

Pfadintegralformulierung der Quantenmechanik

Josua Göcking

23. Januar 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Historisches	1
1.2	Wozu Pfadintegrale?	2
2	Motivation des Pfadintegrals	2
2.1	Motivation am Doppelspalt	2
2.2	Das Pfadintegral - anschaulich	3
2.3	Klassischer Grenzfall	4
3	Herleitung des Pfadintegrals	5
3.1	Mathematische Wohldefiniertheit	7
4	Anwendungsbeispiel: Freies Teilchen	7
5	Das Pfadintegral in Statistischer Physik und QFT	8
5.1	Statistische Physik	8
5.2	Quantenfeldtheorie	9

1 Einleitung

1.1 Historisches

Pfadintegrale sind Funktionalintegrale.

Diese wurden 1919 von P.J. Daniell entwickelt und von Norbert Wiener 1921 dazu verwendet die Brown'sche Bewegung mathematisch zu beschreiben. Paul Dirac wandte 1934 erstmals Pfadintegrale auf die Quantenmechanik an.

Aus den Arbeiten Diracs entwickelte Richard P. Feynman 1948 die Pfadintegralformulierung der Quantenmechanik.

Jedoch stieß diese Formulierung zunächst auf wenig Resonanz.

Grund hierfür ist wohl, dass das Pfadintegral "nur" eine andere Herangehensweise an die Quantenmechanik lieferte, jedoch keine neuen Erkenntnisse hervorrief und der inzwischen gebräuchliche Formalismus des Schrödinger- bzw. Heisenbergbildes für die damaligen Fragestellungen vollkommen ausreichend war.

Die Notwendigkeit des Pfadintegralformalismus ergab sich erst durch das Aufkommen der Quantenfeldtheorie.

1979 schaffte es der deutsche Physiker Hagen Kleinert, damals Post-Doc bei Feynman, erstmals das Pfadintegral für das Wasserstoffatom zu lösen.

1.2 Wozu Pfadintegrale?

Wie in vorherigem Abschnitt bereits erwähnt, liefert die Pfadintegralformulierung der Quantenmechanik keine neuen physikalischen Erkenntnisse und beschreibt sie lediglich aus einer anderen Perspektive. Die Frage, die sich also stellt ist, warum bzw. ob es sich trotzdem lohnt diesen Formalismus zu betrachten.

Viele Probleme der Quantenmechanik lassen sich im Schrödinger- bzw. Heisenbergbild ohne große Probleme analytisch lösen. Bei den Problemen die dies nicht mehr zulassen gibt es den Formalismus der Störungstheorie. Hier wird jedoch vorausgesetzt, dass es sich nur um eine kleine Störung handelt.

Durch das Pfadintegral kann in Fällen, in denen die Störung groß ist durch numerisches Auswerten des Integrals auch hier eine Lösung gefunden werden.

Solche Probleme liegen jedoch meist nicht mehr im Bereich der Quantenmechanik sondern erfordern Quantenfeldtheorie.

Eine strikte Notwendigkeit des Pfadintegralformalismus für die Quantenmechanik besteht daher nicht. Interessant ist er trotzdem, da er wie wir sehen werden sehr viel anschaulicher ist als der Formalismus über nichtkommutierende Operatoren.

2 Motivation des Pfadintegrals

2.1 Motivation am Doppelspalt

Im Folgenden werden wir das Pfadintegral zunächst anschaulich motivieren.

Als Grundlage hierfür dient uns dabei der Doppelspaltversuch:

Nach der klassischen Erwartung würde man dort die Wahrscheinlichkeiten, dass das Teilchen am Ort x detektiert wird messen, falls nur Spalte 1 (P_1) bzw. 2 (P_2) geöffnet sind um durch Aufsummieren dieser, die Wahrscheinlichkeiten, falls beide Spalten geöffnet sind zu erhalten.

Die Wahrscheinlichkeit P das Teilchen am Orte x zu detektieren wenn beide Spalte geöffnet sind erhält man demnach aus der Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten:

$$P = P_1 + P_2$$

Misst man durch welchen Spalt das Teilchen gegangen ist so erhält man diese Wahrscheinlichkeitsverteilung. Man nennt diese Art der Aufsummierung *ausschließende Auswahlmöglichkeiten* (engl. *exclusive alternatives*).

