

# Die Dirac-Gleichung für freie Elektronen

Raffaella Milner

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Konzepte aus der speziellen Relativitätstheorie . . . . .	2
1.2 Von der Quantenmechanik zur relativistischen Quantenmechanik	3
1.2.1 Die Schrödingergleichung (SE) . . . . .	3
1.3 Die Klein-Gordon-Gleichung (KGE) . . . . .	4
<b>2 Die Dirac-Gleichung</b>	<b>5</b>
2.1 Die Dirac-Gleichung in kovarianter Form . . . . .	6
2.2 Lösungen der freien Dirac-Gleichung . . . . .	7
2.3 Fazit und Interpretation . . . . .	8
<b>3 Anhang</b>	<b>9</b>
3.1 Entdeckung des Positrons . . . . .	9
3.2 Quellenverzeichnis . . . . .	10

### Zusammenfassung

Diese Ausarbeitung wurde begleitend zu einem Seminarvortrag verfasst. Mit dem Ziel der korrekten Beschreibung freier Elektronen, befassen wir uns mit relativistischer Quantenmechanik. Dazu übernehmen wir einige wichtige Konzepte aus der speziellen Relativitätstheorie und der Quantenmechanik, welche uns zusammen mit der ersten relativistischen Wellengleichung, der Klein-Gordon-Gleichung, zur freien Dirac-Gleichung führen. Die Interpretation der Lösungen der freien Dirac-Gleichung führen zur Vorhersage des Positrons, mit dessen Entdeckung wir uns im Anhang kurz beschäftigen.

## 1 Einleitung

Wir wollen freie Elektronen korrekt beschreiben. Da Elektronen sich im Allgemeinen mit sehr hohen Geschwindigkeiten  $v \leq c$ , wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist, bewegen können, genügt und die Schrödingergleichung (1926) für ihre Beschreibung nicht mehr, da diese nur für Geschwindigkeiten  $v \ll c$  gültig ist. Wir suchen also nach einer relativistisch invarianten Wellengleichung, welche die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^4 c^2}$$

erfüllt. Dies führt uns zur Theorie der Dirac-Gleichung (1928), welche damit auf der Kombination zwischen Prinzipien aus der nichtrelativistischen Quantenmechanik und der Relativitätstheorie basiert.

Im Folgenden wollen wir Schritt für Schritt nachvollziehen, warum erst die Dirac-Gleichung freie Elektronen korrekt beschreibt und weshalb ihre Interpretation zur Vorhersage von Antiteilchen führt. Die Vorhersage des Positrons durch Dirac im Jahre 1931 ist wohl eine der größten Erkenntnisse durch Kombination von Relativitätstheorie und nichtrelativistischer Quantenmechanik. Im Jahre 1932 entdeckte Anderson das Positron experimentell und bestätigte damit Diracs Vermutung.

## 1.1 Konzepte aus der speziellen Relativitätstheorie

Da wir eine relativistisch invariante bzw. Lorentz-kovariante Theorie betrachten, müssen wir uns erst mit einigen Notationen der Relativitätstheorie vertraut machen.

Zunächst bleiben wir in unserer Betrachtung in den Einheiten von  $\hbar$  und  $c$ . In der Relativitätstheorie werden Raum und Zeit mathematisch gleich behandelt, sodass wir die entsprechenden Komponenten in sogenannten Vierervektoren  $x^\mu = (x^0, x^k)$  zusammenfassen.

Hierbei werden Vierervektoren mit griechischem Index geschrieben. Die zeitliche Komponente hat Index 0 und die räumlichen Komponenten werden mit lateinischem Index geschrieben. Man unterscheidet diese in kovariante Vektoren  $a_\mu$ , welche wie  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  transformieren und in kontravariante Vektoren  $a^\mu$ , welche wie  $x^\mu$  transformieren. Mit dem metrischen Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

kann man auf folgende Art zwischen kovariantem und kontravariantem Vierervektor transformieren:  $a_\mu = g^{\mu\nu} a^\nu$  und damit gilt  $a^0 = a_0$  und  $a_k = -a^k$ .

