftritt, lässt sich die experimentelle Anordnung daher eindeutig durch Angabe der Relativwinkel zwischen den drei Achsen beschreiben:

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) =: \varphi, \quad \angle(\vec{b}, \vec{c}) =: \theta \quad \Rightarrow \quad \angle(\vec{a}, \vec{c}) = \varphi + \theta \tag{9}$$

$$P(\vec{a}, \vec{b}) \equiv P(\varphi), \quad P(\vec{b}, \vec{c}) \equiv P(\theta), \quad P(\vec{a}, \vec{c}) \equiv P(\varphi + \theta) \tag{10}$$

Damit ergibt sich als alternative Formulierung der Bellschen Ungleichung für den Fall koplanarer Achsen:

$$P(\theta) \geq |P(\varphi) - P(\varphi + \theta)| - 1 \tag{11}$$

3.3 Vergleich mit dem quantenmechanischen Erwartungswert

Betrachtet man das gleiche Experiment vom quantenmechanischen Standpunkt, lässt sich ein expliziter Ausdruck für das mittlere Messergebnis des Produktes beider Spinkomponenten finden:

$$P_{\text{QM}}\left((\vec{\sigma}_I \cdot \vec{b})(\vec{\sigma}_{II} \cdot \vec{c})\right) = \left\langle (\vec{\sigma}_I \cdot \vec{b})(\vec{\sigma}_{II} \cdot \vec{c}) \right\rangle = - \left\langle (\vec{\sigma}_I \cdot \vec{b})(\vec{\sigma}_I \cdot \vec{c}) \right\rangle = -\vec{b} \cdot \vec{c} = -\cos(\theta) \tag{12}$$

Hierbei wurde ausgenutzt, dass im Singulettzustand $\langle \vec{\sigma}_I \rangle = 0$ gilt und der zum Spin gehörige Operator durch den Vektor der Pauli-Matrizen dargestellt wird, welcher folgende Relation erfüllt:

$$(\hat{\sigma}_I \cdot \vec{b})(\hat{\sigma}_I \cdot \vec{c}) = \vec{b} \cdot \vec{c} + i \hat{\sigma}_I \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \tag{13}$$

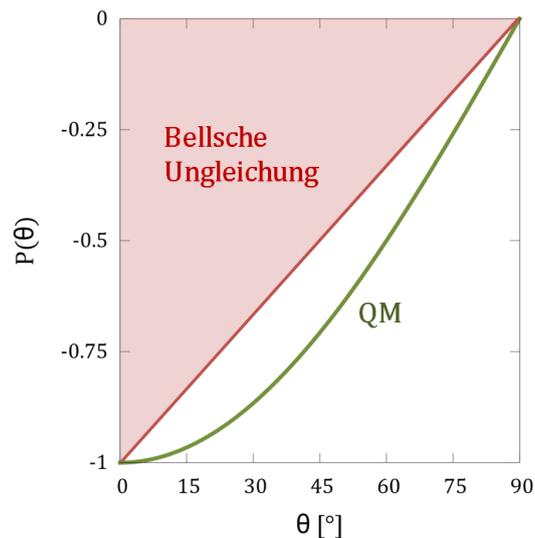


Abbildung 4: Quantenmechanischer Erwartungswert und erlaubter Wertebereich der Bellschen Ungleichung

Wird dieses Ergebnis gemeinsam mit dem von der Bellschen Ungleichung erlaubten Wertebereich in einem Diagramm aufgetragen, ist sofort ersichtlich, dass Quantenmechanik und lokale realistische Theorien in diesem Fall unvereinbare Voraussagen für die zu erwartenden Messwerte treffen.

3.4 Experimentelle Überprüfung

Die Frage, welche der beiden Theorien die richtigen, d.h. mit der Wirklichkeit übereinstimmenden, Vorhersagen und damit eine korrekte Beschreibung der Welt liefert, ließ sich nun durch Vergleich mit experimentell ermittelten Messwerten beantworten. Bereits nach Durchführung der ersten Experimente ergab sich ein klarer Trend zu Gunsten der Quantenmechanik: Bis auf wenige Ausnahmen verletzen die Messwerte die Bellsche Ungleichung, stimmten aber mit den quantenmechanischen Erwartungswerten überein.

Anzumerken ist an dieser Stelle, dass das erste Experiment erst acht Jahre nach Bells Publikation stattfand. Der Grund hierfür bestand in den zahlreichen Problemen, die sich aus der praktischen Umsetzung des von Bell vorgeschlagenen Experiments ergaben. Als Konsequenz wurde in der Mehrheit der Experimente die zu messende Observable geändert und statt der Spins massiver Teilchen die Polarisationen verschränkter Photonen gemessen. Bis zur Durchführung der ersten Experimente, die den ursprünglichen Versuchsaufbau verwendeten, vergingen so weitere vier Jahre.