Sind jedoch beide Spalten geöffnet und wird nicht gemessen durch welchen Spalt das Teilchen geht so entsteht ein Interferenzmuster. Die Wahrscheinlichkeit P ist hierbei durch das Betragsquadrat der sogenannten Wahrscheinlichkeitsamplitude ϕ gegeben. Damit ist eine komplexe Zahl gemeint, welche sich bekanntlich als $\phi = |\phi|e^{iC}$ mit einer Phase C schreiben lässt. ϕ setzt sich zusammen aus der Wahrscheinlichkeitsamplitude ϕ_1 für Spalt 1 und ϕ_2 für Spalt 2:

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_1 + \phi_2 \\ P &= |\phi|^2 = |\phi_1 + \phi_2|^2\end{aligned}$$

Diese Art der der Aufsummierung nennt man *interferierende Auswahlmöglichkeiten* (engl. *interfering alternatives*).

Hieraus erkennen wir, dass falls keine Messung vorgenommen wird, die Wahrscheinlichkeitsamplitude ein Teilchen am Orte x zu messen sich aus der Summe der Amplituden der einzelnen Spalten errechnen lassen.

Führen wir nun N weitere Wände ein und durchsetzen diese ebenfalls mit Spalten so wird die Amplitude durch aufsummieren der dortigen Einzelamplituden erhalten.

Lassen wir dann $N \rightarrow \infty$ und durchsetzen diese Wände mit so vielen Spalten, dass von der Wand nichts mehr übrig bleibt erhalten wir also durch Aufsummieren bzw. Aufintegrieren aller dieser Amplituden die Gesamtamplitude.

Die einzelnen Amplituden sind demnach proportional zu den klassischen Pfaden, welche das Teilchen wählen kann. Wir summieren bzw. integrieren also über alle möglichen Pfade und erhalten somit die Übergangsamplitude.

Dies ist was man mit dem Pfadintegral ausrechnen möchte.

2.2 Das Pfadintegral - anschaulich

In der Quantenmechanik tragen beim Übergang eines Teilchens von Punkt A zur Zeit t_A nach Punkt B zur Zeit t_B alle möglichen Pfade bei, während im Gegensatz dazu in der klassischen Mechanik nur der Pfad mit der geringsten Wirkung von Bedeutung ist.

Jeder Pfad wird hierbei mit einer spezifischen Phase gewichtet, sodass die Pfade sowohl konstruktiv als auch destruktiv interferieren können.

Das Pfadintegral, welches wir erhalten wollen soll uns die Übergangsamplitude $Z(B, A)$ für ein Teilchen von (A, t_A) nach (B, t_B) liefern.

In der uns geläufigen Formulierung der Quantenmechanik ist diese gegeben durch

$$Z(B, A) = \left\langle B \left| \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t - t_0) \right) \right| A \right\rangle \quad (1)$$

In der Pfadintegralformulierung errechnet sich die Übergangsamplitude durch Aufsummieren der Amplituden jedes einzelnen Pfades

$$Z(B, A) = \sum_{\text{alle Pfade}} \phi(x(t)) = \int \mathcal{D}x(t) \exp \left(\frac{i}{\hbar} S[x(t)] \right) \quad (2)$$

$$\phi(x, t) := \text{const} \exp \left(\frac{i}{\hbar} S[x(t)] \right) \quad (3)$$

mit der Wirkung $S[x(t)]$ der einzelnen Pfade.

Dies ist das Pfadintegral, welches wir später auch noch mathematisch herleiten wollen.

Um uns mehr darunter vorstellen zu können betrachten wir die einzelnen Terme des Integrals. Der Exponentialterm beschreibt die Phase der Amplitude des jeweiligen Pfades.

Die unterschiedlichen Phasen der Pfade kommen durch deren unterschiedliche Wirkung zustande.

Bei $\int \mathcal{D}x(t)$ handelt es sich um ein Funktionalintegral, also überabzählbar viele Integrationen. $x(t)$ bezeichnet dabei den jeweiligen Pfad.