Eine weitere nützliche und wichtige Eigenschaft ist, dass das Skalarprodukt von Vierervektoren  $a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \vec{b}$  invariant gegenüber Lorentztransformationen ist.

Außerdem gibt es auch einen kovarianten  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv (\frac{\partial}{\partial ct}, \vec{\nabla})$  und einen kontravarianten  $\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu \equiv (\frac{\partial}{\partial ct}, -\vec{\nabla})$  Differentialoperator. Ihr invariantes Skalarprodukt wird als d'Alembert-Operator bezeichnet:

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$

Diesen brauchen wir, um die Klein-Gordon-Gleichung eleganter zu formulieren.

## 1.2 Von der Quantenmechanik zur relativistischen Quantenmechanik

Wie bereits gesagt, wollen wir die wichtigsten Prinzipien der nichtrelativistischen Quantenmechanik übernehmen, um eine korrekte relativistische Wellengleichung aufzustellen. Dabei handelt es sich um die folgenden, uns bekannten Eigenschaften:

- ein Zustand des Systems wird durch einen Zustandsvektor  $|\Psi\rangle$  im Hilbertraum beschrieben
- jeder physikalischen Observable wird ein linearer hermitescher Operator zugeordnet
- der Mittelwert einer Observablen  $A$  im Zustand  $|\Psi\rangle$  ist:  
 $\langle\Psi|A|\Psi\rangle$
- bei Messung von  $A$  geht der Ausgangszustand in den Eigenzustand  $|n\rangle$  von  $A$  mit Eigenwert  $a_n$  über:  
 $A|n\rangle = a_n|n\rangle$

Unter Verwendung dieser Eigenschaften stellen wir die Schrödingergleichung auf und erkennen an ihrer Form, warum sie für unser Ziel nicht genügt.

### 1.2.1 Die Schrödingergleichung (SE)

Mit dem Korrespondenzprinzip (klassischen Größen werden Operatoren zugewiesen) erhält man für die Energie und den Impuls des betrachteten Teilchens folgende Substitution:

$$E \mapsto \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \mapsto \hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{\nabla} \quad (1)$$

Nimmt man die klassische Energie-Impuls-Beziehung  $E = \frac{|\vec{p}|^2}{2m}$  hinzu, so erhält man die zeitabhängige Schrödingergleichung eines freien Teilchens (z.B. freies Elektron mit Ortsvektor  $\langle\vec{r}|\rangle$ ) als:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \frac{-\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}_{\vec{r}}^2 \Psi(\vec{r}, t) \quad (2)$$

Eine wichtige Eigenschaft zur physikalischen Interpretation der Wellengleichung ist die Erfüllung der Kontinuitätsgleichung  $\dot{\rho} + \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{j} = 0$ .

Multipliziert man Gleichung (2) von links mit der komplex konjugierten Wellenfunktion  $\Psi^*$  und subtrahiert davon die komplex konjugierte Schrödingergleichung, die vorher von rechts mit  $\Psi$  multipliziert wurde und fordert, dass die so erhaltene Gleichung die Kontinuitätsgleichung erfüllt, so erhält man durch Koeffizientenvergleich folgende Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho$  und Wahrscheinlichkeitsstromdichte  $\vec{j}$ :

$$\rho \equiv \Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 \geq 0 \quad (3)$$

$$\vec{j} \equiv \frac{\hbar}{2im} [\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - (\vec{\nabla} \Psi^*) \Psi] \quad (4)$$

Die Erfüllung der Kontinuitätsgleichung wird als lokale Teilchenzahlerhaltung interpretiert.

Wenn wir Gleichung (2) genau betrachten sehen wir, dass zeitliche und räumliche Ableitungen nicht in gleicher Ordnung auftreten. Daran können wir erkennen, dass die Schrödingergleichung nicht Lorentz-kovariant ist. Außerdem berücksichtigt sie den Spin der Teilchen nicht. Wir suchen also eine relativistisch invariante Wellengleichung, die den Spin automatisch berücksichtigt.