Eine der größten experimentellen Herausforderungen bestand anfangs darin, dass beide Messvorgänge wirklich raumartig getrennt abliefen. Um diesem als „Lokalitätsschlupfloch“ bezeichneten Problem beizukommen, wurde die räumliche Distanz zwischen den beiden Messapparaturen im Laufe der Zeit kontinuierlich erhöht und die Orientierung der Messachsen erst kurz vor den

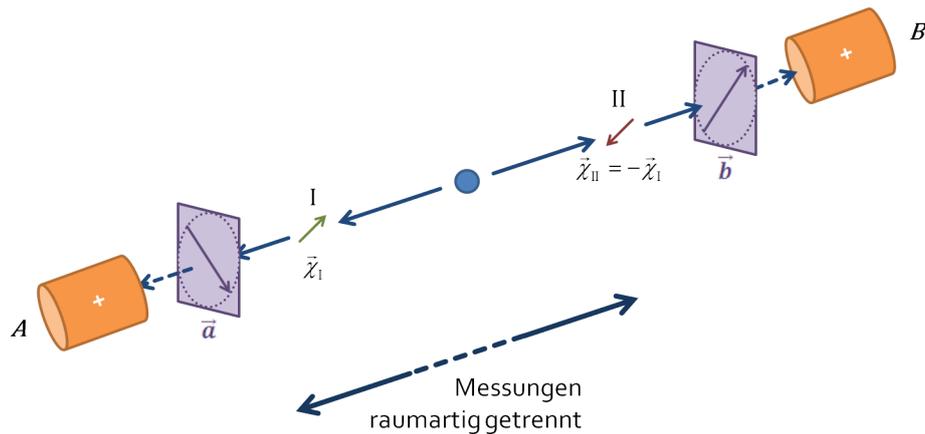


Abbildung 5: Modifizierter Versuchsaufbau zur Messung der Polarisierungen verschränkter Photonen

eigentlichen Messungen durch Zufallsgeneratoren festgelegt. Besonders bei den mehrheitlich durchgeführten Polarisationsmessungen existierte in den ersten Jahrzehnten eine weitere Problematik in Form des „Nachweisschlupfloches“: Die verwendeten Detektoren wiesen zu dieser Zeit sehr geringe Nachweiswahrscheinlichkeiten auf, wodurch die Mehrzahl der Ereignisse nicht erfasst wurde. Da Nichtdetektionen im Falle der Polarisationsexperimente konstruktionsbedingt als entgegengesetzt orientierte Polarisation gewertet wurden, führte dies zu starken Verfälschungen der Messergebnisse.

Heutzutage wird die Bellschen Ungleichung auf Basis der in den letzten Jahrzehnten gesammelten Daten mit sehr großer Sicherheit als verletzt angesehen. Das zugehörige Forschungsgebiet ist aber weiterhin aktuell und Anlass mehrerer in Planung befindlicher Experimente, die neben realistischen lokalen auch weitere zur Diskussion stehende Theorien falsifizieren sollen.

4 Zusammenfassung

Aus der im Experiment bestätigten Verletzung der Bellschen Ungleichung folgt, dass lokale realistische Theorien mit der Wirklichkeit nicht vereinbar sind. Damit ist auch eine Vervollständigung der Quantenmechanik zu einer lokalen realistischen Theorie, wie es im Sinne Einsteins gewesen wäre, nicht möglich.

Im Umkehrschluss verbleiben somit drei mögliche Theoriearten:

- Lokale nichtrealistische Theorien,
- nichtlokale realistische Theorien und
- nichtlokale nichtrealistische Theorien, wie beispielsweise die Quantenmechanik.

Ob diese Auswahl weiter eingeschränkt werden kann, lässt sich nach heutigem Kenntnisstand nicht abschließend beantworten. Im Zuge der Forschungen der letzten Jahre konnten jedoch bereits einige nichtlokale realistische Theorien ausgeschlossen werden.

Literatur

- [1] *Bell test experiments*. Abgerufen am 09.12.2013. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Bell_test_experiments.
- [2] J. S. Bell. „On the Einstein Podolsky Rosen paradox“. In: *Physics* 1.3 (1964), S. 195–200.
- [3] N. Bohr. „Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?“ In: *Physical Review* 48 (Okt. 1935), S. 696–702. DOI: 10.1103/PhysRev.48.696.
- [4] J. F. Clauser u. a. „Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories“. In: *Physical Review Letters* 23 (Okt. 1969), S. 880–884. DOI: 10.1103/PhysRevLett.23.880.
- [5] *De-Broglie-Bohm-Theorie*. Abgerufen am 18.12.2013. URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/De-Broglie-Bohm-Theorie>.
- [6] B. D'Espagnat. „Nonseparability and the tentative descriptions of reality“. In: *Physics Report* 110 (Aug. 1984), S. 201–264. DOI: 10.1016/0370-1573(84)90001-2.
- [7] Bernard d'Espagnat. „The Quantum Theory and Reality“. In: *Scientific American* 241.5 (1979), S. 158–181. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/scientificamerican1179-158>.
- [8] A. Einstein, B. Podolsky und N. Rosen. „Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?“ In: *Physical Review* 47 (Mai 1935), S. 777–780. DOI: 10.1103/PhysRev.47.777.
- [9] S. Gröblacher u. a. „An experimental test of non-local realism“. In: *Nature* 446 (Apr. 2007), S. 871–875. DOI: 10.1038/nature05677. arXiv: 0704.2529 [quant-ph].
- [10] F. Schwabl. *Quantenmechanik (QM I)*: Springer-Lehrbuch. Springer, 2002. ISBN: 9783540431060.
- [11] Gregor Weihs. *Ein Experiment zum Test der Bellschen Ungleichung unter Einsteinscher Lokalität*. Abgerufen am 09.12.2013. 1999. URL: <http://www.uibk.ac.at/exphys/photonik/people/gwdiss.pdf>.