Um dies zu veranschaulichen betrachten wir zuerst den diskreten Fall und gehen dann durch einen Limes ins Kontinuum über: Wir teilen den Pfad $x(t)$ in $N + 1$ Zeitintervalle mit Abstand $\Delta t = \varepsilon$ auf und ordnen jedem Zeitpunkt t_i einen Ort $x(t_i)$ (wobei $i \in \{0, \dots, N\}$) zu (Time-Slicing):

$$t_A = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N < t_{N+1} = t_B \quad (4)$$

$$\varepsilon = \Delta t = \frac{t_B - t_A}{N + 1} \quad (5)$$

Wir erhalten einen diskreten (“Zick-Zack“-)Pfad. Um alle solche Pfade aufzusummieren müssen wir über die einzelnen $x(t_i)$ integrieren.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_N = \prod_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} dx(t_n) \quad (6)$$

Nun können wir durch $\varepsilon \rightarrow 0$ bzw. $N \rightarrow \infty$ den kontinuierlichen Fall erhalten:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{n=1}^N \mathcal{N} dx(t_n) \right) = \int \mathcal{D}x(t) \quad (7)$$

wobei $\mathcal{N}$ ein von ε abhängiger Normierungsfaktor ist, der eingeführt wird, da sonst der Limes nicht existiert. Er ist aber sonst nicht von wesentlicher Bedeutung.

2.3 Klassischer Grenzfall

Die anschauliche Interpretation des Pfadintegrals sagt aus, dass jeder Pfad den ein Teilchen von A nach B nehmen kann beiträgt und mit einer Phase gewichtet wird.

Dies würde bedeuten, dass wenn ein Teilchen an den Punkten A und B in einem Labor irgendwo auf der Erde gemessen würde auch abwegige Pfade, wie z.B. dass das Teilchen die Erde verlässt einmal den Mond umkreist und danach erst bei B eintrifft, zur Übergangsamplitude beitragen.

Man sollte jedoch beachten, dass in der Phase die Wirkung S mit $\hbar$ gewichtet wird. D.h. da $\hbar$ klein ist oszilliert die Exponentialfunktion für im Verhältnis zu $\hbar$ große S sehr schnell. Bei großen S treten somit alle Phasen gleichermaßen auf und interferieren daher destruktiv miteinander, sodass abwegige Pfade wie der oben beschriebene keinen effektiven Beitrag leisten. Dort wo die Wirkung extremal wird, ändert sich bei einem leicht anderen Pfad S kaum und daher interferieren diese Pfade konstruktiv.

Somit tragen letztendlich nur die Pfade zur Wahrscheinlichkeitsamplitude bei, welche von dem Pfad der geringsten Wirkung kaum abweichen.

Im klassischen Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ ist es nun so, dass der Phasenterm $e^{\frac{i}{\hbar}S}$ enorm schnell oszilliert, da $\hbar$ im Nenner steht.

D.h. Alle Beiträge interferieren destruktiv, es sei denn S wird extremal:

$$\frac{\delta S}{\delta x(t)} = 0 \quad (8)$$

Dies ist gerade das Prinzip der geringsten Wirkung, welches wir aus der klassischen Mechanik kennen.

3 Herleitung des Pfadintegrals

Im folgenden werden wir das Pfadintegral mathematisch, ausgehend von der bekannten Form der Übergangsamplitude $Z(B, A)$ herleiten.

$$Z(B, A) = \left\langle B \left| \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t - t_0) \right) \right| A \right\rangle \quad (9)$$

Dafür werden wir der Einfachheit halber annehmen, dass $[V(x), p] = 0$ gilt, man kann aber auch ohne diese Annahme das Pfadintegral herleiten.