### 1.3 Die Klein-Gordon-Gleichung (KGE)

Um die relativistische Invarianz zu erhalten, benutzen wir die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^4 c^2. \quad (5)$$

Analog zur obigen Herleitung der Schrödingergleichung erhalten wir eine Operatorgleichung, wenn wir  $E$  und  $\vec{p}$  in Gleichung (5) entsprechend (1) substituieren. Wenden wir diese Operatorgleichung auf eine Wellenfunktion an, so erhalten wir die Klein-Gordon-Gleichung

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} |\Psi\rangle = (-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^2) |\Psi\rangle \quad (6)$$

Um die relativistische Invarianz noch deutlicher zu machen, fassen wir die räumlichen und zeitlichen Ableitungen in Vierervektoren zusammen und verwenden den d'Alembert-Operator

$$\left( \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) |\Psi\rangle = 0 \quad (7)$$

Diese äquivalente Form wird als freie Klein-Gordon-Gleichung bezeichnet.

Analog zur Herleitung der Kontinuitätsgleichung in der Schrödinger-Theorie folgt mit dem gleichen Prinzip unter Verwendung von Gleichung (7) für den Viererstrom  $j_{KG}^\mu = (c\rho, \vec{j})$

$$\partial_\mu j_{KG}^\mu = 0$$

mit

$$\rho_{KG} = i\hbar(\Psi^* \dot{\Psi}) - \Psi \dot{\Psi}^* \quad (8)$$

und

$$j_{KG}^\mu = -i\hbar c^2 (\Psi^* \partial^\mu \Psi - \Psi \partial^\mu \Psi^*). \quad (9)$$

Da die Klein-Gordon-Gleichung eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, können die Anfangswerte für  $\Psi$  und  $\dot{\Psi}$  beliebig gewählt werden. Da  $\Psi$  eine Funktion des Ortes ist, führt dies dazu, dass  $\rho_{KG}$  auch negative Werte annehmen kann. Dadurch ist  $\rho_{KG}$  nicht positiv definit und kann somit nicht als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden.

Da physikalisch ein Teilchen nicht mit einer negativen Wahrscheinlichkeit an

einem Ort sein kann, wurde die KGE zunächst verworfen. Erst 1934 wurde sie als Quantenfeldtheorie neu interpretiert.

Wir suchen also eine relativistisch invariante Wellengleichung mit positiv definiter Wahrscheinlichkeitsdichte. Dies verlangt, dass unsere Wellengleichung von erster Ordnung in der Zeit sein muss. Die Lorentz-Kovarianz verlangt damit, dass sie auch von erster Ordnung in den Ortsableitungen sein muss. Nicht zu vergessen muss die gesuchte Gleichung die relativistische Energie-Impuls-Beziehung erfüllen. Dirac stellte im Jahre 1928 eine Gleichung auf, die obigen Forderungen genügt.

## 2 Die Dirac-Gleichung

Die folgende Gleichung wird als Dirac-Gleichung bezeichnet

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H_D \Psi \quad (10)$$

mit dem Dirac-Operator  $H_D = \frac{\hbar c}{i} \alpha^k \partial_k + \beta m c^2 \equiv c \vec{\alpha} \vec{p} + \beta m c^2$  hierbei sind die  $\alpha^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) und  $\beta$  jeweils  $N \times N$ -Matrizen und keine Skalare, da die Gleichung sonst nicht forminvariant unter Drehungen wäre.

Gleichung (10) beschreibt damit ein Gleichungssystem für die  $n$ -komponentige Wellenfunktion  $\Psi$ , die wie folgt als Spaltenvektor geschrieben werden kann

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi_N \end{pmatrix}$$

Die Gleichung hat damit die Form einer Schrödingergleichung mit modifiziertem Hamiltonoperator. Die Erfüllung obiger Forderungen wird uns die algebraische Struktur der Matrizen liefern.

Zunächst muss  $H_D$  hermitesch sein, sodass die  $\alpha^k$  und  $\beta$  auch hermitesch sein müssen.

