Dirac-Gleichung - Freie Elektronen

Patrick Köber

12.12.14

Gliederung

Problemstellung

- Schrödingergleichung (kräftefrei)

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\psi(\vec{x},t)$$

Problemstellung

- Schrödingergleichung (kräftefrei)

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 \psi(\vec{x},t)$$

- Problem: SE ist nicht lorentzkovariant, denn

Problemstellung

- Schrödingergleichung (kräftefrei)

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\psi(\vec{x},t)$$

- Problem: SE ist nicht lorentzkovariant, denn
- Lorentztransformationen Λ transformieren Zeit und Ort symmetrisch.

Problemstellung

- Schrödingergleichung (kräftefrei)

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\psi(\vec{x},t)$$

- Problem: SE ist nicht lorentzkovariant, denn
- Lorentztransformationen Λ transformieren Zeit und Ort symmetrisch.
- In der Schrödingergleichung treten Orts- und Zeitableitung in unterschiedlicher Ordnung auf, also unsymmetrisch

Notation und Nützliches

Kovarianter Vektor: x_μ, Kontravarianter Vektor x^μ

Notation und Nützliches

Kovarianter Vektor: x_μ, Kontravarianter Vektor x^μ

mit dem Skalarprodukt: $x^\mu y_\mu$

Notation und Nützliches

Kovarianter Vektor: x_μ, Kontravarianter Vektor x^μ

mit dem Skalarprodukt: $x^\mu y_\mu$

Gradientenoperator: ∂_μ bzw. ∂^μ

Notation und Nützliches

Kovarianter Vektor: x_μ, Kontravarianter Vektor x^μ

mit dem Skalarprodukt: $x^\mu y_\mu$

Gradientenoperator: ∂_μ bzw. ∂^μ

d'Alembert-Operator: $\Box = \partial^\mu \partial_\mu$

Notation und Nützliches

Kovarianter Vektor: x_μ, Kontravarianter Vektor x^μ

mit dem Skalarprodukt: $x^\mu y_\mu$

Gradientenoperator: ∂_μ bzw. ∂^μ

d'Alembert-Operator: $\Box = \partial^\mu \partial_\mu$

4er-Impuls: p^μ bzw. p_μ

Notation und Nützliches

Kovarianter Vektor: x_μ, Kontravarianter Vektor x^μ

mit dem Skalarprodukt: $x^\mu y_\mu$

Gradientenoperator: ∂_μ bzw. ∂^μ

d'Alembert-Operator: $\Box = \partial^\mu \partial_\mu$

4er-Impuls: p^μ bzw. p_μ

mit dem invarianten Skalarprodukt:
$p^\mu p_\mu = (\frac{E}{c})^2 - \vec{p}^2 = (mc)^2$

Klein-Gordon-Gleichung

Ausgangspunkt: **Korrespondenzprinzip**

Bei Schrödinger: $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$
$E \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, $\vec{p} \longrightarrow -i\hbar\nabla$

4er-Impulsoperator:
$p^\mu \longrightarrow i\hbar\partial^\mu = i\hbar(\frac{\partial}{\partial ct}, -\nabla)$

Klein-Gordon-Gleichung

Ausgangspunkt: **Korrespondenzprinzip**

Bei Schrödinger: $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$
$E \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, $\vec{p} \longrightarrow -i\hbar\nabla$

4er-Impulsoperator:
$p^\mu \longrightarrow i\hbar\partial^\mu = i\hbar(\frac{\partial}{\partial ct}, -\nabla)$

Idee:
$E = \sqrt{c^2\vec{p}^2 + m_0^2c^4} \longrightarrow$
$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x^\mu) = \sqrt{-c^2\hbar^2\nabla^2 + m_0^2c^4}\psi(x^\mu)$

Problem: Zeit- und Ortsableitung treten wieder unsymmetrisch auf

$\Longrightarrow$ Benutze quadratische Form

Wir erhalten die **Klein-Gordon-Gleichung** (1926)

$$E^2 = c^2\vec{p}^2 + m_0^2 c^4 \longrightarrow$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi(x^\mu)}{\partial t^2} = (-c^2\hbar^2\nabla^2 + m_0^2 c^4)\psi(x^\mu)$$

$$\Longleftrightarrow (\frac{m^2c^2}{\hbar^2} + \Box)\psi(x^\mu) = 0$$

Relativistisch invariant, da $\Box$ invariant

Kurze Betrachtung der KGE

Lösung der freien KGE: $\psi(x^\mu) = e^{-i(Et-\vec{p}\vec{x})/\hbar}$

mit $E = \pm\sqrt{c^2\vec{p}^2 + m_0^2 c^4}$

$\rightarrow$ Negative Energien möglich

Kurze Betrachtung der KGE

Lösung der freien KGE: $\psi(x^\mu) = e^{-i(Et - \vec{p}\vec{x})/\hbar}$

mit $E = \pm\sqrt{c^2\vec{p}^2 + m_0^2 c^4}$

$\rightarrow$ Negative Energien möglich

Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\vec{j} = 0$

Kurze Betrachtung der KGE

Lösung der freien KGE: $\psi(x^\mu) = e^{-i(Et-\vec{p}\vec{x})/\hbar}$

mit $E = \pm\sqrt{c^2\vec{p}^2 + m_0^2 c^4}$

$\rightarrow$ Negative Energien möglich

Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\vec{j} = 0$

Schrödinger: $\rho = |\psi(\vec{x},t)|^2$, $\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^\dagger\nabla\psi - \psi\nabla\psi^\dagger)$