Zunächst, um einzelne Amplituden zu erhalten, teilen wir das Zeitintervall $[t_0, t]$ wie schon zuvor, in Intervalle der Größe ε auf (Time-Slicing)

$$\varepsilon = \Delta t = \frac{t - t_0}{N} \quad (10)$$

Wir erhalten

$$\left\langle B \left| \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t - t_0) \right) \right| A \right\rangle = \left\langle B \left| \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}\varepsilon \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}\varepsilon \right) \dots \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}\varepsilon \right) \right| A \right\rangle \quad (11)$$

Im weiteren setzen wir zwischen jede Exponentialfunktion die Vollständigkeitsrelation

$$\mathbf{1} = \int dx |x\rangle \langle x| \quad (12)$$

ein und erhalten

$$Z(B, A) = \left(\prod_{j=1}^{N-1} \int dx_j \right) \left\langle B \left| \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}\varepsilon \right) \right| x_{N-1} \right\rangle \dots \left\langle x_1 \left| \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}\varepsilon \right) \right| A \right\rangle \quad (13)$$

Für die einzelnen Übergangsamplituden erhalten wir also

$$Z(x_{j+1}, x_j) = \left\langle x_{j+1} \left| \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}\varepsilon \right) \right| x_j \right\rangle = \left\langle x_{j+1} \left| \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{\hat{p}^2}{2m} \varepsilon \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} V(x_j) \varepsilon \right) \right| x_j \right\rangle \quad (14)$$

Um eine Integralform zu bekommen setzen wir erneut die Vollständigkeitsrelation ein, diesmal in der Form

$$\mathbf{1} = \int dp |p\rangle \langle p| \quad (15)$$

Somit erhalten wir

$$Z(x_{j+1}, x_j) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}V(x_j)\varepsilon\right) \int dp \left\langle x_{j+1} \left| \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}\varepsilon\right) \right| p \right\rangle \langle p | x_j \rangle \quad (16)$$

$$= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}V(x_j)\varepsilon\right) \int dp \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}\varepsilon\right) \langle x_{j+1} | p \rangle \langle p | x_j \rangle \quad (17)$$

$$= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}V(x_j)\varepsilon\right) \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}\varepsilon - \frac{i}{\hbar}p(x_{j+1} - x_j)\right) \quad (18)$$

wobei im letzten Schritt

$$\langle p | x_j \rangle = \frac{\exp(\frac{i}{\hbar}px_j)}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad (19)$$

verwendet wurde.

Bei dem Integral handelt es sich um ein komplexes Gauß-Integral, das fast analog zum reellen Fall ausgewertet werden kann. (s. Abschnitt 4)

Wir erhalten

$$Z(x_{j+1}, x_j) = \left(\frac{im}{2\pi\hbar\varepsilon}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\varepsilon\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\varepsilon}\right)^2 - V(x_j)\right)\right] \quad (20)$$

Wir finden hieraus den Ausdruck für den Normierungsfaktor $\mathcal{N}$

$$\mathcal{N} = \left(\frac{im}{2\pi\hbar\varepsilon}\right)^{1/2} \quad (21)$$

Um wieder die gesamte Übergangsamplitude zu erhalten müssen wir die einzelnen Amplituden N mal mit sich selbst multiplizieren und erhalten

$$\begin{aligned} \left\langle B \left| \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t - t_0)\right) \right| A \right\rangle &= \left(\frac{im}{2\pi\hbar\varepsilon}\right)^{N/2} \left(\prod_{j=1}^{N-1} \int dx_j\right) \\ &\exp\left[\frac{i}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon \left(\frac{1}{2}m\left(\frac{x_{n+1} - x_n}{\varepsilon}\right)^2 - V(x_n)\right)\right] \end{aligned} \quad (22)$$

Im Limes $N \rightarrow \infty$ bzw. $\varepsilon \rightarrow 0$ gilt unter Anwendung der Definition der Ableitung und des Riemann-Integrals für den Exponenten der Exponentialfunktion

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \frac{i}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon \left(\frac{1}{2}m\left(\frac{x_{n+1} - x_n}{\varepsilon}\right)^2 - V(x_n)\right) = \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x)\right) = \frac{i}{\hbar} S[x(t)] \quad (23)$$

In diesem Limes erhalten wir daher insgesamt

$$\left\langle B \left| \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t - t_0)\right) \right| A \right\rangle = \int \mathcal{D}x(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x(t)]\right) = Z(B, A) \quad (24)$$

Damit haben wir das Pfadintegral hergeleitet.

3.1 Mathematische Wohldefinietheit

Die Frage die sich nun zuerst stellt, ist ob dieses Integral überhaupt existiert, d.h. wohldefiniert, ist.