Wir wollen prüfen, ob die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte positiv definit ist. Dazu bringen wir Gleichung (10) analog (bloß verwenden wir hier die hermitesch adjungierte Wellenfunktion statt der komplex konjugierten) wie bei der SE und der KGE auf eine bestimmte Form, fordern, dass die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist und finden dann durch Koeffizientenvergleich die Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho_D$  und die Wahrscheinlichkeitsstromdichte  $j_D^\mu$  mit  $j_D^0 \equiv c\rho$  :

$$\rho_D = \Psi^\dagger \Psi \quad (11)$$

$$j_D^k = c \Psi^\dagger \alpha^k \Psi \quad (12)$$

Gleichung (11) zeigt, dass  $\rho_D$  eine positiv definite Größe ist. Unsere Forderung ist damit erfüllt.

Damit die Dirac-Gleichung die relativistische Energie-Impuls-Beziehung erfüllt, müssen die einzelnen Komponenten  $\Psi_i$  der Wellenfunktion die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen. Diese Forderung liefert Bedingungen an unsere Matrizen  $\alpha^k$  und  $\beta$ . Diese findet man, indem man die Dirac-Gleichung auf die Form der Klein-Gordon-Gleichung bringt (also  $H_D$  zwei Mal anwendet, da wir eine Differentialgleichung zweiter Ordnung brauchen) und dann durch Koeffizientenvergleich folgende Bedingungen für  $\alpha^k$  und  $\beta$  erhält.

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 2\delta^{ij} \mathbf{1} \quad (13)$$

$$\alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0 \quad (14)$$

$$(\alpha^i)^2 = \beta^2 = \mathbf{1} \quad (15)$$

Die Matrizen  $\alpha^k$  und  $\beta$  antikommutieren untereinander. Die Quadrate von  $\alpha$  und  $\beta$  ergeben die Einheitsmatrix, sodass die Eigenwerte der  $\alpha^k$  und  $\beta$  gleich  $\pm 1$  sein müssen.

Mit diesen Eigenschaften folgt direkt, dass die  $\alpha^k$  und  $\beta$  spurlos sind. Damit die Spur verschwinden kann, müssen die  $\alpha^k$  und  $\beta$  einen geradzahligen Rang haben. Es zeigt sich, dass die  $\alpha^k$  und  $\beta$  die gleiche Form haben, wie die Pauli-Matrizen:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allerdings sind die  $\alpha^k$  und  $\beta$  vier Matrizen, wobei die Pauli-Matrizen zusammen mit der Einheitsmatrix bereits eine vollständige Basis des Raumes der  $2 \times 2$ -Matrizen bilden. Deshalb können wir ableiten, dass der kleinstmögliche Rang der  $\alpha^k$  und  $\beta$  gleich ist. Vereinfacht lässt sich argumentieren, dass der Rang  $N = 4$  der Dirac-Matrizen und damit die Zahl der Komponenten der Dirac-Wellenfunktion daher kommt, dass der Spin  $1/2$  zwei Zustände annehmen kann und die Orthogonalität der Lösungen der Dirac-Gleichung für positive und negative Energien beansprucht zwei weitere Komponenten. Mit der Form der Lösungen der freien Dirac-Gleichung werden wir uns im zugehörigen Abschnitt befassen.

Die Standarddarstellung der Dirac-Matrizen sieht wie folgt aus,

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$$

wobei die  $\sigma_i$  die Pauli-Matrizen sind. Damit haben wir die algebraische Struktur der Dirac-Matrizen bestimmt.

Die letzte zu prüfende Forderung ist die Lorentz-Kovarianz. Dazu möchten wir zeitliche und räumliche Komponenten wieder durch Vierervektoren zusammenfassen, um damit die Dirac-Gleichung in kovarianter Form schreiben zu können.

## 2.1 Die Dirac-Gleichung in kovarianter Form

Wenn wir Gleichung (10) durch  $(-\frac{\beta}{c})$  teilen, erhalten wir die Gleichung

$$[-i\hbar\beta\partial_0 - i\hbar\beta\alpha^k\partial_k + mc]\Psi = 0 \quad (16)$$

mit  $\partial_0 = \partial/c\partial t$ .