Kurze Betrachtung der KGE

Lösung der freien KGE: $\psi(x^\mu) = e^{-i(Et-\vec{p}\vec{x})/\hbar}$

mit $E = \pm\sqrt{c^2\vec{p}^2 + m_0^2 c^4}$

$\rightarrow$ Negative Energien möglich

Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\vec{j} = 0$

Schrödinger: $\rho = |\psi(\vec{x},t)|^2$, $\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^\dagger\nabla\psi - \psi\nabla\psi^\dagger)$

Klein-Gordon: $\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^\dagger\nabla\psi - \psi\nabla\psi^\dagger)$

Kurze Betrachtung der KGE

Lösung der freien KGE: $\psi(x^\mu) = e^{-i(Et-\vec{p}\vec{x})/\hbar}$

mit $E = \pm\sqrt{c^2\vec{p}^2 + m_0^2 c^4}$

$\rightarrow$ Negative Energien möglich

Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\vec{j} = 0$

Schrödinger: $\rho = |\psi(\vec{x},t)|^2$, $\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^\dagger\nabla\psi - \psi\nabla\psi^\dagger)$

Klein-Gordon: $\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^\dagger\nabla\psi - \psi\nabla\psi^\dagger)$

$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}(\psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}\psi)$

ρ nich positiv definit, also keine Wahrscheinlichkeitsverteilung für ein Teilchen

Forderungen an Dirac-Gleichung

Forderungen an Dirac-Gleichung

- Prinzipien der nichtrelativistischen QM sollen erhalten bleiben

Forderungen an Dirac-Gleichung

- Prinzipien der nichtrelativistischen QM sollen erhalten bleiben
- postiv definites $\rho \to$ erste Ordnung in der Zeit

Forderungen an Dirac-Gleichung

- Prinzipien der nichtrelativistischen QM sollen erhalten bleiben
- postiv definites $\rho \rightarrow$ erste Ordnung in der Zeit
- hermitescher Dirac-Operator H_D

Forderungen an Dirac-Gleichung

- Prinzipien der nichtrelativistischen QM sollen erhalten bleiben
- postiv definites $\rho \rightarrow$ erste Ordnung in der Zeit
- hermitescher Dirac-Operator H_D
- lorentzkoviariant $\Longrightarrow$ Raumableitung nur in erster Ordnung

Forderungen an Dirac-Gleichung

- Prinzipien der nichtrelativistischen QM sollen erhalten bleiben
- postiv definites $\rho \rightarrow$ erste Ordnung in der Zeit
- hermitescher Dirac-Operator H_D
- lorentzkoviariant $\Longrightarrow$ Raumableitung nur in erster Ordnung
- Relativistische Energie-Impuls Beziehung muss sich aus DE ableiten lassen

Forderungen an Dirac-Gleichung

- Prinzipien der nichtrelativistischen QM sollen erhalten bleiben
- postiv definites $\rho \rightarrow$ erste Ordnung in der Zeit
- hermitescher Dirac-Operator H_D
- lorentzkoviariant $\Longrightarrow$ Raumableitung nur in erster Ordnung
- Relativistische Energie-Impuls Beziehung muss sich aus DE ableiten lassen
- lorentzkovariante KG mit $\rho = \psi^\dagger \psi$

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Dirac-Gleichung in Hamiltonscher Form:

$$i\hbar\frac{\psi(x^\mu)}{\partial t} = (-i\hbar c\alpha_i\partial_i + \beta m_0 c^2)\psi(x^\mu)$$

Zusammenfassung

- Dirac-Gleichung in Hamiltonscher Form:

$$i\hbar\frac{\psi(x^\mu)}{\partial t} = (-i\hbar c\alpha_i\partial_i + \beta m_0 c^2)\psi(x^\mu)$$

- Kontinuitätsgleichung erfüllt mit positiv definiten ρ

Zusammenfassung

- Dirac-Gleichung in Hamiltonscher Form:

$$i\hbar\frac{\psi(x^\mu)}{\partial t} = (-i\hbar c\alpha_i\partial_i + \beta m_0 c^2)\psi(x^\mu)$$

- Kontinuitätsgleichung erfüllt mit positiv definiten ρ
- Dirac-Gleichung in lorentzkovarianter Form:

$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{m_0 c}{\hbar})\Psi(x^\mu) = 0$$

Zusammenfassung

- Dirac-Gleichung in Hamiltonscher Form:

$$i\hbar\frac{\psi(x^\mu)}{\partial t} = (-i\hbar c\alpha_i\partial_i + \beta m_0 c^2)\psi(x^\mu)$$

- Kontinuitätsgleichung erfüllt mit positiv definiten ρ
- Dirac-Gleichung in lorentzkovarianter Form:

$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{m_0 c}{\hbar})\Psi(x^\mu) = 0$$

- Bispinortransformation lässt sich konstruieren

$$D_{-1}(\Lambda)\gamma^\mu(\Lambda^{-1})^\nu_\mu D(\Lambda) = \lambda^\mu$$

Interpretation

Interpretation

- Dirac: Vakuum ist ein See aus Teilchen mit negativer Energie

Interpretation

- Dirac: Vakuum ist ein See aus Teilchen mit negativer Energie
- Löcher im Dirac-See sind Antiteilchen

Interpretation

- Dirac: Vakuum ist ein See aus Teilchen mit negativer Energie
- Löcher im Dirac-See sind Antiteilchen
- Pauli-Prinzip verhindert, dass Elektronen negative Energien erhalten

Interpretation

- Dirac: Vakuum ist ein See aus Teilchen mit negativer Energie
- Löcher im Dirac-See sind Antiteilchen
- Pauli-Prinzip verhindert, dass Elektronen negative Energien erhalten
- inzwischen überholt $\rightarrow$ Quantenfeldtheorie

Schwabl: Quantenmechanik für Fortgeschrittene

G. Wolschin: RQM-Skript

Wachter: Relativistische Quantenmechanik

Danke für Ihre Aufmerksamkeit