In der Tat ist es so, dass die Existenz, insbesondere das Konvergenzverhalten, des Pfadintegrals mathematisch noch nicht eindeutig bewiesen werden konnte.

Unser Normierungsfaktor $\mathcal{N}$ divergiert offensichtlich im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$, was bei physikalischen Problemen irrelevant ist, da nach Ausführung des Integrals sich das ε kürzt.

Dieses Problem ist immer noch Gegenstand aktueller Forschung in der Mathematik. Der geläufigste Lösungsansatz ist die imaginärzeitige Formulierung mit dem Wiener-Maß.

4 Anwendungsbeispiel: Freies Teilchen

Im folgenden möchten wir am Beispiel des freien Teilchens diesen Formalismus weiter veranschaulichen.

Die Lagrangefunktion für das freie Teilchen ist bekanntlich: $L = \frac{m\dot{x}}{2}$. Somit hat das Pfadintegral die Form:

$$Z(B, A) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int \dots \int \exp \left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1})^2 \right] dx_1 \dots dx_{N-1} \left(\frac{2\pi i \hbar \varepsilon}{m} \right)^{-N/2} \quad (25)$$

Dies sind jeweils komplexe Gaußintegrale. Mit etwas Funktionentheorie kann man herleiten, dass diese folgende dem reellen Fall ähnelnde Lösung besitzen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\alpha x^2 + i\beta x) dx = \sqrt{\frac{i\pi}{\alpha}} \exp \left(-\frac{i\beta^2}{4\alpha} \right) \quad (26)$$

Diese Argumentation ist jedoch nur gültig wenn $\text{Re}(i\alpha) > 0$, was hier nicht erfüllt ist. Man kann dies aber trotzdem rechtfertigen indem man zu imaginärer Zeit übergeht (Wick-Rotation s. Abschnitt 5).

Wenn wir dies nun benutzen erhalten wir zunächst:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\pi i \hbar \varepsilon}{m} \right)^{-3/2} \exp \left[\frac{m}{2i\hbar\varepsilon} (x_2 - x_1)^2 + (x_1 - x_0)^2 \right] dx_1 \\ &= \left(\frac{2\pi i \hbar * 2\varepsilon}{m} \right)^{-1/2} \exp \left[\frac{m}{2i\hbar(2\varepsilon)} (x_2 - x_0)^2 \right] \end{aligned} \quad (27)$$

Somit haben wir das erste Integral ausgewertet. Nun multiplizieren wir dieses Ergebnis mit:

$$\left(\frac{2\pi i \hbar \varepsilon}{m} \right)^{-1/2} \exp \left[\frac{m}{2i\hbar\varepsilon} (x_3 - x_2)^2 \right] \quad (28)$$

Das Ergebnis ist wie zu erwarten dem in Gleichung 27 sehr ähnlich nur wird $(x_2 - x_0)^2$ zu $(x_3 - x_0)^2$ und aus 2ε wird 3ε sodass wir erhalten:

$$\left(\frac{2\pi i \hbar * 3\varepsilon}{m}\right)^{-1/2} \exp\left[\frac{m}{2i\hbar(3\varepsilon)}(x_3 - x_0)^2\right] \quad (29)$$

Hier erkennt man bereits das offensichtlich rekursive Verhalten des Integrals, sodass man nach $N - 1$ -maligem Ausführen des Integrals erhält:

$$\left(\frac{2\pi i \hbar N\varepsilon}{m}\right)^{-1/2} \exp\left[\frac{m}{2i\hbar(N\varepsilon)}(x_N - x_0)^2\right] \quad (30)$$

Betrachtet man nun, dass gilt: $N\varepsilon = t_B - t_A$ sowie $x_N = x_B$ und $x_0 = x_A$ so ist die Lösung des Pfadintegrals für das freie Teilchen gegeben durch:

$$Z(B, A) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar(t_B - t_A)}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{im(x_B - x_A)^2}{2\hbar(t_B - t_A)}\right] \quad (31)$$

Diese Gleichung geht für $t_B \rightarrow t_A$ in die Dirac'sche Delta-Distribution $\delta(x_B - x_A)$ über. Außerdem sehen wir, dass ein zur Zeit t_A am Ort x_A lokalisiertes Teilchen für $t_B > t_A$ zerfließt.