Um räumliche und zeitliche Komponenten zu einen Vierervektor zusammen zu fassen, müssen wir unsere Dirac-Matrizen neu definieren.

Wir definieren  $\gamma^0 \equiv \beta$  und  $\gamma^k \equiv \beta\alpha^k$ , sodass wegen der Eigenschaften der  $\alpha^k$  und  $\beta$  folgende Relationen erfüllt sind:

$$\gamma^0 = (\gamma^0)^+, (\gamma^0)^2 = \mathbf{1}, -\gamma^k = (\gamma^k)^+, (\gamma^k)^2 = -\mathbf{1}$$

Außerdem gilt:  $\{\gamma^0, \gamma^k\} = 0$ ,  $\{\gamma^k, \gamma^l\} = 0$  für  $k \neq l$  und  $\{\gamma^k, \gamma^l\} = 0$  für  $k = l$

Damit folgt für die Dirac-Matrizen die Antivertauschungsrelation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

Mit Verwendung der Matrizen  $\gamma^\nu$  lässt sich die Dirac-Gleichung für ein freies Teilchen wie folgt schreiben

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar})\Psi = 0 \quad (17)$$

(Hierbei wird die  $4 \times 4$  Einheitsmatrix vor dem  $\frac{mc}{\hbar}$  nicht explizit geschrieben.)

Mit Verwendung der Feynman-Schreibweise  $\not{p} \equiv \gamma^\nu p_\nu = \gamma^\mu v^\mu = \gamma^0 v^0 - \gamma^k \vec{v}$  lässt sich Gleichung (17) auch schreiben als

$$[-i\not{p} + \frac{mc}{\hbar}]\Psi = 0 \quad (18)$$

Die  $\gamma$ -Matrizen in der Dirac-Darstellung sehen wie folgt aus:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist die Dirac-Gleichung relativistisch invariant, sodass sie allen unseren Forderungen genügt.

Wie bereits erwähnt, führte die physikalische Interpretation der Lösungen der Dirac-Gleichung Dirac zu der Vorhersage des Positrons. Um das zu verstehen, werden wir uns im folgenden Abschnitt mit den Lösungen für freie Teilchen befassen.

## 2.2 Lösungen der freien Dirac-Gleichung

Das Lösen der freien Dirac-Gleichung liefert Lösungen mit positiver und mit negativer Energie. Die Lösungen mit positiver Energie  $E = +cp_0$  sehen wie folgt aus

$$\Psi_p^{(+)}{}_{1,2} = \exp^{-i(cp_0 t - \vec{p}\vec{x}/\hbar)} \begin{pmatrix} \chi_{1,2}^{(+)} \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}\chi_{1,2}^{(+)}}{p_0 + mc} \end{pmatrix} \quad (19)$$

während die Lösungen mit negativer Energie  $E = -cp_0$  so aussehen

$$\Psi_p^{(-)}{}_{1,2} = \exp^{i(cp_0 t - \vec{p}\vec{x}/\hbar)} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}\chi_{1,2}^{(-)}}{p_0 + mc} \\ \chi_{1,2}^{(-)} \end{pmatrix} \quad (20)$$

wobei  $p_0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2} > 0$ , da  $E^2 = c^2 p_0^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^4 c^2$  gilt.

Die  $\chi_{1,2}^{(\pm)}$  bezeichnen hier jeweils zwei linear unabhängige, konstante und zweikomponentige Spinoren. Wie bereits erläutert sind die Lösungen vierkomponentige Spinoren. Die  $\chi_{1,2}^{(\pm)}$  müssen noch bestimmt werden. Diese internen Freiheitsgrade enthalten den Spin-Operator, der die Quantenzahl  $1/2$  hat.

In unserer Betrachtung ist der Spin-Operator nur als interner Freiheitsgrad enthalten, weil wir nur freie Elektronen betrachten. Durch eine Betrachtung von Elektronen im Magnetfeld, kann man den Spin-Operator bestimmen.

Die Lösungen der freien Dirac-Gleichung mit negativer Energie können nicht ignoriert werden, da ohne sie die Basis des Hilbertraumes unvollständig wäre. Zunächst können wir diese nicht als Teilchenwellenfunktionen sehen. Deshalb müssen die Lösungen negativer Energie entsprechend interpretiert werden.

## 2.3 Fazit und Interpretation

Die Zustände positiver Energie werden mit Elektronen identifiziert. Das Problem ist, dass es für alle Zustände mit positiver Energie einen korrespondierenden Zustand mit negativer Energie gibt.

Betrachten wir nur ein einzelnes isoliertes Elektron, können wir dessen Energie aufgrund von Energieerhaltung einfach einen positiven Wert zuordnen. Die Betrachtung eines isolierten Elektrons ist also unproblematisch. Wenn wir allerdings die Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld betrachten, könnte ein Elektron durch Emission von Photonen in einen Zustand beliebig kleiner Energie geraten, da die Zustände negativer Energie nicht nach unten beschränkt sind.

Das passiert in der Realität nicht und ist damit physikalisch nicht sinnvoll. Um dieses Problem zu lösen, bediente sich Dirac des Pauli-Prinzipes, welches aussagt, dass sich zwei Elektronen nicht im gleichen Zustand befinden können. Dirac hat angenommen, dass im Grundzustand (Vakuum) alle Zustände negativer Energie besetzt sind, während die Zustände positiver Energie unbesetzt sind. Außerdem wird die Grundzustandsenergie gleich Null gesetzt. Aus diesem Grund zusammen mit dem Pauli-Prinzip muss ein isoliertes Elektron in einem Zustand positiver Energie sein (da alle negativen Zustände bereits besetzt sind). Wegen Energieerhaltung darf die Energie des Elektrons bei Emission eines Photons nicht unter Null fallen. Damit kommen wir zur Betrachtung von nicht isolierten Elektronen. Ist ein Zustand mit negativer Energie unbesetzt, so wird er als Loch im Dirac-See interpretiert und mit einem Positron identifiziert. Mit dieser Identifikation lassen sich die grundlegenden Wechselwirkungen von Elektronen mit Photonen beschreiben. Bei der Paarvernichtung emittiert ein Elektron ein Photon und fällt unter Abgabe der entsprechenden Energiedifferenz in ein entsprechendes Loch im Dirac-See und annihiliert mit diesem Positron.

Beim umgekehrten Prozess, der Elektron-Positron-Erzeugung, absorbiert ein Positron ein Photon, steigt um die entsprechende Energiedifferenz auf und erzeugt ein Elektron.

Durch die Interpretation der negativen Energie in Form der Löcher-Theorie,

postulierte Dirac im Jahre 1931 das Positron als Antiteilchen des Elektrons. Eine kurze Beschreibung der experimentellen Entdeckung durch Anderson befindet sich im Anhang.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass wir mit der Dirac-Gleichung eine relativistisch Invariante Wellengleichung mit positiv definiter Wahrscheinlichkeitsdichte haben, mit der wir freie Elektronen korrekt beschreiben können. Die relativistische Invarianz wurde durch Berücksichtigung der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung in die Theorie integriert und die positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte folgt aus der Forderung an eine in zeitlicher und örtlicher Komponente lineare Differentialgleichung. Die Lösungen der freien Dirac-Gleichung mit negativen Energien, führten zur Interpretation der Theorie mithilfe der Löcher-Theorie, welche zur Vorhersage des Positrons führte. Damit ist liegt die physikalische Wichtigkeit der freien Dirac-Gleichung nicht nur in der Beschreibung freier Elektronen, sondern auch in der Eröffnung der Grundüberlegungen für eine Theorie der Antiteilchen.

Abschließend soll betont werden, dass die Theorie der freien Dirac-Gleichung eine Einteilchen-Theorie ist und weder Wechselwirkungen von Licht und Materie noch Teilchenerzeugung beschreiben kann. Dazu benötigt man eine Quantenfeldtheorie wie z.B. die Quantenelektrodynamik.