Beides bestätigt unsere Erwartungen aus der Quantenmechanik.

Auch wenn das freie Teilchen mit dem Pfadintegralformalismus analytisch lösbar ist, ist es dennoch mit weitaus mehr Rechenaufwand verbunden als im uns gewohnten Operatorformalismus.

Weitere Probleme die sich durch das Pfadintegral lösen lassen sind u.a. der Harmonische Oszillator und das Wasserstoffatom, wobei dort der Rechenaufwand, insbesondere für das Wasserstoffatom erheblich größer ist.

Um einfache Probleme der Quantenmechanik möglichst schnell zu lösen ist der Pfadintegralformalismus also nicht geeignet.

5 Das Pfadintegral in Statistischer Physik und QFT

5.1 Statistische Physik

Quantenmechanik und Statistische Physik sind auf interessante Weise über Wick-Rotationen miteinander verbunden.

Bei Wick-Rotationen handelt es sich um das Erlauben imaginärer Zeitwerte. Motiviert, wird dies dadurch, dass wenn man t komplexe Werte annehmen lässt die Minkowski-Metrik der speziellen Relativitätstheorie und die euklidische Metrik äquivalent sind.

Ersetzt man nun den in der Statistischen Physik auftretenden Faktor $\beta = 1/(k_B T)$ durch die imaginäre Zeit $it/\hbar$ so ist man von der Statistischen Physik in die Quantenmechanik übergegangen.

Desweiteren ist in der Statistischen Physik das Pfadintegral von Bedeutung. Hauptziel

jeglicher Probleme der Statistischen Physik ist es die Zustandssumme zu berechnen, da sich aus dieser alle thermodynamischen Potentiale errechnen lassen.

Diese kann man auch über Pfadintegrale berechnen, was man sich anschaulich folgendermaßen klar machen kann:

In einem Ensemble mit der Temperatur T werden aufgrund von thermischen Schwankungen einige Zustände von der geringsten Energie (geringste Wirkung) abweichen und je größer die Differenz zur geringsten Energie desto geringer die Wahrscheinlichkeit der Besetzung eines solchen Zustands. Somit hat jeder Energiezustand in einer gewissen Umgebung zur minimalen Energie eine Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür das Teilchen dort zu finden.

Dies ist äquivalent zu einer gewichteten Summierung über alle Pfade, wie wir es vom Pfadintegral her kennen.

Die Relation von Quantenmechanik und Statistischer Physik folgt hier also aus der Ähnlichkeit von thermischen Schankungen und quantenmechanischer Unschärfe.

5.2 Quantenfeldtheorie

Das Pfadintegral findet hauptsächlich in der Quantenfeldtheorie Anwendung.

Hierbei dienen sie zur Berechnung der sogenannten N-Punkt-Korrelationsfunktionen, welche Erwartungswerte für bestimmte Übergänge darstellen.

Aus diesen lassen sich auch die Feynman-Regeln und Feynman-Diagramme herleiten.

Wie in Abschnitt 1.2 bereits angesprochen ist das Pfadintegral auch für die Störungstheorie von großer Wichtigkeit. Vor allem bekommt man die Störungsrechnung bei kleinen Störungen viel direkter, da

$$Z(B, A) \propto \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int dt V(x) \right) \quad (32)$$

Somit kann man in der Störungsrechnung einfach nach dem Exponentialterm des Potentials entwickeln und erhält die einzelnen Störungsordnungen.

Die Bedeutung des Pfadintegralformalismuses in der Quantenfeldtheorie ist dermaßen groß, dass die zuvor verwendeten Formalismen inzwischen weitestgehend obsolet sind.

Literatur

- [1] Feynman and Hibbs *Quantum Mechanics And Path Integrals* (Seiten 2-43, 120f)
- [2] http://en.wikipedia.org/wiki/Relation_between_Schrödinger's_equation_and_the_path_integral_formulation_of_quantum_mechanics,
Stand 15.01.2015
- [3] http://en.wikipedia.org/wiki/Path_integral_formulation,
Stand 18.01.2015
- [4] <http://de.wikipedia.org/wiki/Wick-Rotation>,
Stand 18.01.2015