## 3 Anhang

### 3.1 Entdeckung des Positrons

C. D. Anderson untersuchte seit dem Jahr 1930 im Auftrag von Millikan die Kosmische Strahlung mit der Wilson'schen Nebelkammer. Diese ist eine Expansionsnebelkammer. Im Normalzustand ionisieren die durchfliegenden Teilchen die Moleküle des Gas-Dampf-Gemisches, sodass Kondensationskerne entstehen. Durch herausziehen eines Kolbens vergrößert sich das Volumen in der Kammer, sodass Druck und Temperatur sinken. Dadurch liegt der Dampf in einem übersättigtem Zustand vor, sodass sich Tropfen (Nebel) an den Ladungsträgern ausbilden. Diese werden beleuchtet und fotografiert.

Im Jahre 1932 baute er seine Nebelkammer um und erzeugte ein starkes Magnetfeld (etwa 2,5 Tesla) senkrecht zur Kammer. Um die Flugrichtung der Teilchen eindeutig bestimmen zu können, fügte Anderson eine  $6mm$  dicke Bleiplatte in die Nebelkammer ein.

Im selben Jahre machte er die ersten Fotografien von Teilchenspuren aus kosmischer Strahlung. Diese zeigten positiv und negativ geladene Teilchen und führten zu der Interpretation, dass kosmische Strahlung bei der Durchdringung von Materie zur Emission von Positronen führt. Da die Ionisationsdichte der Teilchen beider Ladungen gleich war, konnte es sich bei den positiven Teilchen nicht um Protonen handeln (wie zunächst vermutet wurde).

Abbildung 1 zeigt den ersten Nachweis eines Positrons, bei dem es gerade durch eine Bleiplatte dringt.

---

<sup>1</sup>Die Quelle von Abbildung 1 steht im Quellenverzeichnis unter der Nummer 6.

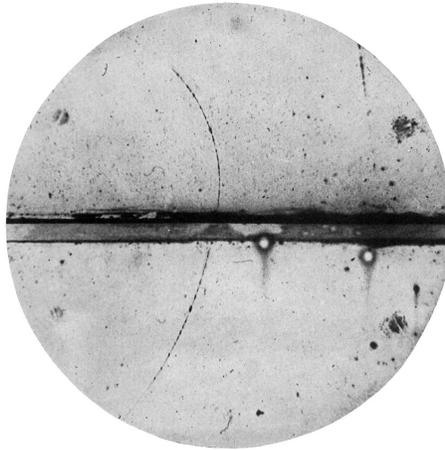


FIG. 1. A 63 million volt positron ( $H\rho=2.1\times 10^6$  gauss-cm) passing through a 6 mm lead plate and emerging as a 23 million volt positron ( $H\rho=7.5\times 10^5$  gauss-cm). The length of this latter path is at least ten times greater than the possible length of a proton path of this curvature.

Abbildung 1: Erste Beobachtung eines Antimaterie-Teilchens<sup>1</sup>

Im Jahre 1936 erhielt Carl Anderson für die Entdeckung des Positrons zusammen mit Victor Hess, dessen Arbeiten im Jahre 1912 zur Entdeckung der kosmischen Strahlung führten, den Nobelpreis für Physik.

### 3.2 Quellenverzeichnis

1. Dirac, P. A. M.: The Principles of Quantum Mechanics, fourth edition, 1967
2. Dirac, P. A. M.: The Quantum Theory of the Electron,  
<http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/117/778/610.full.pdf+html>,  
 1928
3. Stepanov, Semjon: Relativistische Quantentheorie, 2010
4. Wolschin, Georg: RQM-Skript SoSe 2013 Uni Heidelberg
5. Anderson, C. D.: The production and properties of positrons,  
[http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1936/anderson-lecture.pdf](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1936/anderson-lecture.pdf)
6. Anderson, C. D.: The Positive Electron, 1933,  
<http://authors.library.caltech.edu/7189/1/ANDpr33b.pdf>
7. <http://de.wikipedia.org/wiki/Dirac-Gleichung>
8. <http://de.wikipedia.org/wiki/Klein-Gordon-Gleichung>
9. [http://de.wikipedia.org/wiki/Carl\\_David\\_Anderson](http://de.wikipedia.org/wiki/Carl_David_Anderson)